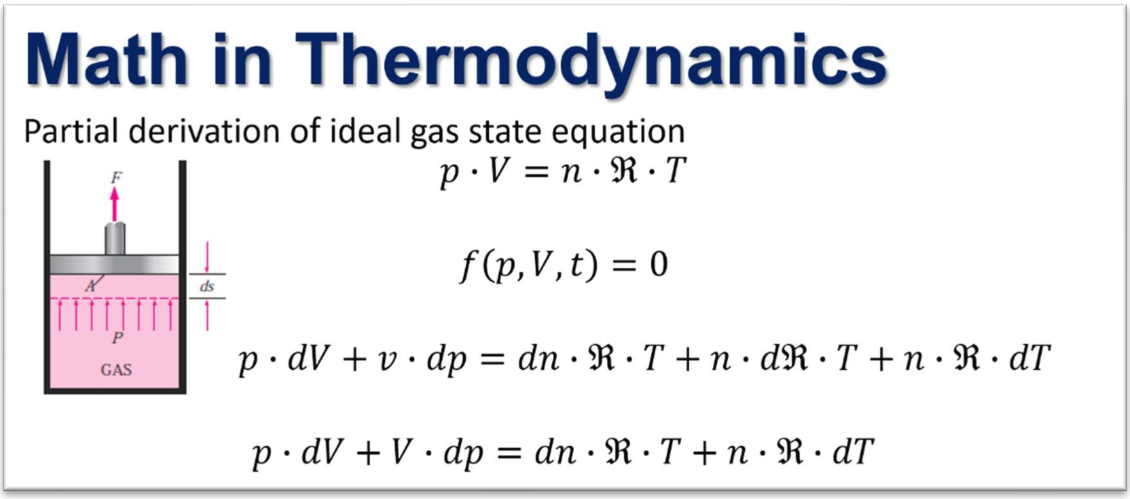
6 DERIVACIJE



DETALJAN OPIS:

Većina studenata prve godine teže shvaća i usvaja teške matematičke pojmove diferencijalnoga računa. Često je to zbog lošeg predznanja ili stoga što su ti pojmovi doista teški i nerijetko zahtijevaju matematičku i logičku zrelost. S obzirom na te poteškoće, u ovoj cjelini, pristupa se objašnjavanju gradiva tako da su prvo dani ciljani teorijski pojmovi, te se kroz riješene primjere uči studenta kako da samostalno riješi zadatke kao i da naučeno gradivo zna primjeniti pri rješavanju problemskih zadataka iz pomorstva.

Obrađeni su osnovni pojmovi o derivaciji funkcije; dana su pravila i tehnike deriviranja funkcije, s tim da je posebna pažnja posvećena primjeni derivacije u problemima tangente, normale, diferencijalu i u određivanju limesa funkcija. Nakon što je obrađena primjena derivacije u ispitivanju toka i u crtanju grafa funkcije, prikazana je primjena u pomorstvu.

CILJ: Usvajanje znanja i stjecanje vještina iz onih područja diferencijalnoga računa koja su nužna za praćenje nastavnih programa ostalih kolegija predviđenih nastavnim planom te za očekivanu primjenu u pomorskoj praksi.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Ishodi učenja:

1. Znati definirati pojmove derivacije funkcije, limesa funkcije i diferencijala.
2. Primjenjivati jednostavnija i složenija pravila deriviranja pri rješavanju zadataka.
3. Znati derivirati složene, implicitno i parametarski zadane funkcije.
4. Objasniti koncept derivacije realne funkcije realne varijable te geometrijsku interpretaciju derivacije funkcije u točki.
5. Primjeniti derivaciju funkcije u pronalaženju lokalnih i globalnih ekstrema funkcije jedne varijable te točaka infleksije funkcije.
6. Analizirati tok elementarne funkcije upotrebom derivacija te skicirati njezin graf.

Prethodno znanje: skupovi i funkcije, nizovi i redovi, limes i neprekidnost funkcije

Odnos prema stvarnim pomorskim problemima: konstrukcija plovila (geometrijsko razmatranje), mehanika (problem brzine), meteorologija (vremenska prognoza - ekstremne vrijednosti mora), elektronika (grafički prikazi), nautika (određivanje udaljenosti, plovnost puta), …

SADRŽAJ

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

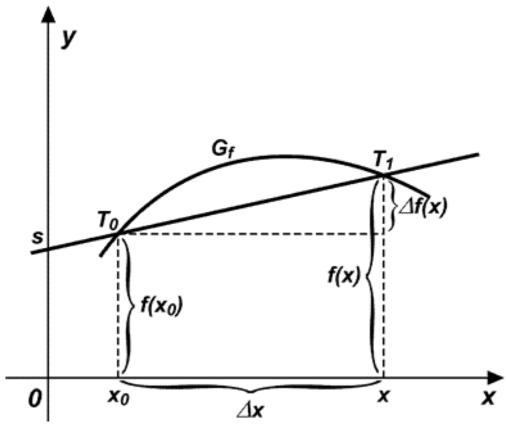
6.1. Pojam derivacije

Pojam derivacije jedan je od najvažnijih pojmova u matematici kojim se izgrađuje tzv. diferencijalni račun. Do pojma derivacije prvi je došao engleski matematičar, fizičar i astronom I. Newton (1642-1727), i to još prije 1669. godine, rješavajući problem određivanja brzine nekog tijela, koje se giba nejednoliko po pravcu, u svakom trenutku toga gibanja. Do istoga otkrića došao je nešto kasnije njemački matematičar i filozof G. W. Leibniz (1646-1716), rješavajući problem određivanja koeficijenta smjera tangente krivulje.

Znajući da se plovila gibaju po vodenim površinama možemo samo pretpostaviti važnost znanja primjene derivacija u pomorstvu.

Kada objasnimo pojam derivacije, bit će jasno o čemu se radi.

Neka je $f: I \to R$ (ili $y = f(x)$) zadana funkcija na intervalu $I \subseteq R$ i neka je $x_0 \in I$ neka točka tog intervala (vidi sliku).



Neka je $x \neq x_0$, $x \in I$, i promatramo dvije vrijednosti funkcije: $f(x)$ i $f(x_0)$. Izraz, $\Delta x = x - x_0$ nazivamo ***prirast (ili diferencija) argumenta x***, a $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ nazivamo ***promjenom (ili prirastom) funkcije u točki x_0***.

Definirajmo sada kvocijent diferencija:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0. \tag{1}$$

Funkcija $g(x)$ daje informaciju kolika je brzina promjene funkcije *f* od x_0 do *x*, odnosno $g(x)$ mjeri prosječnu promjenu funkcije od x_0 do *x*. Što je prirast Δx, manji, to $g(x)$ daje točniju obavijest o brzini promjene funkcije u točki x_0.

Definition 1: *Kažemo da je funkcija $f: I \to R$* ***diferencijabilna*** *(sinonim: derivabilna) u točki $x_0 \in I = \langle a, b \rangle$ ako postoji granična vrijednost:*

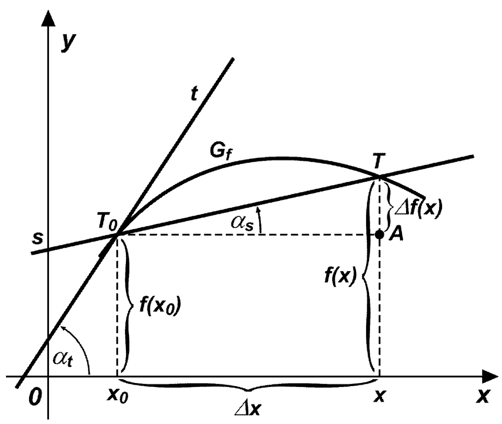
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R. \qquad (2)$$

Broj $f'(x_0)$ nazivamo ***derivacijom funkcije f u točki*** x_0. Kažemo da je f diferencijabilna na *I* ako je ona diferencijabilna u svakoj točki $x \in I$.

Ako je $f : I \to R$ diferencijabilna na *I* onda je sa $x \to f'(x)$ definirana nova funkcija $f' : I \to R$, tzv. derivacija funkcije f na *I.*

U filozofskom smislu, derivacija je omjer dobivenog i uloženog. U programerskom smislu, derivacija je omjer izlaza i ulaza. U fizikalnom smislu, derivacija je omjer proizvoljno malog puta kroz proizvoljno malo vrijeme, a to je brzina.

U geometrijskom smislu, potrebna nam je slijedeća slika:



Na grafu G_f funkcije $f : I \to R$ uočimo točke $T_0(x_0, f(x_0))$ i $T(x, f(x))$ kojima je određen pravac s, koji se naziva ***sekantom grafa funkcije*** G_f na intervalu [x_0, x]. Koeficijent sekante dobivamo po formuli:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k_s \qquad (3)$$

Ako se točka T "giba" po grafu G_f ka točki T_0, tada se sekanta *s* zakreće oko točke T_0. Ako pri tome procesu postoji granični pravac *t* čijem položaju teži sekanta *s*, bez obzira da li točka T teži T_0, bilo s desna ili slijeva od T_0, tada je t tangenta grafa G_f u točki T_0. Ako funkcija f ima derivaciju u točki $x_0 \in I$, tada, na osnovi relacije (3), izlazi da je

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} k_s = k_t, \qquad (4)$$

tj. $\qquad f'(x_0) = k_t. \qquad$ (5)

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Dakle, **brojevna vrijednost** $f'(x_0)$ **derivacije funkcije** f **u točki** x_0 **predstavlja koeficijent smjera** k_t **tangente** t**, povučene na graf** G_f **u točki** $T_0(x_0, f(x_0))$.

Slijede primjeri kako se računa derivacija po definiciji za neke poznate elementarne funkcije. Potom ćemo dati tablicu njihovih derivacija, koja se može dokazati analogno ovim primjerima.

Primjer 1

Neka je $f(x) = 5x;\ x \in R.$ Odrediti $f'(x_0)$, gdje je $x_0 \in R$.

Rješenje:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{5x-5x_0}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{5(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}5 = 5 .$$

Kako vidimo $f'(x_0)$ ne ovisi o točki x_0, što je jasno, jer je $f(x) = 5x$ linearna funkcija čija je prosječna brzina promjene svuda ista.

Primjer 2

Neka je $f(x) = x^2;\ x \in R$. Odrediti $f'(x_0)$, gdje je $x_0 \in R$.

Rješenje:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^{\ 2}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0.$$

Time smo pokazali da je $(x^2)' = 2x$ ¸ $x \in R$.

Primjer 3

Neka je $f(x) = x^3;\ x \in R$. Odrediti $f'(x_0)$, gdje je $x_0 \in R$.

Rješenje:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^{\ 3}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^{\ 2})}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^{\ 2}) = 3x_0^{\ 2}.$$

Time smo pokazali da je $(x^3)' = 3x^2$ ¸ $x \in R$.

Primjer 4

Neka je $f(x) = \sqrt{x};\ x \in R$. Odrediti $f'(x_0)$, gdje je $x_0 \in R$.

Rješenje:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Time smo pokazali da je $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in R$.

6.2. Tablica i pravila deriviranja elementarnih funkcija

Ako nastavimo u istome stilu sa primjerima iz prijašnje cjeline, možemo dokazati da vrijedi slijedeća ***tablica deriviranja*** elementarnih funkcija, koju koristimo "zdravo za gotovo":

1)	$C' = 0$	$(C \in R)$
2)	$x' = 1$	
3)	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\alpha \in R$
4)	$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	
5)	$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$	$a > 0$
6)	$(ln\,x)' = \dfrac{1}{x}$	$x > 0$
7)	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$x > 0,\ a > 0$
8)	$(sin\,x)' = cos\,x$	
9)	$(cos\,x)' = -sin\,x$	
10)	$(tgx)' = \dfrac{1}{cos^2 x}$	
11)	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{sin^2 x}$	
12)	$(Arc\,sin\,x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

13)	$(Arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$\lvert x\rvert < 1$
14)	$(Arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	
15)	$(Arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	
16)	$(shx)' = chx$	
17)	$(chx)' = shx$	
18)	$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$	
19)	$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$	
20)	$(Arshx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
21)	$(Archx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\lvert x\rvert > 1$
22)	$(Arthx)' = \frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
23)	$(Arcthx)' = -\frac{1}{x^2-1}$	$\lvert x\rvert > 1$

Derivacija svake druge funkcije treba biti izračunata koristeći ***pravila za deriviranje funkcija*** kako slijede u nastavku:

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$	derivacija zbroja i razlike funkcija

$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	derivacija produkta funkcija
$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	derivacija kvocijenta funkcija $(g(x)\neq 0)$
$\{g[f(x)]\}' = g'[f(x)]\cdot f'(x)$	derivacija kompozicije funkcija

Primjer 1

Odrediti derivaciju funkcije $f(x)=6x^3-4x^2+3x-2$.

Rješenje:

$$f'(x) = \left(6x^3-4x^2+3x-2\right)' = 6\cdot\left(x^3\right)' - 4\cdot\left(x^2\right)' + 3\cdot x' - 2' =$$
$$= 6\cdot 3x^2 - 4\cdot 2x + 3\cdot 1 - 0 = 18x^2 - 8x + 3.$$

Primjer 2

Odrediti $h'(x)$ ako je $h(x)=e^x\cdot\sin x$.

Rješenje:

$$h'(x) = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) = \left(e^x\right)'\cdot\sin x + e^x\cdot(\sin x)' =$$
$$= e^x\cdot\sin x + e^x\cdot\cos x = e^x(\sin x+\cos x).$$

2Neka je $h(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-3x+2}$. Odrediti $h'(x)$.

Rješenje:

$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{\left(x^2+3x+1\right)'\left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2-3x+2\right)'}{\left(x^2-3x+2\right)^2} =$$
$$= \frac{(2x+3)\left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2+3x+1\right)(2x-3)}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{-6x^2+2x+9}{\left(x^2-3x+2\right)^2}.$$

Primjer 3

Odrediti derivacije funkcija:

(1.) $h(x)=e^{3x^2-2x+1}$;

(2.) $h(x)=\left(2x^2-3x\right)^3$;

(3.) $h(x)=\sin\left(3x^3-4\right)$;

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Rješenje:

(1.) $h'(x)=\left(e^{3x^2-2x+1}\right)'=e^{3x^2-2x+1}\cdot\left(3x^2-2x+1\right)'=e^{3x^2-2x+1}\cdot(6x-2)$.

(2.) $h'(x)=\left(\left(2x^2-3x\right)^3\right)'=3\left(2x^2-3x\right)^2\left(2x^2-3x\right)'=3\left(2x^2-3x\right)^2\cdot(4x-3)$

(3.) $h'(x)=\left(\sin\left(3x^3-4\right)\right)'=\cos\left(3x^3-4\right)\cdot\left(3x^3-4\right)'=\cos\left(3x^3-4\right)\cdot\left(9x^2\right)=9x^2\cos\left(3x^3-4\right)$

Vježbe

Zadatak 6.1.

Naći derivaciju funkcija:

(1.) $f(x)=3\cdot\sqrt[6]{x^5}$; (2.) $g(x)=\dfrac{2x^2-3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Rješenje:

(1.) $f(x)=3\cdot\sqrt[6]{x^5}=3x^{\frac{5}{6}}$.

$$f'(x)=3\cdot\frac{5}{6}x^{\frac{5}{6}-1}=\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{6}}=\frac{5}{2x^{\frac{1}{6}}}=\frac{5}{2\cdot\sqrt[6]{x}}.$$

(2.) $g(x)=\dfrac{2x^2-3}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{2x^2-3}{x^{\frac{2}{3}}}=2x^{\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{2}{3}}$.

$$g'(x)=2\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-3\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}=\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{x^{\frac{5}{3}}}=\frac{8x^2+6}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}.$$

Zadatak 6.2.

Naći derivaciju funkcija:

(1.) $y=ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$; (2.) $y=\dfrac{1}{15}\cos^3 x\left(3\cos^2 x-5\right)$.

Rješenje:

(1.) $$y'=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1}\cdot\frac{1\cdot e^x}{2\sqrt{1+e^x}}-\frac{1}{\sqrt{1+e^x}+1}\cdot\frac{1\cdot e^x}{2\sqrt{1+e^x}}=$$

$$=\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot\frac{\sqrt{1+e^x}+1-\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)}=\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot\frac{2}{1+e^x-1}=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}.$$

(2.) $$y'=\frac{1}{15}\left[3cos^2 x\cdot(-sin\,x)\cdot\left(3cos^2 x-5\right)+cos^3 x\cdot 6cos\,x\cdot(-sin\,x)\right]=$$

$$=-\frac{3cos^2 x\cdot sin\,x}{15}\left(3cos^2 x-5+2cos^2 x\right)=-\frac{cos^2 x\cdot sin\,x}{5}\left(5cos^2 x-5\right)=$$

$$=\frac{5}{5}cos^2 x\cdot sin\,x\left(1-cos^2 x\right)=cos^2 x\cdot sin^3 x.$$

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Zadatak 6.3.

Odredi derivaciju funkcija:

(1.) $f(x)=\dfrac{sin\,x+cos\,x}{sin\,x-cos\,x}$;

(2.) $f(x)=\dfrac{x^5}{e^x}$;

(3.) $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2-\alpha+3}{2\alpha}$;

(4.) $f(t)=2t\cdot sin\,t-(t^2-2)cos\,t$.

Rješenje:

(1.) $$f'(x)=\frac{(sin\,x+cos\,x)'(sin\,x-cos\,x)-(sin\,x+cos\,x)(sin\,x-cos\,x)'}{(sin\,x-cos\,x)^2}=$$
$$=\frac{(cos\,x-sin\,x)(sin\,x-cos\,x)-(sin\,x+cos\,x)(cos\,x+sin\,x)}{(sin\,x-cos\,x)^2}=$$
$$=\frac{cos\,x\,sin\,x-sin^2\,x-cos^2\,x+sin\,x\,cos\,x-(sin\,x\,cos\,x+cos^2\,x+sin^2\,x+cos\,x\,sin\,x)}{(sin\,x-cos\,x)^2}=$$
$$=\frac{2\,cos\,x\,sin\,x-1-2\,cos\,x\,sin\,x-1}{(sin\,x-cos\,x)^2}=-\frac{2}{(sin\,x-cos\,x)^2}.$$

(2.) $$f'(x)=\frac{(x^5)'\cdot e^x-x^5\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{5x^4e^x-x^5e^x}{e^{2x}}=\frac{5x^4-x^5}{e^x}=\frac{x^4(5-x)}{e^x}.$$

(3.) $$f'(\alpha)=\frac{(2\alpha^2-\alpha+3)'\cdot 2\alpha-(2\alpha^2-\alpha+3)(2\alpha)'}{(2\alpha)^2}=\frac{(4\alpha-1)\cdot 2\alpha-(2\alpha^2-\alpha+3)\cdot 2}{4\alpha^2}=$$
$$=\frac{8\alpha^2-2\alpha-4\alpha^2+2\alpha-6}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha^2-6}{4\alpha^2}=\frac{2\alpha^2-3}{2\alpha^2}.$$

(4.) $$f'(t)=(2t)'\,sin\,t+2t(sin\,t)'-(t^2-2)'\,cos\,t-(t^2-2)(cos\,t)'=$$
$$=2\,sin\,t+2t\,cos\,t-2t\,cos\,t-(t^2-2)(-\,sin\,t)=2\,sin\,t+t^2\,sin\,t-2\,sin\,t=t^2\,sin\,t.$$

Zadatak 6.4.

Naći derivaciju funkcija:

(1.) $y=sin^3\,x$;

(2.) $y=ln(tgx)$;

(3.) $y = 5^{\cos x}$;

(4.) $y = \ln \sin\left(x^3 + 1\right)$;

(5.) $y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$;

(6.) $y = \ln^5(tg3x)$;

(7.) $y = \sin^2\sqrt{\frac{1}{1-x}}$;

(8.) $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

Rješenje:

(1.) $y' = \left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$;

(2.) $y' = [\ln(tgx)]' = \frac{1}{tgx}\cdot(tgx)' = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$;

(3.) $y' = \left[5^{\cos x}\right]' = 5^{\cos x}\cdot \ln 5 \cdot (\cos x)' = 5^{\cos x}\cdot \ln 5\cdot(-\sin x) = -5^{\cos x}\cdot\ln 5\cdot \sin x$;

(4.) $y' = \frac{1}{\sin\left(x^3+1\right)}\cdot\left[\sin\left(x^3+1\right)\right]' = \frac{1}{\sin\left(x^3+1\right)}\cdot\cos\left(x^3+1\right)\left(x^3+1\right)' = 3x^2 ctg\left(x^3+1\right)$;

(5.) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}\cdot\frac{1\cdot\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq 0)$.

(6.) $y' = 5\ln^4(tg3x)\cdot[\ln(tg3x)]' = 5\ln^4(tg3x)\cdot\frac{1}{tg3x}\cdot(tg3x)' =$

$= 5\ln^4(tg3x)\cdot\frac{1}{tg3x}\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)' = 15\ln^4(tg3x)\cdot\frac{1}{\sin 3x\cdot\cos 3x} = 30\frac{\ln^4(tg3x)}{\sin 6x}$.

(7.) $y' = 2\sin\sqrt{\frac{1}{1-x}}\cdot\left[\sin\sqrt{\frac{1}{1-x}}\right]' = 2\sin\sqrt{\frac{1}{1-x}}\cdot\cos\sqrt{\frac{1}{1-x}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{1-x}}\right)' =$

$$= \sin\frac{2}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-\frac{1\cdot(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2} = \sin\frac{2}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}.$$

(8.) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} =$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\cdot\frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}\cdot\left(1+x^2\right)}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left|1-x^2\right|\cdot\left(1+x^2\right)},$$

tj. $y'=\begin{cases}\frac{2}{1+x^2} & \text{za } |x|<1\\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{za } |x|>1\ ,\end{cases}$ (za $|x|$ = 1 derivacija ne postoji).

Zadatak 6.5.

Naći derivaciju funkcije $f(x)=\frac{e^{-x^2}\cdot arcsin\, e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}ln\left(1-e^{-2x^2}\right)$.

Rješenje:

$$f'(x)=\frac{\left[e^{-x^2}\cdot(-2x)arcsin\, e^{-x^2}+e^{-x^2}\cdot\frac{e^{-x^2}(-2x)}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}\right]\sqrt{1-e^{-2x^2}}}{1-e^{-2x^2}}-$$

$$-\frac{e^{-x^2}\cdot arcsin\, e^{-x^2}\cdot\frac{-e^{-2x^2}(-4x)}{2\sqrt{1-e^{-2x^2}}}}{1-e^{-2x^2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2x^2}\cdot(-4x)}{1-e^{-2x^2}},$$

$$f'(x)=\frac{-2xe^{-x^2}\cdot arcsin\, e^{-x^2}\cdot\sqrt{1-e^{-2x^2}}-2xe^{-2x^2}}{1-e^{-2x^2}}+$$

$$+\frac{-2xe^{-3x^2}\cdot arcsin\, e^{-x^2}\left(1-e^{-2x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+2xe^{-2x^2}}{1-e^{-2x^2}}=$$

$$=\frac{-2xe^{-x^2}\cdot arcsin\, e^{-x^2}}{1-e^{-2x^2}}\left(\sqrt{1-e^{-2x^2}}+\frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}\right)=$$

$$\frac{-2xe^{-x^2}\cdot arcsin\, e^{-x^2}}{1-e^{-2x^2}}\cdot\frac{1-e^{-2x^2}+e^{-2x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}},$$

tj.

$$f'(x) = -\frac{2xe^{-x^2} \cdot arcsin\, e^{-x^2}}{\left(1-e^{-2x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Zadatak 6.6.

Dokazati da funkcija $y = \frac{1}{1+x+ln\,x}$ zadovoljava jednadžbu $xy' = y(y\,ln\,x - 1)$.

Rješenje:

Budući je $y' = \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(1+x+ln\,x)^2} = \frac{-(x+1)}{x(1+x+ln\,x)^2}$, to je $x \cdot y' = \frac{-(x+1)}{(1+x+ln\,x)^2}$.

Desna strana zadane jednadžbe je

$$y(y\,ln\,x - 1) = \frac{1}{1+x+ln\,x}\left(\frac{ln\,x}{1+x+ln\,x} - 1\right) = \frac{ln\,x - 1 - x - ln\,x}{(1+x+ln\,x)^2} = \frac{-(x+1)}{(1+x+ln\,x)^2}.$$

Budući su desne strane jednakosti iste slijedi da funkcija *y* zadovoljava zadanu jednadžbu.

6.3. Logaritamsko deriviranje

Funkciju oblika $y=[f(x)]^{g(x)}, \quad f(x)>0$ potrebno je, prije deriviranja, logaritmirati, tj.

$ln\, y = g(x)\cdot ln\, f(x)$. Sada istu deriviramo:

$$(ln\, y)' = g'(x)\cdot ln\, f(x) + g(x)\cdot [ln\, f(x)]' \text{ tj.}$$
$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\cdot ln\, f(x) + g(x)\cdot \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) \text{ i dobivamo:}$$
$$y' = y\cdot\left[g'(x)\cdot \ln f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right] =$$
$$= \left[f(x)\right]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot \ln f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right]$$

Napomena: Istu formulu dobivamo koristeći identitet $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot ln\, f(x)}$, $f(x)>0$.
Naime, derivirajući dobijemo $y' = \left\{[f(x)]^{g(x)}\right\}' = e^{g(x)\cdot ln(x)}\cdot [g(x)\cdot ln\, f(x)]'$, odakle je

$$y' = \left\{[f(x)]^{g(x)}\right\}' = [f(x)]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot ln\, f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right].$$

Primjer 1

Odrediti derivaciju funkcija:

(1.) $f(x) = (cos\, x)^{sin\, x}$; (2.) $f(x) = \left(2+\frac{1}{x}\right)^{3x}$.

Rješenje:

(1.) Iz $f(x) = (cos\, x)^{sin\, x}$ logaritmiranjem dobivamo

$ln\, f(x) = sin\, x\cdot ln(cos\, x)$, pa je

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = (sin\, x)'\cdot ln(cos\, x) + sin\, x\cdot\frac{1}{cos\, x}\cdot (cos\, x)', \text{ odnosno:}$$

$$f'(x) = (cos\, x)^{sin\, x}\cdot [cos\, x\, ln(cos\, x) - tgx\cdot sin\, x].$$

(2.) Iz $f\left(x\right)=\left(2+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ $\Rightarrow$ $\ln f\left(x\right)=3x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$;

$$\frac{1}{f\left(x\right)}\cdot f'\left(x\right)=3\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+3x\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'\left(x\right)=\left(2+\frac{1}{x}\right)^{3x}\left[3\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-\frac{3}{2x+1}\right].$$

Napomena: Logaritmiranjem se može znatno olakšati deriviranje nekih racionalnih funkcija, što ćemo vidjeti u sljedećim primjerima.

Primjer 2

Naći derivaciju funkcija:

(1.) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$; (2.) $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$.

Rješenje:

(1.) Logaritmirajući $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$ dobivamo:

$ln\, f(x)=ln\, x+\frac{2}{3}ln\, x-\frac{1}{3}ln(x^2+1)$. Sada je

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}-\frac{1\cdot 2x}{3(x^2+1)}$, odnosno:

$$f'(x)=x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}\left[\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}-\frac{2x}{3(x^2+1)}\right]=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}\cdot\frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}.$$

(2.) Logaritmirajući $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$ dobivamo:

$ln\, g(x)=\frac{1}{2}ln(x-1)-\frac{2}{3}ln(x+2)-\frac{3}{2}ln(x+3)$, pa je

$$\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)}$$

$$g'(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\cdot\left[\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)}\right].$$

6.4. Derivacija implicitno zadane funkcije

Neka je F funkcija dviju nezavisnih varijabli x i y. Tada se, ako navedeni limesi postoje,

$\frac{\partial F}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}$ naziva ***parcijalnom*** derivacijom funkcije *F* po *x* (*y* se ovdje smatra konstantom). Analogno,

$\frac{\partial F}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta y}$ ***parcijalnom*** derivacijom funkcije *F* po *y* (ovdje se *x* smatra konstantom).

Pravila za parcijalne derivacije (za sve $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ i funkcije *F* i *G* za koje naznačene derivacije postoje):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha F+\beta G)=\alpha\frac{\partial F}{\partial x}+\beta\frac{\partial G}{\partial x}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\alpha F+\beta G)=\alpha\frac{\partial F}{\partial y}+\beta\frac{\partial G}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(F\cdot G)=\frac{\partial F}{\partial x}G+F\frac{\partial G}{\partial x}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}(F\cdot G)=\frac{\partial F}{\partial y}G+F\frac{\partial G}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F}{G}\right)=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}G-F\frac{\partial G}{\partial x}}{G^2}\quad (G\neq 0); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F}{G}\right)=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}G-F\frac{\partial G}{\partial y}}{G^2}\quad (G\neq 0).$$

Postoji interval $I\subseteq R$ koji sadrži točku x_0 i postoji jedinstvena funkcija $f:I\to R$ takva da je

(1.) $f(x_0)=y_0$;

(2.) $F(x,f(x))=0 \quad \forall x\in I$;

(3.) f ima derivaciju f' u svakoj točki $x\in I$. Pored toga vrijedi

$$f'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Napomena: Ako je funkcija $y = f(x)$ zadana u implicitnom obliku, tj. jednadžbom $F(x, y) = 0$ i ako je f derivabilna u točki *x*, tada njezinu derivaciju u toj točki možemo naći i na sljedeći način:

1. deriviramo obje strane jednadžbe $F(x, y) = 0$ (po varijabli *x*) uzimajući u obzir da je *y* funkcija od *x* i da je *y'* derivacija *y* po *x* (jer je *y* funkcija od *x*),
2. dobivenu jednadžbu $\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$ riješimo po y'.

Primjer 1

Odrediti vrijednosti parcijalnih derivacija u točki $T(-2, 1)$ zadanih funkcija:

(1.) $F(x, y) = 7x^3 - 4x^2y^2 + y^2$; (2.) $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

Rješenje:

(1.) Za $F(x, y) = 7x^3 - 4x^2y^2 + y^2$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 21x^2 - 8xy^2$$ (*y* je uzeto kao konstanta),

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -8x^2y + 2y$$ (*x* je uzeto kao konstanta).

Uvrštavanjem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-2, 1) = 21 \cdot 4 - 8 \cdot (-2) \cdot 1 = 100 = \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-2, 1) = -8 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -30 =.$$

(2.) Ako je $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, tada je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(-2, 1) = -\frac{2}{5}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1 \cdot 2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-2, 1) = \frac{1}{5}.$$

Primjer 2

Naći derivaciju funkcije $y = f(x)$ zadane implicitno $8x - 3y + 7 = 0$.

Rješenje:

Dakle, $F(x, y) = 8x - 3y + 7$, pa je

$\frac{\partial F}{\partial x} = 8$, a $\frac{\partial F}{\partial y} = -3$,

$$y' = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}.$$

Primjer 3

Naći derivaciju implicitno zadane funkcije $ln\, x + e^{-\frac{y}{x}} = C$ na dva načina.

Rješenje:

I. Iz $F(x, y) = \ln x + e^{-\frac{y}{x}} - C$ je:

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x} + e^{-\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2}$; i $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{-\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$, pa je

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{x + y \cdot e^{-\frac{y}{x}}}{x^2}}{-\frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{y}{x}}} = \frac{x + ye^{-\frac{y}{x}}}{xe^{-\frac{y}{x}}} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

II. Budući da je

$$\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = C, \qquad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\frac{1}{x} + e^{-\frac{y}{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{x} + e^{-\frac{y}{x}} \cdot \frac{-y' \cdot x + y}{x^2} = 0, \qquad \Big| \cdot x^2$$

$$x + e^{-\frac{y}{x}}(y - y'x) = 0,$$

$$x + ye^{-\frac{y}{x}} = y'x \cdot e^{-\frac{y}{x}},$$

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Primjer 4

Naći derivaciju funkcije $F(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ u točki $T(-1,2)$.

Rješenje:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y) - xy\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y\left(x^2+y^2\right) - xy \cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(-1,2) = \frac{2\left(2^2-(-1)^2\right)}{\left[(-1)^2+2^2\right]^2} = \frac{6}{25}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x\left(x^2+y^2\right) - xy \cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1,2) = \frac{3}{25}.$$

$$y' = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{6}{25}}{\frac{3}{25}} = -2.$$

Zadatak 6.7.

Naći derivacije implicitnih funkcija:

(1.) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$;

(2.) $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$;

(3.) $xy = arctg\dfrac{x}{y}$

Rješenje:

(1.) Iz $F(x,y) = x^3 + x^2y + y^2$ slijedi da je $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2y$, pa je

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}.$$

(2.) Iz $F(x, y) = y^3 - \frac{x-y}{x+y}$ slijedi da je

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-(x+y)+(x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{2y}{(x+y)^2}$ i

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = 3y^2 + \frac{2x}{(x+y)^2} = \frac{3y^2(x+y)^2 + 2x}{(x+y)^2}$, pa je

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{-2y}{(x+y)^2}}{\frac{3y^2(x+y)^2 + 2x}{(x+y)^2}} = \frac{2y}{3y^2(x+y)^2 + 2x}.$$

(3.) Iz $F(x, y) = xy - arctg\frac{x}{y}$ slijedi da je

$\frac{\partial F}{\partial x} = y - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = y - \frac{y}{y^2 + x^2} = \frac{y^3 + x^2 y - y}{y^2 + x^2}$ i

$\frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = x + \frac{x}{y^2 + x^2} = \frac{xy^2 + x^3 + x}{y^2 + x^2}$, pa je

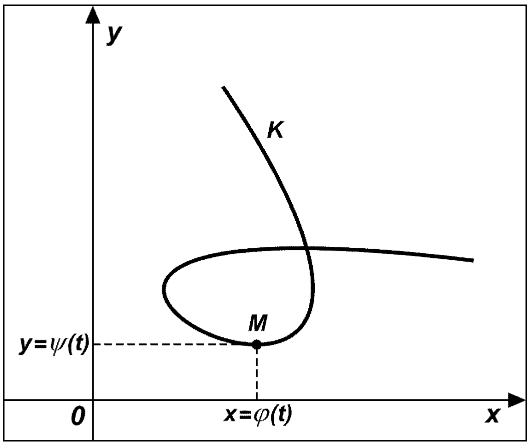
$$y'(x) = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{y^3 + x^2 y - y}{xy^2 + x^3 + x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

6.5. Derivacija parametarski zadane funkcije

Trag materijalne točke T koja se giba u ravnini je krivulja; npr. pravac, parabola, elipsa, hiperbola, cosinusoida, itd. Svaku točku T možemo promatrati kao neko plovilo koje se giba po nekoj putanji (krivulji). U opisivanju takvog gibanja potrebno je u svakom trenutku *t* znati koordinate točke kao funkcije vremena. Označimo li sa $x=\varphi(t)$ i $y=\psi(t)$ koordinate točke T gdje su φ i ψ realne funkcije definirane na nekom intervalu *I* tokom kojeg se gibanje odvija, jasno je da su φ i ψ derivabilne funkcije, jer je sa $v(t)=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$ dana brzina. Dakle, kad vrijeme *t* opiše interval $I \subseteq R$, onda točka T$(\varphi(t),\psi(t))$ prođe bar jedanput kroz svaku točku skupa tj. $K=\{(\varphi(t),\psi(t)) : t \in I\}$.

Parametarske jednadžbe krivulje (*t* nazivamo **parametar**) pišemo u obliku:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \quad t \in I \end{cases}$$



Ako je φ strogo monotona na *I* (znamo da tada postoji inverzna funkcija $t=\varphi^{-1}(x)$) tada ćemo zamjenom varijable *t* sa $\varphi^{-1}(x)$ dobiti $y=\psi(t)=\psi[\varphi^{-1}(x)]=f(x)$.

Po pravilu derivacije kompozicije iz slijedi:

$$y'(x_0)=f'(x_0)=\psi'[\varphi^{-1}(x_0)]\cdot[\varphi^{-1}(x_0)]'=\psi'(t_0)\cdot\frac{1}{\varphi'(t_0)}, \text{ tj. } \qquad f'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Jednostavnije možemo koristiti:

$$y'(x)=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Lako se dokazuje da je

$$f''(x)=\frac{\varphi'(t)\cdot\psi''(t)-\varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}\quad\Rightarrow$$

$$y''(x)=f''(x)=\frac{x'(t)\cdot y''(t)-x''(t)\cdot y'(t)}{\left[x'(t)\right]^3}.$$

Primjer 1

Naći derivaciju funkcije f u točki $x_0 = 3$ koja je parametarski zadana formulama:

$$\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t^3 \end{cases}$$

Rješenje:

Odredimo najprije t_0 kojoj odgovara vrijednost $x_0=3$. Iz $x=2t-1\Rightarrow t=\dfrac{x+1}{2}$, pa je za $x_0=3$; $t_0=\dfrac{3+1}{2}=2$.

Nađimo sada $\varphi'(t)$ i $\psi'(t)$:

$$\varphi'(t)=x'(t)=2 \text{ i } \psi'(t)=y'(t)=3t^2.$$

Primjenom formule slijedi $f'(x_0)=\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$, tj. $f'(3)=\left.\dfrac{3{t_0}^2}{2}\right|_{t_0=2}=6$. Pa je

$$y'=f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3}.$$

Primjer 2

Naći $f'(x)$ i $f''(x)$ za funkciju $y=f(x)$ koja je parametarski zadana jednadžbama:

$$\begin{cases} x=e^t\,cos\,t, \\ y=e^t\,sin\,t. \end{cases}$$

Rješenje:

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{e^t\,sin\,t+e^t\,cos\,t}{e^t\,cos\,t-e^t\,sin\,t}=\frac{sin\,t+cos\,t}{cos\,t-sin\,t}.$$

$$y''(x)=\frac{x'(t)\cdot y''(t)-x''(t)\cdot y'(t)}{\left[x'(t)\right]^3}=$$

$$=\frac{\left(e^t\,cos\,t-e^t\,sin\,t\right)\left(e^t\,sin\,t+e^t\,cos\,t+e^t\,cos\,t-e^t\,sin\,t\right)}{\left(e^t\,cos\,t-e^t\,sin\,t\right)^3}-$$

$$-\frac{\left(e^t\,cos\,t-e^t\,sin\,t-e^t\,sin\,t-e^t\,cos\,t\right)\left(e^t\,sin\,t+e^t\,cos\,t\right)}{\left(e^t\,cos\,t-e^t\,sin\,t\right)^3}=$$

$$=\frac{e^t\left(cos\,t-sin\,t\right)2e^t\,cos\,t+2e^t\,sin\,t\cdot e^t\left(sin\,t+cos\,t\right)}{\left(e^t\right)^3\left(cos\,t-sin\,t\right)^3}=$$

$$=\frac{2e^{2t}\left[cos^2 t-sin\,t\,cos\,t+sin^2 t+sin\,t\,cos\,t\right]}{e^{2t}\cdot e^t\left(cos\,t-sin\,t\right)^3}=\frac{2}{e^t\left(cos\,t-sin\,t\right)^3}.$$

Vježbe

Zadatak 6.8.

Naći $y'(x)$ ako je $\begin{cases} x(t) = a\left(ln\, tg\dfrac{t}{2} + cos\,t - sin\,t\right), \\ y(t) = a(sin\,t + cos\,t). \end{cases}$

Rješenje:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a(cos\,t - sin\,t)}{a\left(\dfrac{1}{tg\dfrac{t}{2}} \cdot \dfrac{1}{cos^2\dfrac{t}{2}} \cdot \dfrac{1}{2} - sin\,t - cos\,t\right)} = \frac{cos\,t - sin\,t}{\left(\dfrac{1}{sin\,t} - sin\,t - cos\,t\right)} =$$

$$= \frac{sin\,t(cos\,t - sin\,t)}{1 - sin^2 t - sin\,t\,cos\,t} = \frac{sin\,t(cos\,t - sin\,t)}{cos^2 t - sin\,t\,cos\,t} == \frac{sin\,t(cos\,t - sin\,t)}{cos\,t(cos\,t - sin\,t)} = tgt\,.$$

Zadatak 6.9.

Naći koeficijent smjera tangente na graf funkcije zadane parametarski:

$$\begin{cases} x(t) = t\ln t, \\ y(t) = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases} \qquad \text{u točki } t_0 = 1\,.$$

Rješenje:

Budući je $y'(t) = \dfrac{\dfrac{1}{t}\cdot t - \ln t}{t^2} = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$, a $x'(t) = \ln t + 1$,

to je $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{1 - \ln t}{t^2(\ln t + 1)}$, pa je

$$k_t = y'(x)\Big|_{t_0 = 1} = \frac{1 - \ln 1}{1^2(\ln 1 + 1)} = 1\,.$$

Zadatak 6.10.

Naći $y'(x)$ za funkciju zadanu parametarski:

$$\begin{cases} x(t) = arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y(t) = arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$$

Rješenje:

Budući su

$$y'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+t^2} - t\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{1+t^2}\left(1+t^2-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$x'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{1+t^2}}} \cdot \frac{-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2-1}} \cdot \frac{t}{\left(1+t^2\right)\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{|\,t\,|\cdot\left(1+t^2\right)}.$$

Dobiva se $$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t}{|t|}\dfrac{1}{1+t^2}} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & \text{za } t>0 \\ -1 & \text{za } t<0 \end{cases}.$$

Zadatak 6.11.

Naći drugu derivaciju $y''(x)$ funkcija:

(1.) $\begin{cases} x(t) = a(sin\,t - t\,cos\,t), \\ y(t) = a(cos\,t + t\,sin\,t), \end{cases}$ (2.) $\begin{cases} x(t) = a\,cos^3 t, \\ y(t) = a\,sin^3 t. \end{cases}$

Rješenje:

(1.) $x'(t) = a[cos\,t - cos\,t - t(-sin\,t)] = at\,sin\,t$,

$y'(t) = a[-sin\,t + sin\,t + t\,cos\,t] = at\,cos\,t$.

Pa je $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{at\,cos\,t}{at\,sin\,t} = ctgt$. Slijedi

$$y''(x) = \frac{\dfrac{d}{dt}[y'(x)]}{x'(t)} = \frac{-\dfrac{1}{sin^2 t}}{at\,sin\,t} = -\frac{1}{at\,sin^3 t}.$$

(2.) $x'(t)=3a\cos^2 t(-\sin t)$,
$y'(t)=3a\sin^2 t(\cos t)$.

Pa je $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=-\dfrac{\sin t}{\cos t}=-tgt$. Slijedi

$$y''(x)=\frac{\frac{d}{dt}[y'(x)]}{x'(t)}=\frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

Zadatak 6.12.

Dokazati da funkcija $y=f(x)$ zadana parametarski

$\begin{cases} x(t)=2t+3t^2 \\ y(t)=t^2+2t^3 \end{cases}$ zadovoljava jednadžbu $2(y')^3+(y')^2-y=0$, $\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Rješenje:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2t+6t^2}{2+6t}=t.$$

Ako y' uvrstimo u jednadžbu $2(y')^3+(y')^2-y=0$, dobivamo

$$2t^3+t^2-(t^2+2t^3)\equiv 0$$

6.6. Tangenta i normala na graf funkcije

Neka je krivulja zadana s formulom $y = f(x)$, pri čemu je f derivabilna funkcija. Sekanta krivulje $y = f(x)$ koja prolazi točkama $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$, pri čemu je $x_0 \neq x$, je pravac s koeficijentom $tg\varphi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

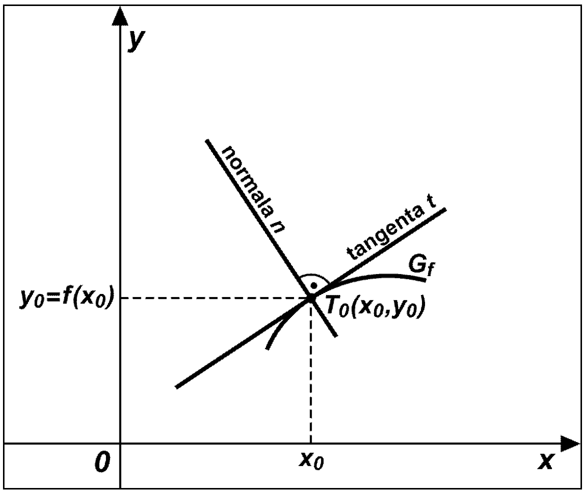
Kada $x \to x_0$, tada sekanta teži k tangenti krivulje $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$, čiji je koeficijent smjera jednak $tg\varphi_0$. Očito vrijedi: $x \to x_0 \Rightarrow tg\varphi \to tg\varphi_0 = f'(x_0)$. Stoga je:

jednadžba tangente na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$, gdje je $y_0 = f(x_0)$, a $f'(x_0) = k \in R$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);$$

dok je ***jednadžba normale*** (okomice na tangentu) u toj točki:

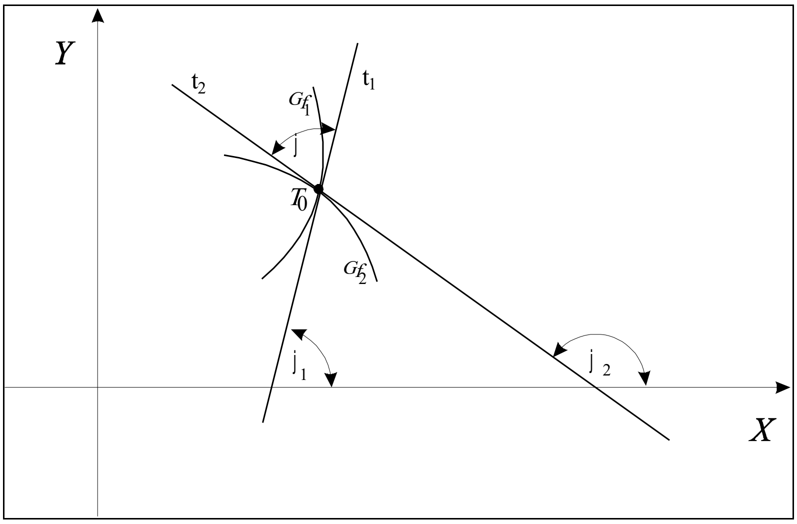
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



Kut φ pod kojim se sijeku grafovi funkcija $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ u točki $T_0(x_0, y_0)$ je kut između njihovim tangenata u toj točki, a izračunavamo ga prema formuli:

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 tg\varphi_2} = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

To je onaj kut za kojega treba zarotirati tangentu t_1 funkcije f_1 u pozitivnom smjeru (suprotno kretanju kazaljke na satu) oko njihove zajedničke točke da bi se poklopila s tangentom t_2 funkcije f_2 (vidi sliku).



Primjer 1

Naći jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x)=x^3-3x+2$ u točki čija je apscisa $x_0=2$.

Rješenje:

Ako uvrstimo $x_0=2$ u formulu kojom je zadana funkcija, dobit ćemo ordinatu točke T_0, tj. $y_0=f(x_0)=f(2)=4$. Sada tražimo jednadžbu tangente i normale u točki $T_0(2,4)$. Nađimo derivaciju funkcije u točki $x_0=2$:

$$f'(x)=3x^2-3 \quad \Rightarrow \quad f'(2)=9.$$

Jednadžba tangente: $y-4=9(x-2)$ ili

$$9x-y-14=0.$$

Jednadžba normale: $y-4=-\frac{1}{9}(x-2)$ ili

$$x+9y-38=0.$$

Primjer 2

Naći kut pod kojim se sijeku funkcije $y=4-\frac{x^2}{2}$ i $y=4-x$.

Rješenje:

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

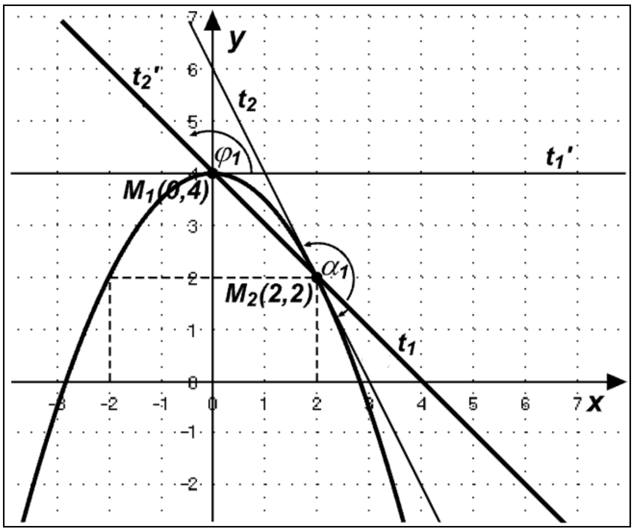
Kut φ pod kojim se sijeku grafovi funkcija f_1 i f_2 u točki presjeka $M_1(x_1, y_1)$ računa se po poznatoj formuli

$$tg\varphi = \frac{f_2'(x_1) - f_1'(x_1)}{1 + f_1'(x_1) f_2'(x_1)}.$$

Točke presjeka danih funkcija dobijemo rješavajući sustav jednadžbi:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 4 - \dfrac{x^2}{2} \\ y = 4 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 0, & y_1 = 4, \\ x_2 = 2, & y_2 = 2, \end{array}\right.$$

odnosno $M_1(0,4); M_2(2,2)$. (vidi sliku)



Kut u točki $M_1(0,4)$ dobijemo uvrštavajući točku u $f_1'(x) = -x$ i $f_2'(x) = -1$; pa je $f_1'(0) = 0$ i $f_2'(0) = -1$. Dakle, $tg\varphi_1 = \dfrac{f_2'(0) - f_1'(0)}{1 + f_1'(0) \cdot f_2'(0)} = -\dfrac{1}{1} = -1 \Rightarrow \varphi_1 = 135°$.

Analogno, dobijemo kut u točki $M_2(2,2)$. Neka je t_1 jednadžba pravca, a t_2 jednadžba tangente u točki M_2 na funkciju $y = 4 - \dfrac{x^2}{2}$, tj. $f_1'(x) = -1$ a $f_2'(x) = -x$: pa je $f_1'(2) = -1$ i $f_2'(2) = -2$. Dakle, $tg\alpha_1 = \dfrac{f_2'(2) - f_1'(2)}{1 + f_1'(2) \cdot f_2'(2)} = \dfrac{-2+1}{1+(-1)(-2)} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$. $\alpha_1 = 161°33'54''$

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Vježbe

Zadatak 6.13.

Naći jednadžbu tangente i normale na funkcije u zadanim točkama:

(1.) $f(x) = 2x^2 - x + 5$ u točki $T_0\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$;

(2.) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ u točki $T_0(-2, 5)$;

(3.) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ u točki s apscisom $x_0 = 1$.

Rješenje:

(1.) $f(x) = 2x^2 - x + 5$; $T_0\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$. Nađimo derivaciju funkcije u točki $x_0 = -\frac{1}{2}$:

$$f'(x) = 4x - 1 \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$$

Jednadžba tangente kroz točku $T_0(x_0, f(x_0))$ općenito ima oblik:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, te je za danu funkciju jednadžba tangente:

$y - 6 = -3\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ili $2y + 6x - 9 = 0$.

Jednadžba normale kroz točku $T_0(x_0, f(x_0))$ ima oblik:

$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, te je

$y - 6 = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ili $6y - 2x - 37 = 0$.

(2.) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$; $T_0(-2, 5)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 \Rightarrow f'(-2) = 0.$$

Jednadžba tangente je $y - 5 = 0$, a jednadžba normale $x + 2 = 0$.

Napomena: Ako je $f'(x_0)=0$ tada je jednadžba tangente $y=f(x_0)$ (to je pravac paralelan s x-osi i prolazi točkom $T_0(x_0, f(x_0))$, a jednadžba normale je $x=x_0$.

(3.) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ u točki s apscisom $x_0=1$.

Budući da je $y_0=f(x_0)=0$, treba naći jednadžbu tangente i normale koje prolaze točkom $T_0(1,0)$. Derivacija funkcije $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ u točki $x_0=1$ je

$$f'(x)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f'(x_0)=f'(1) \text{ ne postoji, tj.}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1} f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left[3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]}=\infty .$$

Jednadžba tangente je $x-1=0$ a normale $y=0$.

Napomena: Ako $f'(x_0)\to\infty$ kad $x\to 1$ tada jednadžba normale glasi $y-f(x_0)=0$ te je tangenta $x-x_0=0$.

Zadatak 6.14.

Odrediti sjecište tangenti na krivulju $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ u točkama za koje je $y=1$.

Rješenje:

Iz uvjeta zadatka je

$$\frac{1+3x^2}{3+x^2}=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{cases}, \text{ tj. } T_1(-1,1) \text{ i } T_2(1,1).$$

Nađemo vrijednosti derivacije funkcije u točkama T_1 i T_2. Iz $y'(x)=\dfrac{16x}{(3+x^2)^2}$ je

$k_1=y'(-1)=-1$; $k_2=y'(1)=1$, pa je

$t_1: y-1=-1(x+1) \Rightarrow y=-x$, a

$t_2: y-1=1(x-1) \Rightarrow y=x$.

Dakle, sjecište tangenti na danu krivulju je $S(0,0)$.

Zadatak 6.15.

Naći jednadžbu normale na graf funkcije $f(x) = x\ln x$ koja je paralelna pravcu $2x - 3y + 3 = 0$.

Rješenje:

Da bi normala na graf zadane funkcije u x_0 bila paralelna s pravcem *p*, mora vrijediti $k_p = -\frac{1}{f'(x_0)}$, gdje je k_p koeficijent smjera pravca *p*. Iz derivacije zadane funkcije je

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \text{ te je}$$

$$f'(x_0) = \ln x_0 + 1.$$

Iz $\quad y = \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow k_p = \frac{2}{3}$: pa je

$$-\frac{1}{\ln x_0 + 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\ln x_0 + 2 = -3 \Rightarrow \ln x_0 = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_0 = e^{-\frac{5}{2}}.$$

Budući je $y_0 = f(x_0) = f\left(e^{-\frac{5}{2}}\right) = e^{-\frac{5}{2}} \cdot \ln e^{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}}$, graf zadane funkcije ima normalu paralelnu pravcu $2x - 3y + 3 = 0$ u točki $T_0\left(e^{-\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2e^{\frac{5}{2}}}\right)$, te je jednadžba tražene normale:

$$y + \frac{5}{2e^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{3}\left(x - e^{-\frac{5}{2}}\right) \text{ ili } y = \frac{2}{3}x - \frac{19}{6e^{\frac{5}{2}}}.$$

Zadatak 6.16.

Na grafu funkcije $f(x) = x^2 - 2x + 5$ naći onu točku u kojoj je tangenta okomita na pravac $y = x$.

Rješenje:

Da bi tangenta na graf zadane funkcije u x_0 bila okomita s pravcem *p*, mora vrijediti $f'(x_0) = -\frac{1}{k_p}$, gdje je k_p koeficijent smjera pravca *p*. Iz derivacije zadane funkcije $f'(x) = 2x - 2$ slijedi da je $f'(x_0) = 2x_0 - 2$.

Iz $y = x$ slijedi da je $k_p = 1$, pa je $2x_0 - 2 = -1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Budući je $y_0 = f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2} + 5 = \frac{17}{4}$, graf zadane funkcije ima tangentu okomitu na pravac $y = x$ u točki $T_0\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}\right)$.

Zadatak 6.17.

Naći kut pod kojim graf funkcije $f(x) = arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ siječe *x*- os.

Rješenje:

Kut pod kojim graf funkcije *f* siječe *x*-os je kut kojega tangenta u toj točki zatvara s pozitivnim smjerom *x*-osi. Traženi kut φ dobivamo kao rješenje trigonometrijske jednadžbe $f'(x_0) = k_t = tg\varphi$, gdje je x_0 nulište funkcije *f*.

x_0 dobivamo rješavajući jednadžbu

$$arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x_0 = -1.$$

Znamo da je

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 + (x+1)^2}, \text{ pa je}$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = -1.$$

Slijedi $tg\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Zadatak 6.18.

Naći jednadžbe tangente i normale u točki $T(1,1)$ na graf funkcije zadane implicitno jednadžbom $x^5 + y^5 - xy - 1 = 0$.

Rješenje:

Označimo li $F(x, y) = x^5 + y^5 - xy - 1$, tada je $F(1,1) = 0$ i

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 5y^4 - x\Big|_{(1,1)} = 4 \neq 0, \text{ pa je}$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{5x^4 - y}{5y^4 - x} \Rightarrow f'(1) = -1.$$

Dakle, jednadžba tangente je: $y - 1 = -1(x - 1)$ ili $y + x - 2 = 0$.

Jednadžba normale: $y - 1 = -\frac{1}{-1}(x - 1)$ ili $y - x = 0$.

Zadatak 6.19.

Naći jednadžbu tangente i normale na krivulju zadanu parametarski:

$$\begin{cases} x(t) = & ln(cos\, t) + 1, \\ y(t) = & tgt + ctgt, \quad \text{u} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Rješenje:

Za vrijednost parametra $t_0 = \frac{\pi}{4}$ je

$$x_0 = x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\cos\frac{\pi}{4} + 1 = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \text{ a}$$

$$y_0 = y(t_0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = tg\frac{\pi}{4} + ctg\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2.$$

Trebamo odrediti jednadžbu tangente i normale u točki $T_0\left(ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, 2\right)$.

Budući je

$$y'(x) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \left.\frac{\frac{1}{cos^2 t} - \frac{1}{sin^2 t}}{-\frac{sin\, t}{cos\, t}}\right|_{t_0 = \frac{\pi}{4}} = 0, \text{ tj. } k_t = 0,$$

tangenta je paralelna s *x*-osi, a normala paralelna s *y*-osi *Y* u točki T_0, pa je

$$t: \quad y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2, \text{ a}$$

$$n: \quad x - ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x = ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 1.$$

Zadatak 6.20.

Naći jednadžbu tangente i normale u točki (0, 0) na krivulju zadanu parametarski:

$$\begin{cases} x(t) = t\,ln\,t, \\ y(t) = \dfrac{ln\,t}{t}, \end{cases}$$

Rješenje:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x(t_0) = 0 \Rightarrow \quad t_0\,ln\,t_0 = 0 \\ y_0 &= y(t_0) = 0 \Rightarrow \quad \frac{ln\,t_0}{t_0} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_0 = 1$$ (parametar $t_1 = 0$ nije iz domene zadanih funkcija pa ga ne uzimamo u obzir).

$$k_t = y'(x)\big|_{t_0=1} = \left.\frac{1 - ln\,t}{t^2(1 + ln\,t)}\right|_{t_0=1} = 1.$$

Sada se lako dobije da je jednadžba tražene tangente $y = x$, a jednadžba normale $y = -x$.

6.7. Primjena derivacija u određivanju limesa funkcija

Tipičan zahtjev pri određivanju granične vrijednosti ili limesa funkcije bilo kad $x \to c \in R$ ili kad $x \to \pm\infty$ javlja se kada je funkcija zadana u obliku umnoška ili kvocijenta dviju funkcija *f* i *g*. Međutim, često dobijemo umnožak ili produkt koji nije definiran i na koji onda ne možemo primijeniti već poznate teoreme o graničnim vrijednostima funkcija. Proširenje istih dao je G.F.A. de L`Hospital, pa često kažemo da ***pri određivanju limesa funkcija neodređenih oblika***, ***kao što su:*** $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 ***primjenjujemo*** tzv. ***L'Hospitalovo pravilo.***

Napomena: Neodređeni oblici $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ rješavaju se pomoću L'Hospitalovog pravila, a ostali neodređeni oblici se pomoću odgovarajućih transformacija svode na jedan od ova dva oblika.

Teorem (L`Hospitalovo pravilo):

Neka su f i g derivabilne funkcije u okolini točke $c \in R$ pri čemu je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$.

Ako postoji $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in R$, tada postoji i $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ i vrijedi da je

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Specijalno, ako su f' i g' neprekidne funkcije u točki c i $g'(c) \neq 0$, tada je $L = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Napomena:

i) L'Hospitalovo pravilo vijedi i kada $x \to \pm\infty$, za neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$ te za limese i derivacije slijeva ili zdesna.

ii) L'Hospitalovo pravilo se može primijeniti više puta uzastopce ako se ponovo dobije jedan od neodređenih oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$

Primjer 1

Naći limese:

(1.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{3x}$; (2.) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$.

Rješenje:

$$(1.)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{7x}-1\right)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7e^{7x}}{3}=\frac{7}{3};$$

$$(2.)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Primjer 2

Naći limese:

$$(1.)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3};\qquad (2.)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x}.$$

Rješenje:

$$(1.)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(3x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6};$$

$$(2.)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

- Za *neodređeni oblik* $0\cdot\infty$ koristimo transformaciju

$$\lim_{x\to c}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad ili\quad \lim_{x\to c}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

i svodimo na već poznati oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Primjer 3

Naći limese:

(1.) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; (2.). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(1-\sin x)\cdot ctgx\right)$

Rješenje:

(1.) $$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\left[0\cdot(-\infty)\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0;$$

(2.) $$\lim_{x\to 0}\left(\ln(1-\sin x)\cdot ctgx\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{\frac{1}{ctgx}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(1-\sin x)\right)'}{\left(\frac{1}{ctgx}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-\sin x}\cdot(1-\sin x)'}{(tgx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^3 x}{1-\sin x}=\frac{-1}{1}=-1.$$

- Za <u>*neodređeni oblik* $\infty-\infty$</u> koristimo odgovarajuću transformaciju tako da u slučaju
  - i) da izlučimo jedan član izraza, svodimo taj oblik na neodređeni oblik $0\cdot\infty$, a zatim na već poznati oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$;
  - ii) da ga možemo svesti na zajednički nazivnik, odmah svodimo na poznati oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Primjer 4

Naći limese:

(1.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)$; (2.) $\lim\limits_{x\to -2}\left[\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\ln(x+3)}\right]$.

Rješenje:

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=[\infty\cdot 0]\;=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

(1.) ;

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$$

(2.) $\lim\limits_{x\to -2}\left[\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\ln(x+3)}\right]=[\infty-\infty]=\left[\begin{array}{c}\text{ovdje svodimo izraz na}\\ \text{zajednički nazivnik}\end{array}\right]=$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{ln(x+3)-x-2}{(x+2)ln(x+3)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x+3}-1}{ln(x+3)+\frac{x+2}{x+3}}=$$

$$=-\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+3)ln(x+3)+(x+2)}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to -2}\frac{1}{ln(x+3)+\frac{x+3}{x+3}+1}=-\frac{1}{2}.$$

- Neodređeni izrazi oblika 1^{∞}, 0^0, ∞^0 svode se na neodređeni oblik $0\cdot\infty$ pomoću prethodnog logaritmiranja ili koristeći identitet:
- $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)ln\,f(x)}$, $f(x)>0$.

Primjer 5

Naći limese:

(1.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$; (2.) $\lim\limits_{x\to 0^{+0}}x^x$; (3.) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-0}}(tgx)^{ctgx}$.

Rješenje:

(1.)

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^{2x}+x\right)}=e^L,\ \text{gdje je}$$

$$\mathrm{L}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{2x}+x\right)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\;=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{2x}+x}\left(2e^{2x}+1\right)=3.\quad \text{Sada je}\ \lim_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}=e^L=e^3;$$

(2.)

$$\lim_{x\to 0^{+0}} x^x = \left[0^0\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0^{+0}}(x\ln x)} = e^L \text{, gdje je}$$

$$L = \lim_{x\to 0^{+0}}(x\ln x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^{+0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^{+0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0. \quad \text{Sada je } \lim_{x\to 0^{+0}} x^x = e^L = e^0 = 1;$$

(3.)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{-0}} (tgx)^{ctgx} = \left[\infty^0\right] = e^{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^{-0}} ctgx\cdot\ln(tgx)} = e^L,\ \text{gdje je}$$

$$L = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{-0}}\left[ctgx\ln(tgx)\right] = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{-0}} \frac{\ln(tgx)}{tgx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{-0}} \frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{-0}} ctgx = 0. \text{ Sada je } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^{-0}} (tgx)^{ctgx} = e^L = e^0 = 1.$$

Vježbe

Zadatak 6.21.

Naći limese:

(1.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{2x}$;

(2.) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}}{x^3}$;

(3.) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\frac{1}{3}ln\frac{x+1}{x-1}}$

(4.) $\lim\limits_{x\to 0^{+0}}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}}$.;

Rješenje:

(1.) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{5x}-1\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5e^{5x}}{2}=\frac{5}{2};$$

(2.) $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{x}\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{3x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{x}\right)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{6x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{x}\right)'}{(6x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{6}=\infty;$$

(3.) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{x-1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)'}{\left(\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{3\left(x^2-1\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\left(x^2-1\right)}{2\left(x^2+1\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[3\left(x^2-1\right)\right]'}{\left[2\left(x^2-1\right)\right]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x)'}{(4x)'}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2};$$

(4.) $$\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1(2-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}=\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}}{\frac{1-x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{\sqrt{2-x}}{2(1-x)\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zadatak 6.22.

Naći limese:

(1.) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$; (2.) $\lim\limits_{x\to a}\left[\arcsin\frac{x-a}{a}\cdot ctg(x-a)\right]$.

Rješenje:

(1.) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2}$;

(2.) $\lim\limits_{x\to a}\left[\arcsin\frac{x-a}{a}\cdot ctg(x-a)\right]=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to a}\frac{\arcsin\frac{x-a}{a}}{tg(x-a)}=$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to \alpha}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}}{\frac{1}{\cos^2(x-a)}}=\frac{1}{a}\cdot\lim\limits_{x\to \alpha}\frac{\cos^2(x-a)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}=\frac{1}{a}.$$

Zadatak 6.23.

Naći limese:

(1.) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{ctgx}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$; (2.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$;

(3.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$.

Rješenje:

(1.) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{\cos x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\,sin\,x+2x\,cos\,x}{2(-sin\,x)}=\frac{2}{-2}=-1.$

(2.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{2x\,sin\,x+x^2\,cos\,x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,x}{2\,sin\,x+2x\,cos\,x+2x\,cos\,x+x^2(-sin\,x)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x+4\cos x+4x(-\sin x)-2x\sin x-x^2\cos x}=\frac{1}{6}.$$

(3.) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)=[\infty-\infty]\;=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2ctg^2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\sin x+x\cos x)}{x^2\sin x\cdot\sin x};$$

Budući je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x+\cos x+x(-\sin x)}=\frac{1}{3},$$

i

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=2,$$

to je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\right)\cdot\left(\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\right)=\frac{2}{3}.$$

Zadatak 6.24.

Naći limese:

(1.) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$;

(2.) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(3.) ; $\lim_{x\to 1}\left(tg\frac{\pi\cdot x}{4}\right)^{tg\frac{\pi\cdot x}{2}}$;

(4.) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$;

(5.) $\lim\limits_{x\to 0^{+0}} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$;

(6.) $\lim\limits_{x\to 0^{+0}} (ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(7.) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;

(8.) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje:

(1.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos\right)^{\frac{1}{x}} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)} = e^L$, gdje je

$$\mathrm{L} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\pi}{2\arccos x}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\right)\right] = -\frac{2}{\pi};$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

(2.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = e^L$, gdje je

$$\mathrm{L} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{6x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = -\frac{1}{6};$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

(3.) $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[tg\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)\right]} = e^L$, gdje je

$$L=\lim_{x\to 1}\left[tg\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)\right]=[\infty\cdot 0]\quad=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)}{ctg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{tg\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{1}{cos^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}}{-\frac{1}{sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{2\,sin^2\frac{\pi x}{2}}{2\,sin\frac{\pi x}{4}\cdot cos\frac{\pi x}{4}}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{sin^2\frac{\pi x}{2}}{sin\frac{\pi x}{2}}=-\lim_{x\to 1}\left(sin\frac{\pi x}{2}\right)=-1\,;$$

$$\lim_{x\to 1}\left(tg\frac{\pi\cdot x}{4}\right)^{tg\frac{\pi\cdot x}{2}}=e^{-1}$$

(4.) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}=\left[1^\infty\right]=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[tgx\ln(\sin x)\right]}=e^L$, gdje je

$$\mathrm{L}\;=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[tgx\cdot\ln(\sin x)\right]=[\infty\cdot 0]\;=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{ctgx}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{sin\,x}\cdot cos\,x}{-\frac{1}{sin^2 x}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[cos\,x\cdot sin\,x]=0\,;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}=e^0=1$$

(5.) $\lim\limits_{x\to 0^{+0}}x^{\frac{3}{4+\ln x}}=\left[0^0\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0^{+0}}\frac{3}{4+\ln x}\cdot\ln x}=e^L$, gdje je

$$\mathrm{L}\;=\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{3\ln x}{4+\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\;=\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}=3\,;$$

$$\lim_{x\to 0^{+0}}x^{\frac{3}{4+\ln x}}=e^3$$

(6.) $\lim\limits_{x\to 0^{+0}}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}=\left[\infty^0\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0^{+0}}\left[\frac{1}{\ln x}\ln(ctgx)\right]}=e^L$, gdje je

$$L=\lim_{x\to0^{+0}}\frac{\ln(ctgx)}{\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0^{+0}}\frac{\frac{1}{ctgx}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=-\lim_{x\to0^{+0}}\frac{x}{\cos x\sin x}=-\lim_{x\to0^{+0}}\frac{2x}{\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to0^{+0}}\frac{2}{\cos 2x\cdot 2}=-1;$$

$$\lim_{x\to0^{+0}}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$$

(7.) $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=\left[0^0\right]=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(e^x-1)}\cdot\ln x\right]}=e^L$, gdje je

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{xe^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=1;$$

$$\lim_{x\to0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=e^1=e$$

(8.) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+\sin x)}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\frac{1}{1+\sin x}\cdot\cos x}{1}\right]}=e^1=e.$

6.8. Ispitivanje toka i crtanje grafa neprekidne realne funkcije

Ispitivanje toka neprekidne realne funkcije f koja je zadana analitički, tj. formulom, sastoji se od sljedećih koraka:

1. Područje definicije (prirodna domena), parnost i periodičnost

Da bi se odredila prirodna domena D_f zadane funkcije f potrebno je poznavati osnovne elementarne funkcije i postupke za rješavanje jednadžbi ili nejednadžbi.

Funkcija f je

- parna ako je $f(-x)=f(x)$ za svaki $x\in D_f$;

ako je f parna funkcija, onda je njen graf simetričan s obzirom na os y pa je dovoljno ispitati tok funkcije f samo na skupu $D_f\cap\left[0,+\infty\right\rangle$;

- neparna ako je $f(-x)=-f(x)$ za svaki $x\in D_f$;

ako je f neparna funkcija, onda je njen graf centralno simetričan s obzirom na ishodište pa je dovoljno ispitati tok funkcije f samo na skupu $D_f\cap\left[0,+\infty\right\rangle$;

- periodična (trigonometrijske funkcije) ako postoji $P\neq 0$ takav da za svaki $x\in D_f$ vrijedi $f(x+P)=f(x)$;

ako je f periodična funkcija sa temeljnim ili osnovnim periodom *P* (najmanji pozitivni broj) onda je dovoljno ispitati tok funkcije f samo na skupu $D_f\cap\left[-\frac{P}{2},\frac{P}{2}\right]$.

2. Sjecišta ili dirališta s koordinatnim osima

- Nul-točke funkcije tj. točke u kojima graf funkcije siječe *x*-os: $S_x(x, 0)$;

Rješava se jednadžba $f(x)=0$. Ako jednadžba $f(x)=0$ nema rješenja, onda funkcija f nema nul-točaka. Jednadžba $f(x)=0$ može imati više rješenja, tj. funkcija f može imati više nul-točaka (može ih biti čak beskonačno mnogo).

- Ako je $0\in D_f$ određuje se sjecište grafa funkcije sa *y*-osi tj. dirališna točka $S_y\left(0,f(0)\right)$

Ako $0\notin D_f$, onda takva točka ne postoji.

3. Asimptote (vertikalna, horizontalna, kosa)

Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu funkcije i tog pravca teži k nuli kada točka na grafu odmiče u beskonačnost. Funkcija može (ali i ne mora) imati vertikalne, horizontalne i kose asimptote. Asimptote obično crtamo isprekidanim linijama.

- Neka je $a \in R$ Kažemo da je pravac $x = a$ desna vertikalna asimptota funkcije f ako je
$$\lim_{x \to a^{+0}} f(x) = \infty \text{ ili } \lim_{x \to a^{+0}} f(x) = -\infty.$$
Analogno, pravac $x = a$ je lijeva vertikalna asimptota funkcije f ako je
$$\lim_{x \to a^{-0}} f(x) = \infty \text{ ili } \lim_{x \to a^{-0}} f(x) = -\infty.$$

- Pravac $y = b$ je desna horizontalna asimptota funkcije f ako je
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \in R.$$
Analogno, pravac $y = c$ je lijeva horizontalna asimptota funkcije f ako je
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \in R.$$

- Pravac $y = k_1 x + l_1$ je desna kosa asimptota funkcije f ako je
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k_1 \in R \setminus \{0\} \text{ i } \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - k_1 x \right] = l_1 \in R$$
Analogno, pravac $y = k_2 x + l_2$ je lijeva kosa asimptota funkcije f ako je
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2 \in R \setminus \{0\} \text{ i } \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - k_2 x \right] = l_2 \in R\,.$$

Napomena:
1) Funkcija f može imati vertikalnu asimptotu $x = a$ samo ako je a točka na rubu domene D_f u kojoj funkcija nije definirana.
2) Funkcija f može imati više (čak beskonačno mnogo) vertikalnih asimptota.
3) Funkcija f ne može imati horizontalnu i kosu asimptotu na istoj strani grafa tj. postojanje desne horizontalne asimptote isključuje postojanje desne kose asimptote i postojanje lijeve horizontalne asimptote isključuje postojanje lijeve kose asimptote (vrijedi i obrnuto). Ipak, funkcija f može imati lijevu horizontalnu i desnu kosu ili desnu horizontalnu i lijevu kosu asimptotu.

4. Intervali monotonosti (rast i pad) i točke lokalnih ekstrema (minimum i maksimum)

Poopćenje najvažnijeg teorema diferencijalnog računa tj. **Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti** dao je Cauchy, a za posljedicu imaju da se o svojstvu funkcije f može prosuđivati na osnovu svojstva njene derivacije f' tj.

Teorem o monotonosti derivabilne funkcije: Neka je $f: I \to R$ derivabilna funkcija na intervalu $I = \langle a,b \rangle$, a njezina derivacija f' neprekidna na *I*. Ako je u točki $x_0 \in I$ derivacija $f'(x_0) > 0$, tada funkcija f strogo raste u nekoj okolini točke x_0 (vrijedi i obrat), a ako je $f'(x_0) < 0$, tada funkcija f strogo pada u okolini točke x_0 (vrijedi i obrat).

Ako lijevo od x_0 derivabilna funkcija f raste i $f'(x) > 0$, desno od x_0 funkcija f pada i $f'(x) < 0$, tada u točki x_0 funkcija f je ***stacionarna*** i $f'(x_0) = 0$. Međutim, vrijedi općenito: kažemo da je točka x_0 stacionarna za funkciju f ako je f u točki x_0 derivabilna i ako je $f'(x_0) = 0$.

Teorem o ekstremu: *Neka je $f: R \to R$ derivabilna na intervalu $I = \langle a,b \rangle$.*

Ako je $f'(x_0) = 0$ i ako postoji $\delta > 0$ (δ - okolina točke x_0), takva da za $(x \in \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle) \Rightarrow (f'(x) > 0)$ i $(x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle) \Rightarrow (f'(x) < 0)$, onda f u točki x_0 ima strogi lokalni maksimum, a

ako je $f'(x_0) = 0$ i ako postoji $\delta > 0$ takva da $(x \in \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle) \Rightarrow (f'(x) < 0)$ i $(x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle) \Rightarrow (f'(x) > 0)$, onda f u točki x_0 ima strogi lokalni minimum.

Napomena: Lokalni minimum i lokalni maksimum jednim imenom zovemo lokalni ekstrem.

Na osnovu ova dva teorema, *postupak ispitivanja intervala monotonosti i strogih lokalnih ekstrema* zadane funkcije, bio bi sljedeći:

1. Nakon što odredimo domenu funkcije, nađemo $f'(x)$;
2. Riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$ i dobijemo tzv. stacionarne točke.
   (Točke u kojima je $f'(x) = 0$ ili $f'(x) = \pm\infty$ ili $f'(x)$ ne postoji nazivamo kritične točke);
3. U svakom od intervala, lijevo i desno od dobivenih točaka izaberemo najpovoljniju točku x_t za računanje i izračunamo $f'(x_t)$. Sjetimo se; ako je $f'(x_t) > 0$ funkcija raste, a ako je $f'(x_t) < 0$ funkcija pada na tom intervalu.
4. Ako f' mijenja predznak prilikom prijelaza iz jednog intervala u drugi interval, onda zadana funkcija u stacionarnoj točki ima lokalni ekstrem i to maksimum (odnosno minimum) ako je vrijednost f' lijevo od stacionarne točke pozitivna (odnosno negativna), a desno negativna (odnosno pozitivna).

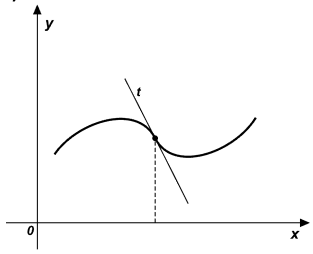
Teorem (*Specijalan slučaj za ispitivanje ekstrema*)**:** *Neka je x_0 stacionarna točka funkcije $f: I \to R$, $I \subseteq R$ tj. $f'(x_0) = 0$. Ako je točki x_0 funkcija dva puta derivabilna i $f''(x_0) \neq 0$, onda funkcija f u točki x_0 ima: lokalni maksimum ako je $f''(x_0) < 0$, a lokalni minimum ako je $f''(x_0) > 0$.*

Teorem (*Opći slučaj*): *Neka je* $f: I \to R$ *k puta derivabilna funkcija na I, k* ≥ 2. *Ako je* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0, \ldots, f^{(k-1)}(x_0)=0$ *i* $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, *tada funkcija f u točki* x_0 *ima lokalni ekstrem za k-parno, i to: lokalni maksimum ako je* $f^{(k)}(x_0)<0$ *i lokalni minimum ako je* $f^{(k)}(x_0)>0$. *Ako je k-neparan broj, tada funkcija nema lokalni ekstrem u točki* x_0.

5. Intervali zakrivljenosti (konveksnost i konkavnost) i točke infleksije

Funkcija f je konveksna (odnosno konkavna) na nekom otvorenom intervalu ako i samo ako je njezin graf iznad (odnosno ispod) tangente u proizvoljnoj točki tog intervala.

Točka iz domene funkcije u kojoj funkcija prelazi iz konveksne u konkavnu ili obratno zove se točka infleksije ili pregiba (vidi sliku).



Teorem: *Neka funkcija* $f: I \to R$ *ima neprekidnu drugu derivaciju* f'' *na intervalu I.*
Funkcija f je konveksna (strogo konveksna) na I, ako i samo ako je $f''(x)\geq 0$ ($f''(x)>0$) *za svako* $x \in I$.
Funkcija f je konkavna (strogo konkavna) na I, ako i samo ako je $f''(x)\leq 0$ ($f''(x)<0$) *za svako* $x \in I$.

Postupak za pronalaženje intervala zakrivljenosti i točaka infleksije:

1. Nakon što odredimo domenu funkcije, nađemo $f''(x)$;
2. Riješimo jednadžbu $f''(x) = 0$;
3. Odredimo predznak funkcije f'' po intervalima:
   ako je $f'' > 0$ funkcija je strogo konveksna, a ako je $f'' < x$ funkcija je strogo konkavna;
4. Točke infleksije ili pregiba su točke iz domene funkcije u kojima f'' mijenja predznak tj. dolazi do promjene iz konveksnog u konkavno i obratno.

6. Graf funkcije

Prilikom crtanja grafa moguće je otkriti nelogičnosti, odnosno pogreške u prethodnim koracima te ih valja ispraviti.

Primjer 1

$$f(x)=\frac{16}{x^2(x-4)}.$$

Rješenje:

Zadana funkcija je elementarna pa je neprekidna (u svakoj točki u kojoj je definirana). Isto vrijedi i za njene derivacije.

1. Područje definicije (prirodna domena), parnost i periodičnost

$$D_f=\left\{x\in R: x^2(x-4)\neq 0\right\}=R\setminus\{0,4\}=\langle -\infty,0\rangle\cup\langle 0,4\rangle\cup\langle 4,\infty\rangle.$$

Funkcija nije ni parna ni neparna jer domena nije simetričan skup s obzirom na nulu.

Funkcija nije periodična jer u njenoj formuli nema trigonometrijskih funkcija.

2. Sjecišta ili dirališta s koordinatnim osima

$f(x)\neq 0$ za svaki $x\in D_f$ pa funkcija nema nul-točaka.
$f(0)$ ne postoji jer $0\notin D_f$. Dakle, graf funkcije f niti siječe niti dodiruje os y.

3. Asimptote

Moguće vertikalne asimptote su pravci $x=0$ i $x=4$. Naime, 0 i 4 su točke na rubu domene D_f u kojima funkcija nije definirana.

$\lim\limits_{x\to 0^{+0}}\frac{16}{x^2(x-4)}=-\infty\Rightarrow x=0$ je desna vertikalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to 0^{-0}}\frac{16}{x^2(x-4)}=-\infty\Rightarrow x=0$ je lijeva vertikalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to 4^{+0}}\frac{16}{x^2(x-4)}=\infty\Rightarrow x=4$ je desna vertikalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to 4^{-0}}\frac{16}{x^2(x-4)}=-\infty\Rightarrow x=4$ je lijeva vertikalna asimptota.

Funkcija bi mogla imati horizontalne asimptote jer limesi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ imaju smisla (u domeni D_f je moguće da $x\to\infty$ i da $x\to-\infty$).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{16}{x^2(x-4)}=0\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow y=0$ je desna horizontalna asimptota.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{16}{x^2(x-4)}=0\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow y=0$ je lijeva horizontalna asimptota.
Funkcija ima desnu i lijevu horizontalnu asimptotu pa nema kosih asimptota.

4. Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema

$$f'(x)=\frac{-16\left[2x(x-4)+x^2\right]}{x^4(x-4)^2}=\frac{16x(8-3x)}{x^4(x-4)^2}=\frac{16(8-3x)}{x^3(x-4)^2};$$

$$D_{f'}=D_f;$$

$$f'(x)=0$$
$$\frac{16(8-3x)}{x^3(x-4)^2}=0\Leftrightarrow 8-3x=0\Leftrightarrow x=\frac{8}{3};$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{\left(\frac{8}{3}\right)^2\left(\frac{8}{3}-4\right)}=\frac{16}{\frac{64}{9}\,\frac{-4}{3}}=-\frac{27}{16}.$$

Dakle, jedina kritična točka zadane funkcije je stacionarna točka $\left(\frac{8}{3},-\frac{27}{16}\right)$.

$$S_1=\left\{\frac{8}{3}\right\}$$

Rubovi domene D_f funkcije f su:

$$-\infty,0,4,\infty$$

pa su intervali monotonosti:

$$\langle-\infty,0\rangle,\left\langle 0,\frac{8}{3}\right\rangle,\left\langle\frac{8}{3},4\right\rangle,\langle 4,\infty\rangle.$$

$f'(-1)<0\Rightarrow f$ je padajuća na $\langle-\infty,0\rangle$;

$f'(1)>0\Rightarrow f$ je rastuća na $\left\langle 0,\frac{8}{3}\right\rangle$;

$f'(3)<0 \Rightarrow f$ je padajuća na $\left\langle \frac{8}{3},4 \right\rangle$;

$f'(5)<0 \Rightarrow f$ je padajuća na $\langle 4,\infty \rangle$.

Točka lokalnog ekstrema funkcije f može biti samo kritična točka funkcije f.
Kako je

$$f'(x)>0 \text{ za svaki } x\in\left\langle 0,\frac{8}{3}\right\rangle \text{ (jer je } f'(1)>0\text{)}$$

i

$$f'(x)<0 \text{ za svaki } x\in\left\langle \frac{8}{3},4\right\rangle \text{ (jer je } f'(3)<0\text{)},$$

onda je $M\left(\frac{8}{3},-\frac{27}{16}\right)$ točka lokalnog maksimuma funkcije f.

5. Intervali zakrivljenosti i točke infleksije

$$f''(x)=\frac{16}{x^6(x-4)^4}\left\{-3x^3(x-4)^2-\left[3x^2(x-4)^2+2x^3(x-4)\right](8-3x)\right\}=$$

$$=\frac{16x^2(x-4)}{x^6(x-4)^4}\left\{-3x(x-4)-\left[3(x-4)+2x\right](8-3x)\right\}=$$

$$=\frac{16}{x^4(x-4)^3}\left[-3x(x-4)-(5x-12)(8-3x)\right]=$$

$$=\frac{16}{x^4(x-4)^3}\left(-3x^2+12x-76x+15x^2+96\right)=\frac{16}{x^4(x-4)^3}\left(12x^2-64x+96\right)=$$

$$=\frac{64}{x^4(x-4)^3}\left(3x^2-16x+24\right);$$

$D_{f''}=D_f$;

$f''(x)\neq 0$ za svaki $x\in D_{f''}$ jer jednadžba $3x^2-16x+24=0$ nema realnih rješenja.

Dakle, $S_2=\varnothing$ pa zadana funkcija nema točaka infleksije.

Rubovi domene D_f funkcije f su:

$$-\infty,0,4,\infty$$

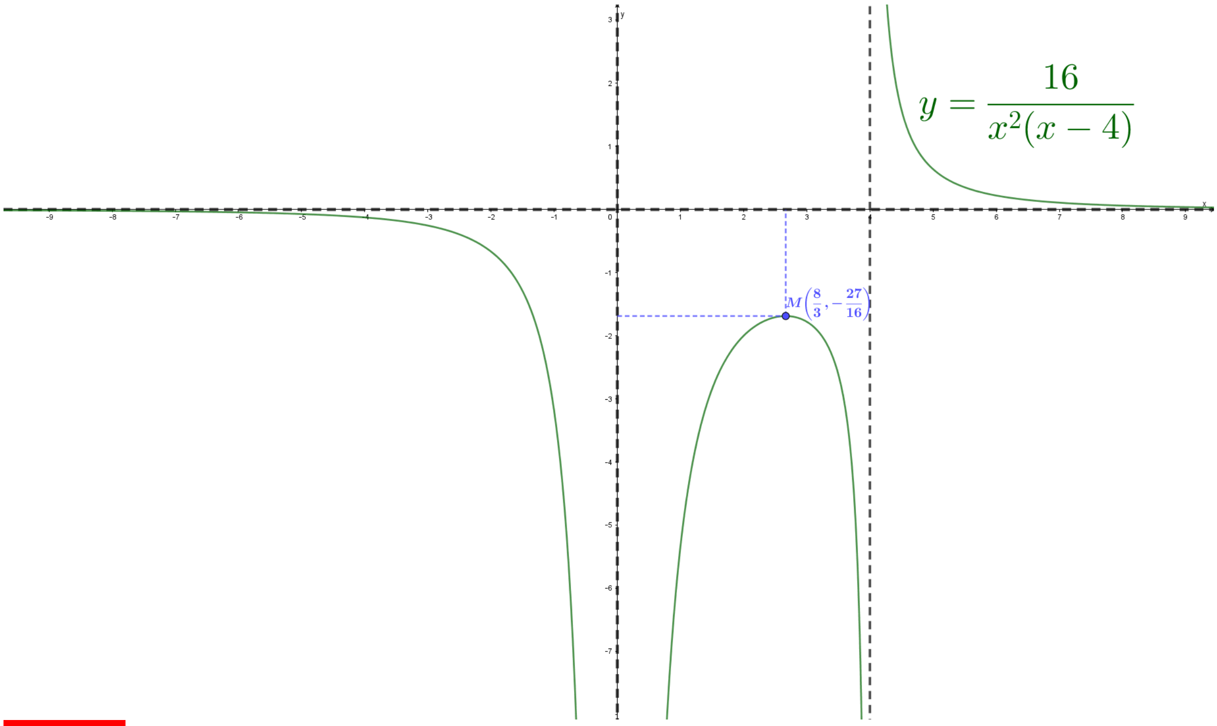
pa su intervali zakrivljenosti:

$$\langle -\infty,0\rangle,\langle 0,4\rangle,\langle 4,\infty\rangle.$$

$f''(-1)<0 \Rightarrow f$ je strogo konkavna na $\langle -\infty,0\rangle$;

$f''(1)<0 \Rightarrow f$ je strogo konkavna na $\langle 0,4\rangle$;
$f''(5)>0 \Rightarrow f$ je strogo konveksna na $\langle 4,\infty\rangle$.

6. Graf funkcije



Primjer 2

$$f(x)=x\ln^2 x.$$

Rješenje:

Zadana funkcija je elementarna pa je neprekidna (u svakoj točki u kojoj je definirana). Isto vrijedi i za njene derivacije.

1. Područje definicije (prirodna domena), parnost i periodičnost

$D_f=\{x\in\mathbb{R} : \ln x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^+=\langle 0,\infty\rangle.$

Funkcija nije ni parna ni neparna jer domena nije simetričan skup s obzirom na nulu.

Funkcija nije periodična jer u njenoj formuli nema trigonometrijskih funkcija.

2. Sjecišta ili dirališta s koordinatnim osima

$f(x)=0 \Leftrightarrow x\ln^2 x=0 \Leftrightarrow \ln^2 x=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1.$

Prema tome, $N(1,0)$ je nul-točka zadane funkcije.

$f(0)$ ne postoji jer $0 \notin D_f$. Dakle, graf zadane funkcije niti siječe niti dodiruje os y.

3. Asimptote

Moguća desna vertikalna asimptota je pravac $x=0$. Naime, nula je točka na rubu domene D_f u kojoj funkcija nije definirana, a ima smisla samo desni limes u toj točki jer zadana funkcija nije definirana lijevo od nule.

$$\lim_{x\to 0^{+0}} x\ln^2 x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^{+0}} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{LP}}{=} \lim_{x\to 0^{+0}} \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}} = \lim_{x\to 0^{+0}} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to 0^{+0}} \frac{\frac{2}{\cancel{x}}}{\frac{1}{x^{\cancel{2}}}} = 2\lim_{x\to 0^{+}} x = 0.$$

Napomena: Jednakost $\overset{\text{LP}}{=}$ se dobiva primjenom L' Hospitalovog pravila.

Dakle, kad $x\to 0^{+0}$ onda $y\to 0^{+0}$ pa $x=0$ nije desna vertikalna asimptota zadane funkcije.

Funkcija bi mogla imati samo desnu horizontalnu asimptotu jer jedino limes $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ima smisla (u domeni D_f je moguće da $x\to\infty$, ali ne i da $x\to-\infty$).

$$\lim_{x\to\infty} x\ln^2 x = \infty \notin \mathbb{R}.$$

Zaključujemo da zadana funkcija nema horizontalnih asimptota.

Funkcija bi mogla imati samo desnu kosu asimptotu jer samo limesi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k_1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k_1x\right] = l_1$$

imaju smisla (u domeni D_f je moguće da $x\to\infty$, ali ne i da $x\to-\infty$).

$$k_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\ln^2 x}{\cancel{x}} = \infty \notin \mathbb{R}$$

pa funkcija nema ni kosih asimptota.

4. Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$f'(x) = \ln^2 x + \cancel{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \ln x(\ln x + 2);$$

$$D_{f'} = D_f;$$

$$f'(x) = 0$$
$$\ln x(\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ili } \ln x = -2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ili } x = e^{-2};$$

$$f(1) = 1\ln^2 1 = 0, \quad f(e^{-2}) = e^{-2}\ln^2(e^{-2}) = e^{-2} \cdot (-2)^2 = 4e^{-2}.$$

Dakle, kritične točke zadane funkcije su stacionarne točke $(1,0)$ i $(e^{-2}, 4e^{-2})$.

$$S_1 = \{e^{-2}, 1\}$$

Rubovi domene D_f funkcije f su:

$$0, \infty$$

pa su intervali monotonosti:

$$\langle 0, e^{-2}\rangle, \langle e^{-2}, 1\rangle, \langle 1, \infty\rangle.$$

$f'(e^{-3}) > 0 \Rightarrow f$ je rastuća na $\langle 0, e^{-2}\rangle$;
$f'(e^{-1}) < 0 \Rightarrow f$ je padajuća na $\langle e^{-2}, 1\rangle$;
$f'(e) > 0 \Rightarrow f$ je rastuća na $\langle 1, \infty\rangle$.

Točka lokalnog ekstrema funkcije f može biti samo kritična točka funkcije f.
Kako je

$f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle 0, e^{-2}\rangle$ (jer je $f'(e^{-3}) > 0$)

i

$f'(x) < 0$ za svaki $x \in \langle e^{-2}, 1\rangle$ (jer je $f'(e^{-1}) < 0$),

onda je $M(e^{-2}, 4e^{-2})$ točka lokalnog maksimuma funkcije f.

Kako je

$f'(x) < 0$ za svaki $x \in \langle e^{-2}, 1\rangle$ (jer je $f'(e^{-1}) < 0$),

i

$f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle 1, \infty\rangle$ (jer je $f'(e) > 0$),

onda je $m(1,0)$ točka lokalnog minimuma funkcije f.

5. Intervali zakrivljenosti i točke infleksije

$$f''(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$$

$$D_{f''} = D_f$$

$$f''(x) = 0$$
$$\frac{2}{x}(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$f(e^{-1}) = e^{-1}$$

$$S_2 = \{e^{-1}\}$$

Rubovi domene D_f funkcije f su:

$$0, \infty$$

pa su intervali zakrivljenosti:

$$\langle 0, e^{-1} \rangle, \langle e^{-1}, \infty \rangle.$$

$f''(e^{-2}) < 0 \Rightarrow f$ je strogo konkavna na $\langle 0, e^{-1} \rangle$;
$f''(1) > 0 \Rightarrow f$ je strogo konveksna na $\langle e^{-1}, \infty \rangle$.

Točka infleksije funkcije f može biti samo točka (e^{-1}, e^{-1}).

Kako je

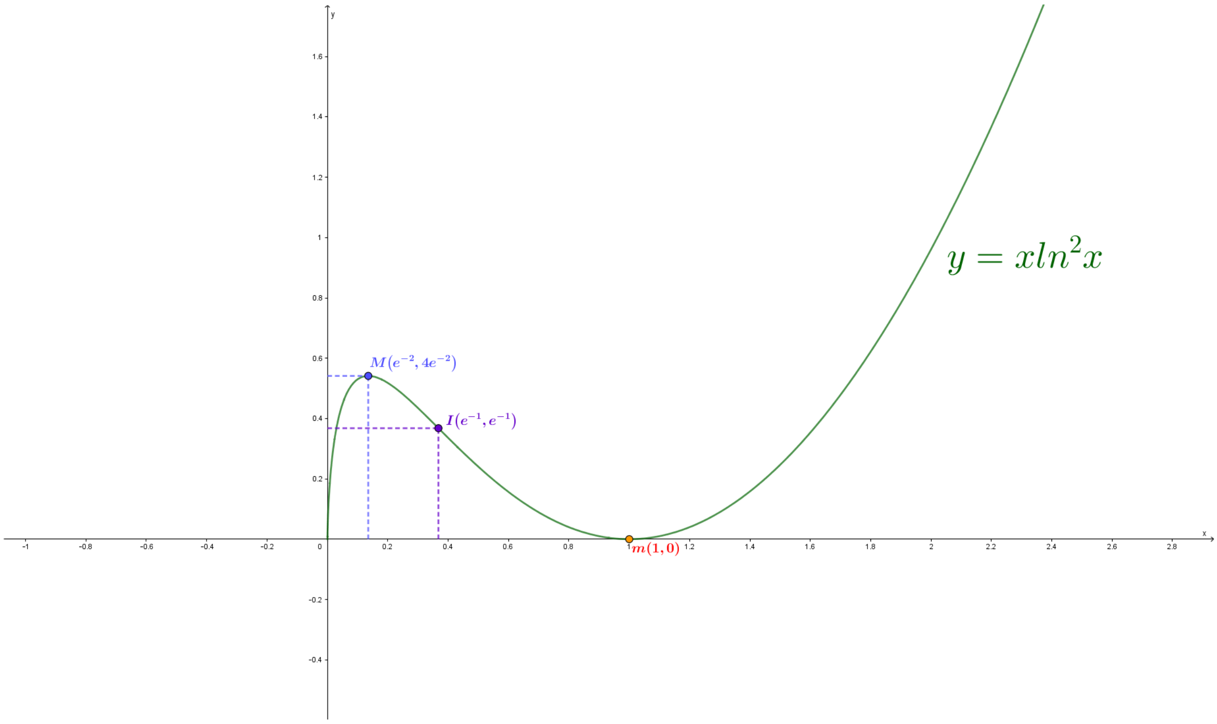
$$f''(x) < 0 \text{ za svaki } x \in \langle 0, e^{-1} \rangle \text{ (jer je } f''(e^{-2}) < 0 \text{)},$$

i

$$f''(x) > 0 \text{ za svaki } x \in \langle e^{-1}, \infty \rangle \text{ (jer je } f''(1) > 0 \text{)},$$

onda je $I(e^{-1}, e^{-1})$ točka infleksije funkcije f.

6. Graf funkcije



Primjer 3

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

Rješenje:
Zadana funkcija je elementarna pa je neprekidna (u svakoj točki u kojoj je definirana). Isto vrijedi i za njene derivacije.

1. Područje definicije (prirodna domena), parnost i periodičnost

$$D_f = \mathbb{R} = \langle -\infty, \infty \rangle.$$

Za svaki $x \in D_f$ vrijedi:

$$f(-x) = -xe^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x)$$

pa je f neparna funkcija. Prema tome, ispitivat ćemo tok funkcije samo na skupu

$$D_f \cap [0, \infty\rangle = \mathbb{R} \cap [0, \infty\rangle = [0, \infty\rangle.$$

Funkcija nije periodična jer u njenoj formuli nema trigonometrijskih funkcija.

2. Sjecišta ili dirališta s koordinatnim osima

$f(x)=0 \Leftrightarrow xe^{-x^2}=0 \Leftrightarrow x=0.$

$N(0,0)$ je nul-točka i sjecište s osi y.

3. Asimptote

$D_f=\mathbb{R}$ pa funkcija nema vertikalnih asimptota.

Funkcija bi mogla imati desnu horizontalnu asimptotu jer limes $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ima smisla (u domeni D_f je moguće da $x\to\infty$).

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2}=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{LP}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}}=0$

$\Rightarrow y=0$ je desna horizontalna asimptota.

Funkcija nema desne kose asimptote jer ima desnu horizontalnu asimptotu.

4. Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema

$f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2};$

$D_{f'}=D_f;$

$f'(x)=0$

$\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}=0 \Leftrightarrow 1-2x^2=0 \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707107;$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}.$

$S_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

Rubovi intervala $\left[0,\infty\right\rangle$ su:

$$0,\infty$$

pa su intervali monotonosti (na intervalu $\left[0,\infty\right\rangle$):

$$\left\langle 0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle,\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right\rangle.$$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow f$ je rastuća na $\left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$;

$f'(1) < 0 \Rightarrow f$ je padajuća na $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \right\rangle$.

Točka lokalnog ekstrema funkcije f može biti samo kritična točka funkcije f.

Kako je

$$f'(x) > 0 \text{ za svaki } x \in \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \text{ (jer je } f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \text{)}$$

i

$$f'(x) < 0 \text{ za svaki } x \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \right\rangle \text{ (jer je } f'(1) < 0 \text{),}$$

onda je $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}\right)$ točka lokalnog maksimuma funkcije f.

5. Intervali zakrivljenosti i točke infleksije

$f''(x) = -4xe^{-x^2} - 2x\left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2} = 2x\left(2x^2 - 3\right)e^{-x^2}$;

$D_{f''} = D_f$;

$f''(x) = 0$

$2x\left(2x^2 - 3\right)e^{-x^2} \Leftrightarrow x\left(2x^2 - 3\right) = 0 \overset{x \geq 0}{\Rightarrow} x = 0 \text{ ili } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.22474$;

$f(0) = 0, \quad f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-3/2}$.

$S_2 = \left\{0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

Rubovi intervala $\left[0, \infty\right\rangle$ su:

$$0, \infty$$

pa su intervali zakrivljenosti (na intervalu $\left[0, \infty\right\rangle$):

$$\left\langle 0, \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rangle, \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}, \infty \right\rangle.$$

$f''(1) < 0 \Rightarrow f$ je strogo konkavna na $\left\langle 0, \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rangle$;

$f''(2) > 0 \Rightarrow f$ je strogo konveksna na $\left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}, \infty \right\rangle$.

Kako je

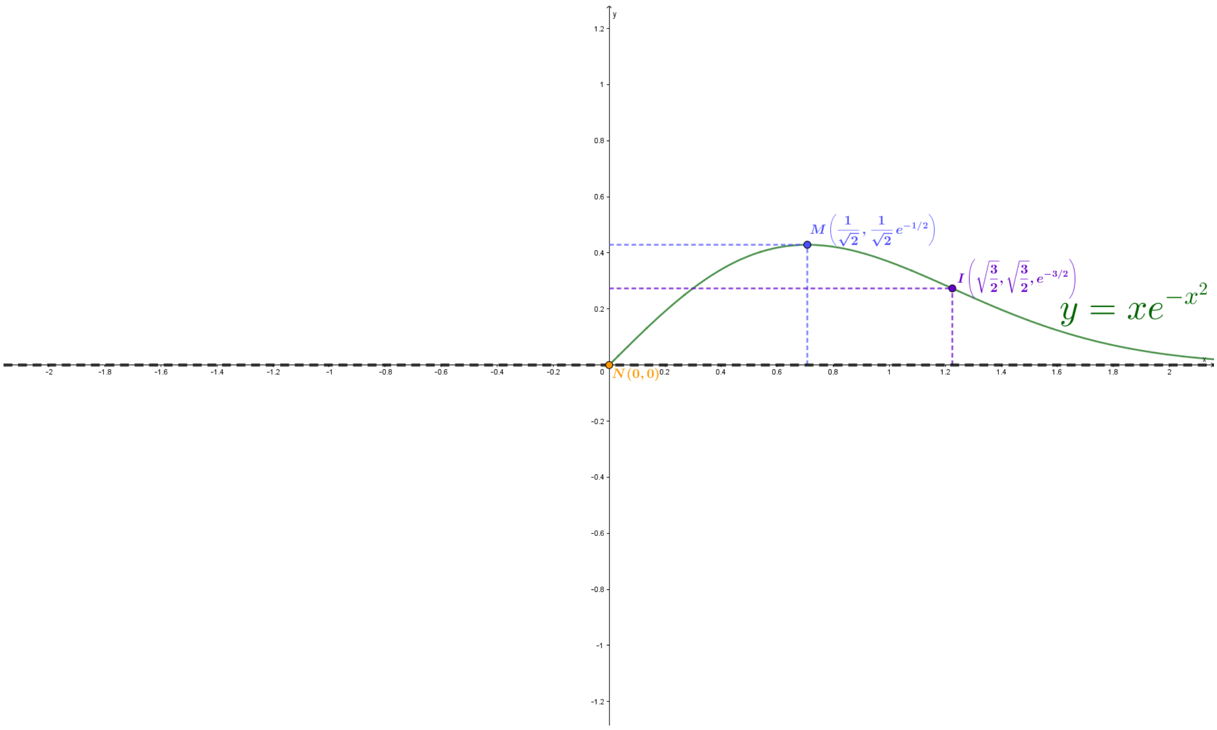
$f''(x) < 0$ za svaki $x \in \left\langle 0, \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rangle$ (jer je $f''(1) < 0$),

i

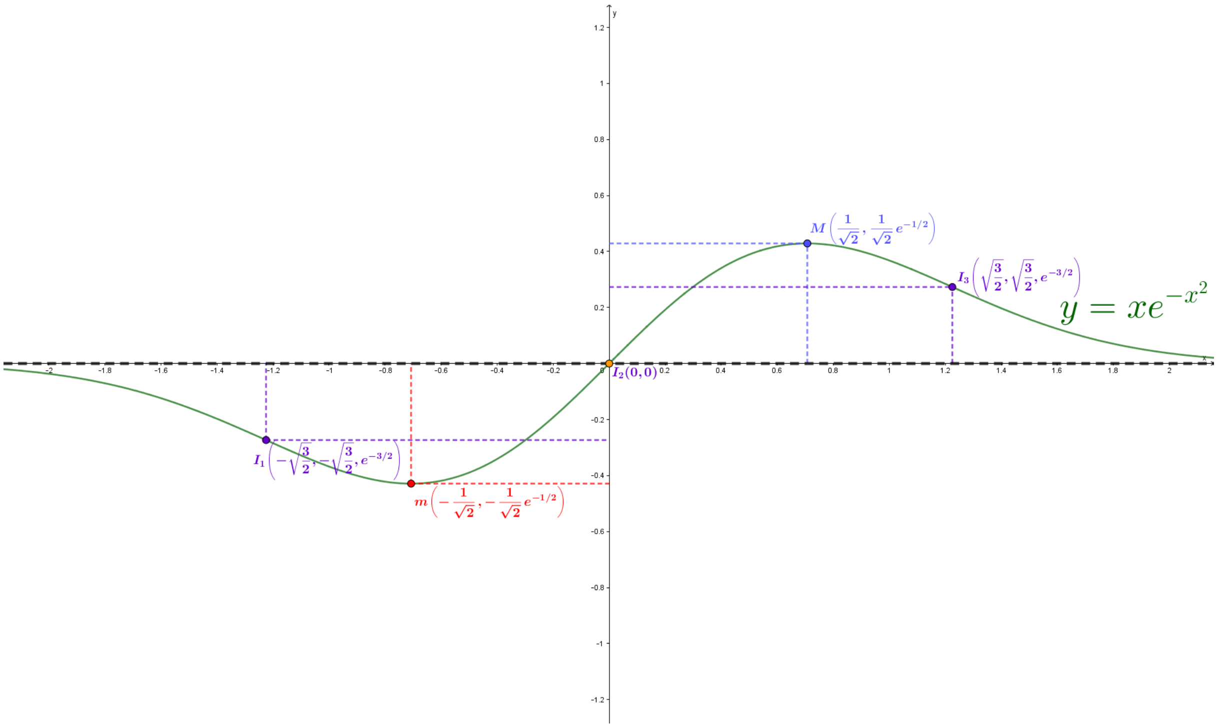
$f''(x) > 0$ za svaki $x \in \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}, \infty \right\rangle$ (jer je $f''(2) > 0$),

onda je $I\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-3/2} \right)$ točka infleksije funkcije f.

6a. Graf funkcije na intervalu $\left[0, \infty\right\rangle$



6b. Graf funkcije



Primjer 4. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}.$

Rješenje:

Zadana funkcija je elementarna pa je neprekidna (u svakoj točki u kojoj je definirana). Isto vrijedi i za njene derivacije.

1. Područje definicije (prirodna domena), parnost i periodičnost

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle.$$

Funkcija nije ni parna ni neparna jer domena nije simetričan skup s obzirom na nulu.

Funkcija nije periodična jer u njenoj formuli nema trigonometrijskih funkcija.

2. Sjecišta ili dirališta s koordinatnim osima

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{\frac{1}{x-2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$N(0,0)$ je nul-točka i sjecište s osi y.

3. Asimptote

Moguća vertikalna asimptota je pravac $x=2$. Naime, 2 je točka na rubu domene D_f u kojoj funkcija nije definirana. Očito oba limesa

$$\lim_{x\to 2^{+0}} f(x) \text{ i } \lim_{x\to 2^{-0}} f(x)$$

imaju smisla.

$\lim\limits_{x\to 2^{+0}} xe^{\frac{1}{x-2}} = \infty$ pa je $x=2$ desna vertikalna asimptota.

$$\lim_{x\to 2^{-0}} xe^{\frac{1}{x-2}} = 0.$$

Funkcija bi mogla imati horizontalne asimptote jer limesi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ imaju smisla (u domeni D_f je moguće da $x\to\infty$ i da $x\to-\infty$).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = \infty \notin \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = -\infty \notin \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{funkcija nema horizontalnih asimptota.}$$

Funkcija bi mogla imati kose asimptote jer svi pripadni limesi imaju smisla (u domeni D_f je moguće da $x\to\infty$ i da $x\to-\infty$).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}e^{\frac{1}{x-2}}}{\cancel{x}} = 1 = k_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k_1x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x-2}}-x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-2}}-1\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}-1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{LP}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4x+4}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x-2}}}_{=1} = 1 = l_1 \in \mathbb{R}$$

pa je $y=x+1$ desna kosa asimptota;

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}e^{\frac{1}{x-2}}}{\cancel{x}}=1=k_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\};$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{1}{x-2}}-x\right)=\left[-\infty+\infty\right]=\lim_{x\to-\infty}x\left(e^{\frac{1}{x-2}}-1\right)=\left[-\infty\cdot 0\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{LP}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-4x+4}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-2}}}_{=1}=1=l_2\in\mathbb{R}$$

pa je $y=x+1$ i lijeva kosa asimptota.

4. Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x-2}}-\frac{x}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{x-2}}\left[1-\frac{x}{(x-2)^2}\right]=\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}};$$

$$D_{f'}=D_f;$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1\ \text{ ili }\ x=4.$$

$$f(1)=e^{-1},\quad f(4)=4e^{1/2}.$$

Dakle, kritične točke zadane funkcije su stacionarne točke $\left(1,e^{-1}\right)$ i $\left(4,4e^{1/2}\right)$.

$$S_1=\{1,4\}$$

Rubovi domene D_f funkcije f su:

$$-\infty,2,\infty$$

pa su intervali monotonosti:

$$\langle-\infty,1\rangle,\langle1,2\rangle,\langle2,4\rangle,\langle4,\infty\rangle.$$

$f'(0)>0\Rightarrow f$ je rastuća na $\langle-\infty,1\rangle$;

$f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow f$ je padajuća na $\langle 1,2 \rangle$;

$f'(3) < 0 \Rightarrow f$ je padajuća na $\langle 2,4 \rangle$;

$f'(5) > 0 \Rightarrow f$ je rastuća na $\langle 4,\infty \rangle$.

Točke lokalnih ekstrema funkcije f mogu biti samo kritične točke te funkcije.

Kako je

$$f'(x) > 0 \text{ za svaki } x \in \langle -\infty, 1 \rangle \text{ (jer je } f'(0) > 0\text{)}$$

i

$$f'(x) < 0 \text{ za svaki } x \in \langle 1, 2 \rangle \text{ (jer je } f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0\text{),}$$

onda je $M\left(1, e^{-1}\right)$ točka lokalnog maksimuma funkcije f.

Kako je

$$f'(x) < 0 \text{ za svaki } x \in \langle 2, 4 \rangle \text{ (jer je } f'(3) < 0\text{)}$$

i

$$f'(x) > 0 \text{ za svaki } x \in \langle 4, \infty \rangle \text{ (jer je } f'(5) > 0\text{),}$$

onda je $m\left(4, 4e^{1/2}\right)$ točka lokalnog minimuma funkcije f.

5. Intervali zakrivljenosti i točke infleksije

$$f''(x)=\frac{\left[(2x-5)e^{\frac{1}{x-2}}-\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}\right](x-2)^2-2(x-2)(x^2-5x+4)e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{(2x-5)(x-2)-\frac{x^2-5x+4}{x-2}-2(x^2-5x+4)}{(x-2)^3}e^{\frac{1}{x-2}}=$$

$$=\frac{\cancel{2x^2}-9x+10-\frac{x^2-5x+4}{x-2}\cancel{-2x^2}+10x-8}{(x-2)^3}e^{\frac{1}{x-2}}=\frac{x+2-\frac{x^2-5x+4}{x-2}}{(x-2)^3}e^{\frac{1}{x-2}}=$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)-x^2+5x-4}{(x-2)^4}e^{\frac{1}{x-2}}=\frac{\cancel{x^2}-4\cancel{-x^2}+5x-4}{(x-2)^4}e^{\frac{1}{x-2}}=\frac{5x-8}{(x-2)^4}e^{\frac{1}{x-2}};$$

$$D_{f''}=D_f;$$

$$f''(x)=0$$

$$\frac{5x-8}{(x-2)^4}e^{\frac{1}{x-2}}=0\Leftrightarrow 5x-8=0\Leftrightarrow x=\frac{8}{5}.$$

$$f\left(\frac{8}{5}\right)=\frac{8}{5}e^{-5/2}.$$

$$S_2=\left\{\frac{8}{5}\right\}$$

Rubovi domene D_f funkcije f su:

$$-\infty,2,\infty$$

pa su intervali zakrivljenosti:

$$\left\langle-\infty,\frac{8}{5}\right\rangle,\left\langle\frac{8}{5},2\right\rangle,\langle 2,\infty\rangle.$$

$f''(1)<0\Rightarrow f$ je strogo konkavna na $\left\langle-\infty,\frac{8}{5}\right\rangle$;

$f''\left(\frac{9}{5}\right)>0\Rightarrow f$ je strogo konveksna na $\left\langle\frac{8}{5},2\right\rangle$;

$f''(3)>0\Rightarrow f$ je strogo konveksna na $\langle 2,\infty\rangle$.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Kako je

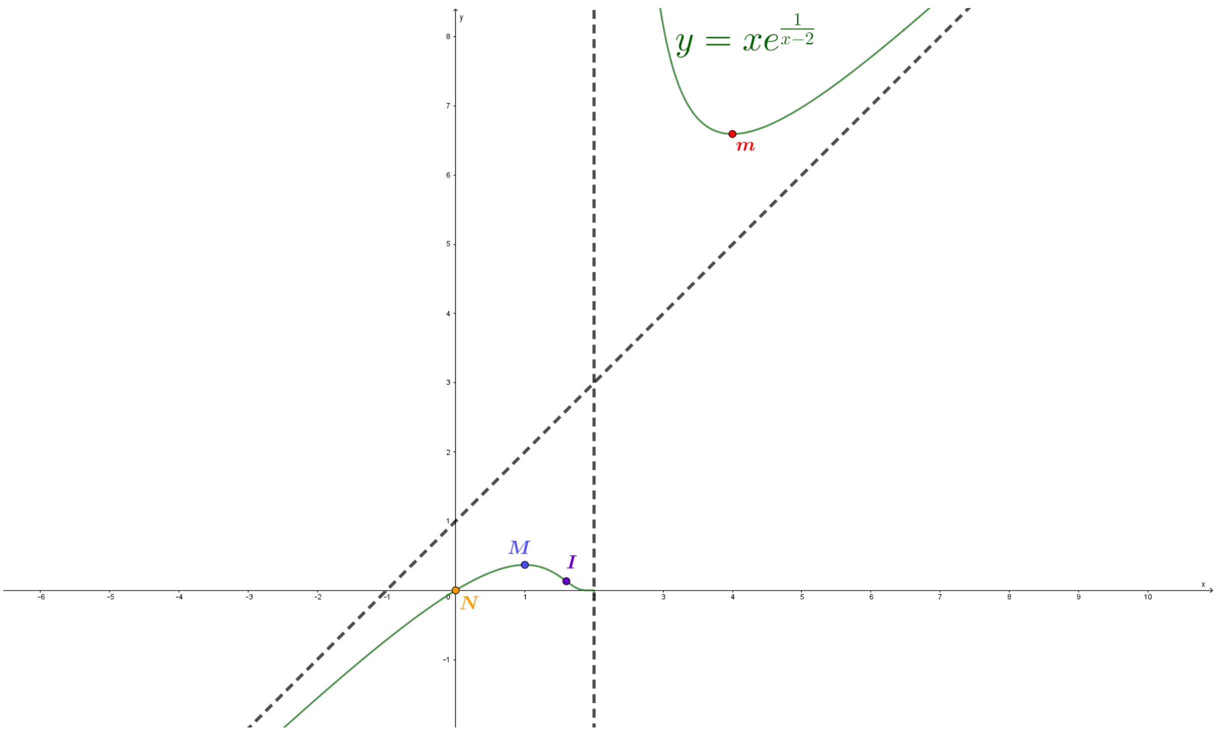
$$f''(x)<0 \text{ za svaki } x\in\left\langle -\infty,\frac{8}{5}\right\rangle \text{ (jer je } f''(1)<0\text{)},$$

i

$$f''(x)>0 \text{ za svaki } x\in\left\langle \frac{8}{5},2\right\rangle \text{ (jer je } f''\left(\frac{9}{5}\right)>0\text{)},$$

onda je $I\left(\frac{8}{5},\frac{8}{5}e^{-5/2}\right)$ točka infleksije funkcije f.

6. Graf funkcije



Primjer 5. $f(x)=\sqrt{|x|}\left(2-\ln x^2\right)$.

Rješenje:
Zadana funkcija je elementarna pa je neprekidna (u svakoj točki u kojoj je definirana). Isto vrijedi i za njene derivacije.

1. Područje definicije (prirodna domena), parnost i periodičnost

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\langle -\infty,0\rangle\cup\langle 0,\infty\rangle.$$

Za svaki $x\in D_f$ vrijedi:

$$f(-x)=\sqrt{|-x|}\left[2-\ln(-x)^2\right]=\sqrt{|x|}\left(2-\ln x^2\right)=f(x)$$

pa je f parna funkcija. Prema tome, dovoljno je ispitati tok funkcije samo na skupu

$$D_f\cap[0,\infty\rangle=\mathbb{R}\cap[0,\infty\rangle=\langle 0,\infty\rangle.$$

Za $x>0$ vrijedi:

$$f(x)=\sqrt{x}(2-2\ln x)=2\sqrt{x}(1-\ln x).$$

Funkcija nije periodična jer u njenoj formuli nema trigonometrijskih funkcija.

2. Sjecišta ili dirališta s koordinatnim osima

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}(1-\ln x)=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e.$$

Prema tome, $N(e,0)$ je jedina nul-točka zadane funkcije na intervalu $\langle 0,\infty\rangle$.

$f(0)$ ne postoji jer $0\notin D_f$. Dakle, graf funkcije niti siječe niti dodiruje os y.

3. Asimptote

$$\lim_{x\to 0^{+0}} f(x)=\lim_{x\to 0^{+0}} 2\sqrt{x}(1-\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{1-\ln x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{LP}}{=}$$

$$\overset{\text{LP}}{=}\lim_{x\to 0^{+0}}\frac{-\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{4\cancel{x}\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^{+0}} 4\sqrt{x}=0$$

pa funkcija nema vertikalnih asimptota na desnoj strani grafa;

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x}(1-\ln x)=-\infty\notin\mathbb{R}$$

pa funkcija nema desnu horizontalnu asimptotu;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(1-\ln x)}{\sqrt{x}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\overset{\text{LP}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{x}}=0=k_1;$$

$k_1\notin\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pa funkcija nema desnu kosu asimptotu.

4. Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(1-\ln x)+2\sqrt{x}\cdot\frac{-1}{x}=\frac{1-\ln x-2}{\sqrt{x}}=-\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$D_{f'}=D_f\bigcap\left[0,\infty\right\rangle;$$

$$f'(x)=0$$

$$-\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow 1+\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}.$$

$$f\left(e^{-1}\right)=4\sqrt{e^{-1}}=4e^{-1/2}.$$

$$S_1=\left\{e^{-1}\right\}$$

Rubovi intervala $\langle 0,\infty\rangle$ su:

$$0,\infty$$

pa su intervali monotonosti (na intervalu $\langle 0,\infty\rangle$):

$$\left\langle 0,e^{-1}\right\rangle,\left\langle e^{-1},\infty\right\rangle.$$

$f'\left(e^{-2}\right)>0\Rightarrow f$ je rastuća na $\left\langle 0,e^{-1}\right\rangle$;
$f'(1)<0\Rightarrow f$ je padajuća na $\left\langle e^{-1},\infty\right\rangle$.

Točka lokalnog ekstrema funkcije f može biti samo kritična točka funkcije f.

Kako je

$f'(x)>0$ za svaki $x\in\left\langle 0,e^{-1}\right\rangle$ (jer je $f'\left(e^{-2}\right)>0$)

i

$f'(x)<0$ za svaki $x\in\left\langle e^{-1},\infty\right\rangle$ (jer je $f'(1)<0$),

onda je $M\left(e^{-1},4e^{-1/2}\right)$ točka lokalnog maksimuma funkcije f.

5. Intervali zakrivljenosti i točke infleksije

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\ln x)}{x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\ln x) - \frac{2}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\ln x - 1}{2x\sqrt{x}};$$

$$D_{f''} = D_f \cap [0, \infty\rangle;$$

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{\ln x - 1}{2x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

$$f(e) = 0.$$

$$S_2 = \{e\}$$

Rubovi intervala $\langle 0, \infty\rangle$ su:

$$0, \infty$$

pa su intervali zakrivljenosti (na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$):

$$\langle 0, e\rangle, \langle e, \infty\rangle.$$

$f''(1) < 0 \Rightarrow f$ je strogo konkavna na $\langle 0, e\rangle$;
$f''(e^2) > 0 \Rightarrow f$ je strogo konveksna na $\langle e, \infty\rangle$.

Kako je

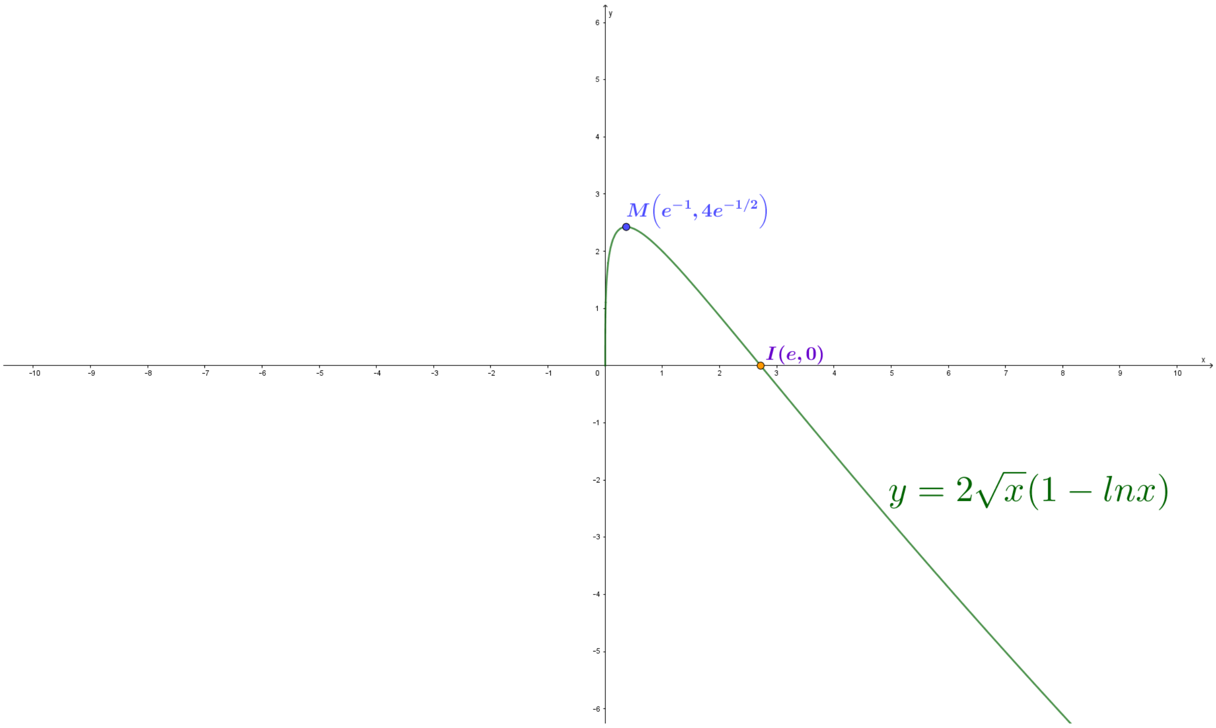
$f''(x) < 0$ za svaki $x \in \langle 0, e\rangle$ (jer je $f''(1) < 0$),

i

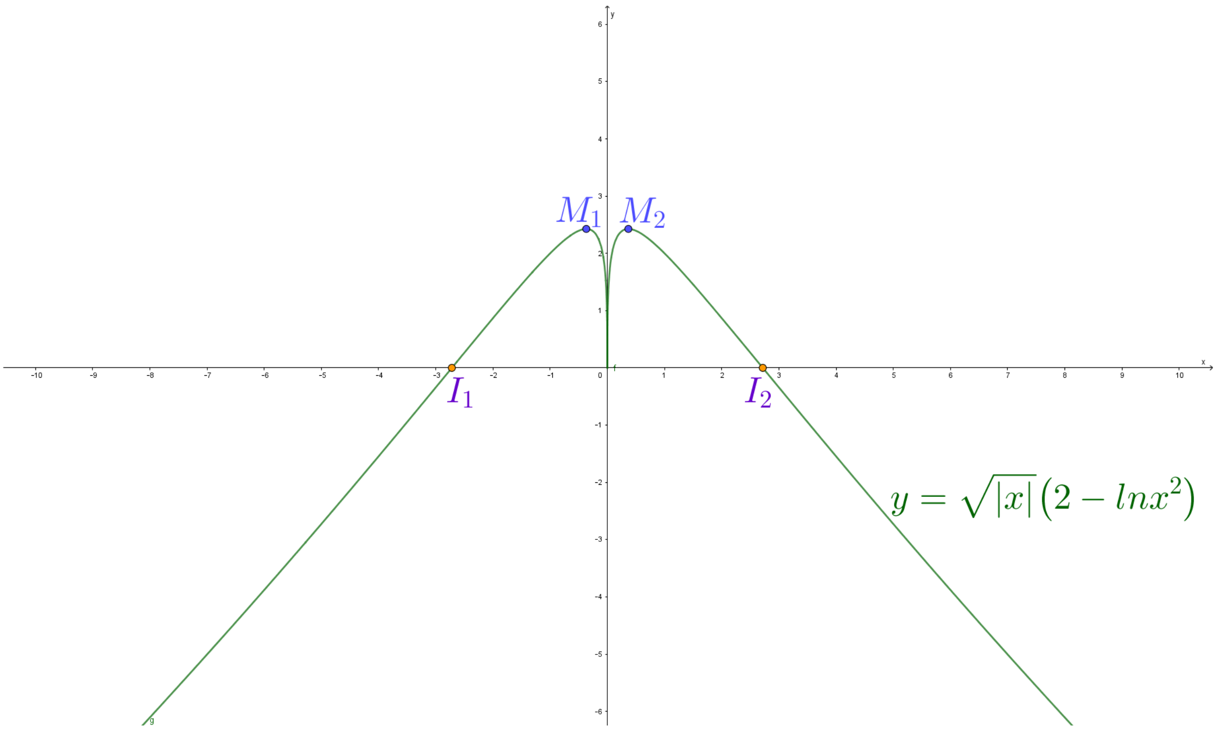
$f''(x) > 0$ za svaki $x \in \langle e, \infty\rangle$ (jer je $f''(e^2) > 0$),

onda je $I(e, 0)$ točka infleksije funkcije f.

6a. Graf funkcije na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$



6b. Graf funkcije



Primjer 6 Funkcije kod koje je točka lokalnog ekstrema kritična točka koja nije stacionarna:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x \text{ ako je } x\geq 0 \\ -x \text{ ako je } x<0 \end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}=\langle -\infty,\infty\rangle;$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1 \text{ ako je } x>0 \\ -1 \text{ ako je } x<0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_d(0)&=\lim_{t\to 0^{+0}}\frac{f(0+t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^{+0}}\frac{t}{t}=1 \\ f'_l(0)&=\lim_{t\to 0^{-0}}\frac{f(0+t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^{+0}}\frac{-t}{t}=-1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t)-f(0)}{t-0} \text{ ne postoji.}$$

$$f(0)=0.$$

Dakle, $(0,0)$ je kritična točka koja nije stacionarna.

$$S_1=\{0\}$$

Rubovi domene funkcije f su:

$$-\infty,\infty$$

pa su intervali monotonosti:

$$\langle -\infty,0\rangle,\langle 0,\infty\rangle.$$

Kako je

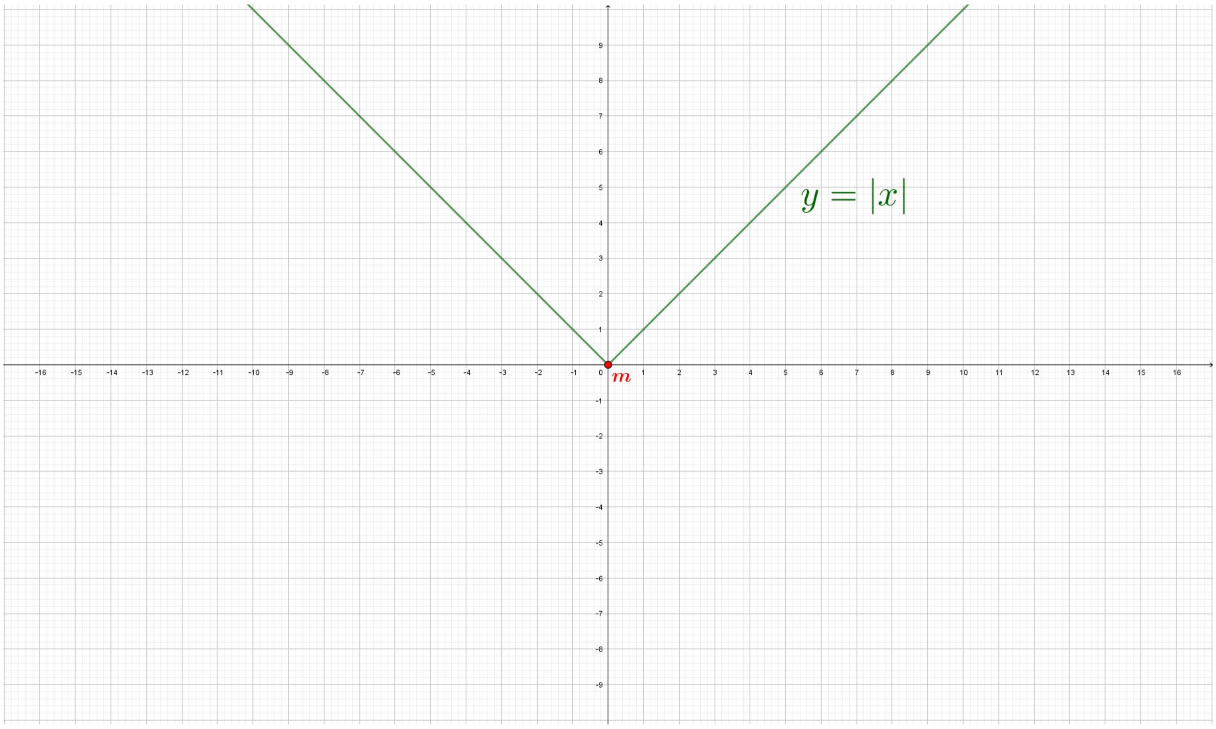
$$f'(x)=-1<0 \text{ za svaki } x<0$$

i

$$f'(x)=1>0 \text{ za svaki } x>0,$$

onda je $m(0,0)$ točka lokalnog minimuma funkcije f.

Graf funkcije $y = |x|$:

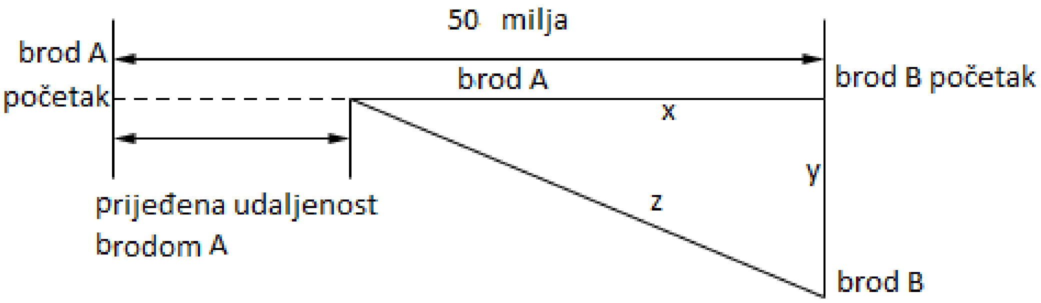


6.9. Primjena derivacija na stvarnim problemima

Primjer 1:

Dva broda počinju ploviti na udaljenosti od 50 milja. Brod A je zapadno od broda B i počinje ploviti prema istoku (tj. prema brodu B) brzinom od 10 čvorova, a istodobno brod B započinje ploviti prema jugu brzinom od 15 čvorova. Nakon 3 sata plovidbe, kojom se brzinom mijenja udaljenost između dva broda?

Rj:



Na ovoj slici *y* predstavlja prevaljeni put broda B, *x* predstavlja udaljenost broda A od početnog položaja broda B i *z* udaljenost između dva broda. Nakon 3 sata plovidbe vrijednosti *x* i *y* su:

$$x = 50 - 10 \cdot 3 = 30$$

$$y = 15 \cdot 3 = 45$$

Za izračunati *z* koristi se Pitagorin poučak:

$$z = \sqrt{30^2 + 45^2} = 54.08$$

Da bi se odgovorilo na postavljeno pitanje, treba odrediti z', s tim da je $x' = -30$ i $y' = 45$.

Opet se koristi Pitagorin teorem:

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2zz' = 2xx' + 2yy'$$

$$z' = \frac{2 \cdot 30 \cdot (-30) + 2 \cdot 45 \cdot 45}{2 \cdot 54.08} = 20.8$$

Dakle, nakon tri sata udaljenost između njih se mijenja brzinom od 20.8 čvorova.

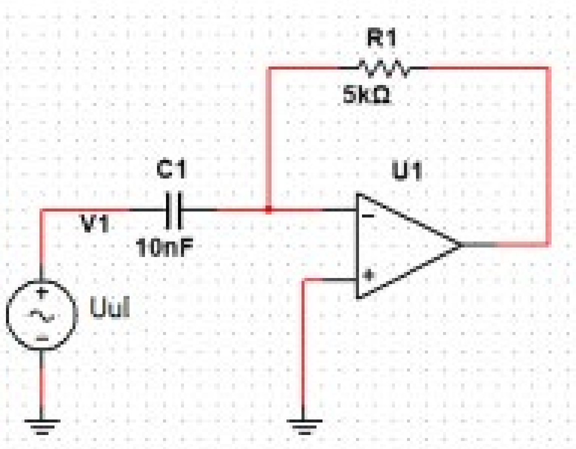
Primjer 2:

Analitički odrediti izlazni signal idealnog operacijskog pojačala u spoju derivatora te grafički usporediti ulazni i izlazni signal ako su poznate sljedeće vrijednosti:

$U_{ul}(t) = 10\sin(2\pi \cdot 3000t)$

$R1 = 5k\Omega$

$C1 = 10nF$



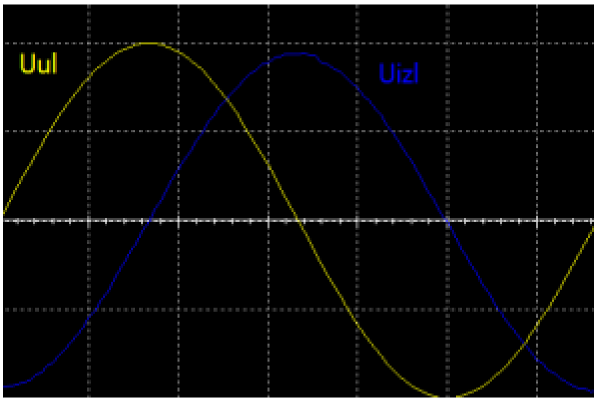
Rj:

Formula za izlazni signal je:

$$U_{izl} = -R1 \cdot C1 \cdot \frac{dU_{ul}}{dt}$$

$$U_{izl} = -5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot \frac{d[\sin(2\pi \cdot 3000t)]}{dt}$$

$$U_{izl} = -9.42 \cdot \cos\,(2\pi \cdot 3000t)$$



Primjer 3:

Treba odrediti zakon rotacijskog gibanja parne turbine pri puštanju u rad. Poznato je da je povećanje kuta rotacije proporcionalan trećoj potenciji vremena i da je u trenutku $t = 3\, s$ brzina vrtnje rotora turbine $n = 810\, min^{-1}$.

Rj:

Zakon rotacijskog gibanja prema uvjetu u zadatka je:

$$\varphi = k \cdot t^3.$$

Kutna brzina rotacijskog gibanja iznosi:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3 \cdot\ k \cdot t^2.$$

Iz poznatih vrijednosti određuje se konstanta proporcionalnosti:

$$k = \frac{\omega}{3 \cdot t^2} = \frac{\pi \cdot n}{3 \cdot 30 \cdot t^2}$$

$$k = \frac{\pi \cdot 810}{3 \cdot 30 \cdot 9} = \pi.$$

Zakon rotacijskog gibanja rotora parne turbine je:

$$\varphi = \pi \cdot t^3.$$

Kutna brzina i kutno ubrzanje iznose:

$$\omega = 3 \cdot \pi \cdot t^2$$

$$\varepsilon = 6 \cdot \pi \cdot t.$$

Primjer 4:

Vlasnici tvrtke koja iznajmljuje brodove ustanovili su da, ako naplaćuju *p* eura na dan za iznajmiti brod ($50 \leq p \leq 200$), broj brodova *n* koje iznajmljuju na dan može biti opisan linearnom funkcijom $n(p) = 1000 - 5p$. Naplaćuju li 50 eura ili manje, iznajmit će sve brodove, a naplaćuju li 200 eura ili više neće iznajmiti niti jedan brod. Pretpostavka je da vlasnici namjeravaju naplaćivati između 50 i 200 eura. Koliko bi trebali naplaćivati da bi imali maksimalan prihod?

Rj:

Neka je *p* cijena iznajmljivanja broda na dan, *n* broj iznajmljenih brodova na dan i *R* prihod po danu. Treba naći maksimum od *R*.

Prihod na dan je jednak:

$$R = n \cdot p = (1000 - 5p) \cdot p = -5p^2 + 1000p$$

S obzirom da je pretpostavka da će vlasnici naplaćivati između 50 i 200 eura, problem se svodi na nalaženje maksimuma prihoda $R(p)$ na intervalu $[50, 200]$.

R je neprekidna i ograničena funkcija na danom intervalu, stoga ima maksimum.

$$R'(p) = -10p + 1000 = 0 \Rightarrow p = 100$$

$$R(100) = 50\,000$$

$$p = 50 \Rightarrow R(50) = 37\,500$$

$$p = 200 \Rightarrow R(200) = 0$$

Maksimum se postiže za $p = 100$.

Zaključak: vlasnici bi trebali naplaćivati 100 eura po danu za brod kako bi imali maksimalan prihod.

Primjer 5:

Brod plovi prema zakonu:

$$s = \left(1272,7 \cdot ln\frac{1 + 6 \cdot e^{0,055t}}{7} - 50t\right) \quad [m]$$

Treba odrediti početnu brzinu broda pri toj plovidbi.

Rj:

Brzina broda u bilo kojem trenutku može se dobiti derivacijom zakona puta po vremenu. Kada se u tako dobiveni izraz uvrsti vrijeme $t = 0$, dobiva se početna brzina broda.

$$v = \frac{ds}{dt} = 1272,7 \cdot \frac{7}{1 + 6 \cdot e^{0,055t}} \cdot \frac{6}{7} \cdot e^{0,055t} \cdot 0,055 - 50$$

$$v = \frac{420}{1 + 6 \cdot e^{0,055t}} - 50$$

Za $t = 0$, dobiva se početna brzina:

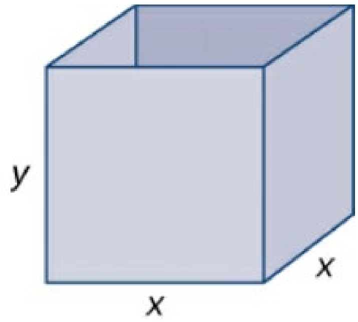
$$v_0 = \frac{420}{1 + 6} - 50 = 10\ m/s$$

Primjer 6:

Treba napraviti pravokutni spremnik za rasuti teret sa kvadratnom bazom, otvorenim vrhom i volumenom od $5000\ m^3$. Koje dimenzije spremnika trebaju biti da bi oplošje tog spremnika bilo minimalno?

Rj:

Neka je *x* duljina baze, *y* visina a *S* oplošje spremnika.



Oplošje spremnika računa se po formuli:

$$S = 4xy + x^2.$$

Volumen spremnika jednak je:

$$V = x^2 y = 5000\ m^3$$

$$\Rightarrow y = \frac{5000}{x^2}$$

Sada je oplošje jedanako:

$$S(x) = 4x \cdot \frac{5000}{x^2} + x^2$$

$$S(x) = \frac{20\ 000}{x} + x^2, x > 0$$

Stacionarne točke:

$$S'(x) = -\frac{20\ 000}{x^2} + 2x = 0 \Rightarrow x^3 = 10\ 000 \Rightarrow x = 10\sqrt[3]{10}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{100}$$

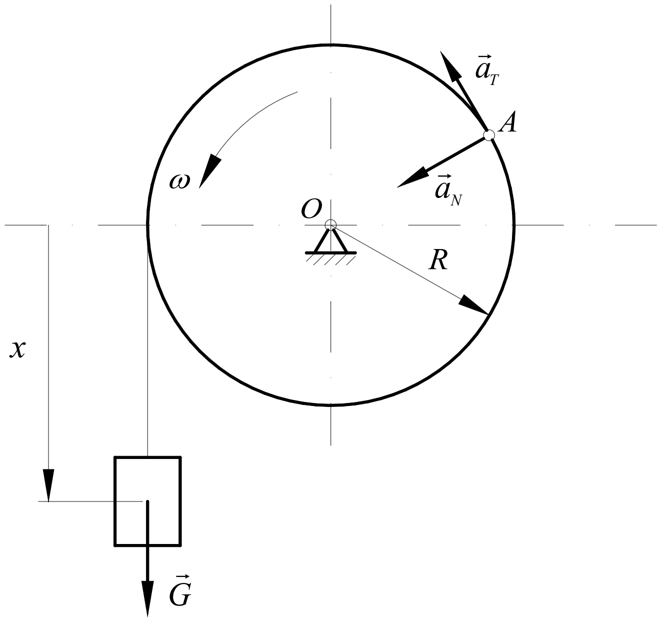
$$S''(x) = 2 \cdot \frac{20\ 000}{x^3} + 2$$

$$S''(10\sqrt[3]{10}) > 0$$

Zaključuje se da je točka $\left(10\sqrt[3]{10},\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{100}\right)$ minimum funkcije što povlači da bi dimenzije spremnika trebale biti $x = 10\sqrt[3]{10}, y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{100}$.

Primjer 7:

Teret *G* spušta se po zakonu $x = 80 \cdot t^{2,5}$, gdje je $x[m]$ i $t[s]$. Spuštanjem tereta dovodi se u rotacijsko gibanje bubanj na kojem je namotano uže kojim se pridržava teret *G*. Treba odrediti kutnu brzinu i kutno ubrzanje bubnja.



Rj:

Translacijsko gibanje tereta dovodi bubanj u rotacijsko gibanje. Pri ovakvom gibanju brzina spuštanja tereta jednaka je obodnoj brzini rotacijskog gibanja.

Brzina spuštanja tereta *G* iznosi:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(80 \cdot t^{2,5})}{dt} = 200 \cdot t^{1,5} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Kutna brzina bubnja dobiva se pomoću obodne brzine:

$$v = R \cdot \omega, \omega = \frac{v}{R} = \frac{200 \cdot t^{1,5}}{R}$$

$$\omega = 1000 \cdot t^{1,5} \left[s^{-1}\right]$$

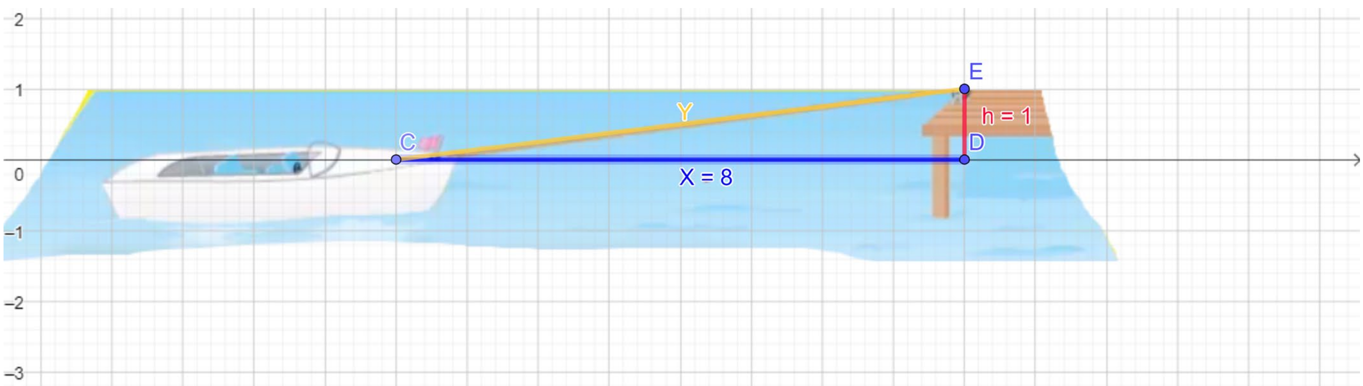
Kutno ubrzanje bubnja iznosi:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(1000 \cdot t^{1,5})}{dt} = 1500 \cdot t^{0,5} \quad \left[s^{-2}\right]$$

Primjer 8:

Čamac se na pristanište povlači konopom koji je jednim krajem pričvršćen za prednju stranu čamca, a drugi kraj prolazi kroz prsten pričvršćen za pristanište u točki 1 m višoj od prednje strane broda. Uže se vuče kroz prsten brzinom od 1 m/s. Koliko se brzo brod približava pristaništu kad je 8 m udaljen od pristaništa?

Rj:



Iz teksta zadatka zadana je brzina kojom se povlači brod tj. konop u jednoj sekundi pa vrijedi

$\frac{dy}{dt} = -1\ m/s$. Negativna je vrijednost jer duljina konopa je sve kraća i kraća (smanjuje se za 1 metar po sekundi).

Ako je čamac 8 m udaljen od pristaništa, potrebno je odrediti koliko brzo se približava pristaništu, tj. koliko brzo se udaljenost *d* mijenja po sekundi:

$$\frac{dx}{dt} = ?\ m/s$$

Iz pravokutnog trokuta vrijedi:

$$y^2 = x^2 + h^2\ /\left(\frac{d}{dt}\right)$$

Jednadžba se derivira tj. traži se promjena varijabli po vremenu *t*

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 0$$

h je konstanta pa je $\frac{dh}{dt} = 0$

$$\frac{2y}{2x}\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{2x}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{2 \cdot 8.06m}{2 \cdot 8\ m} \cdot (-1\ m/s) = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{8.06}{8}m/s = -1.011m/s$$

Iz trokuta vrijedi:

$$y^2 = x^2 + h^2$$

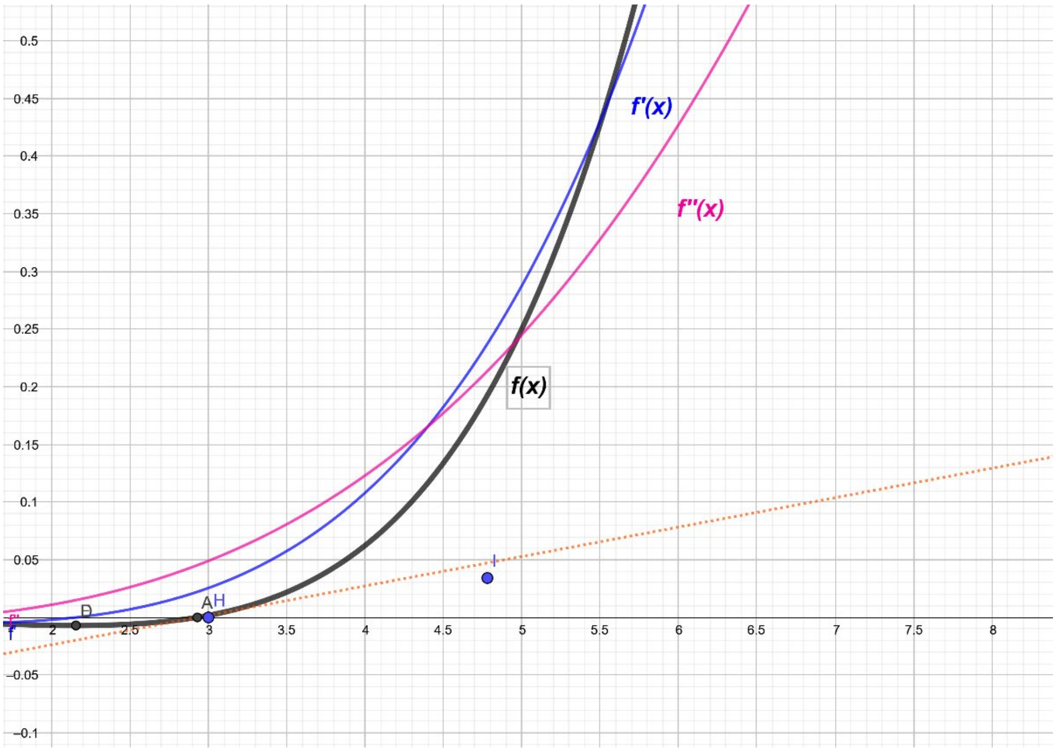
$$y = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$y = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65} \approx 8.06$$

Primjer 9:

Savijanje čeličnog nosača dano je jednadžbom $f(x) = 10^{-4}(x^5 - 25x^2)$ gdje je sa *x* označena udaljenost od oslonca. Izračunaj drugu derivaciju (promjenu koeficijenta smjera tangente) za 3.

Rj:



$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(10^{-4}x^5)}{dx} - \frac{d(10^{-4}25x^2)}{dx} = 10^{-4}(5x^4 - 50x)$$

$$y'' = 10^{-4}(20x^3 - 50)$$

$$y''_{x=3} = 0.049\left[\frac{1}{m}\right]$$