6 MATEMĀTISKĀ ANALĪZE

KOPSAVILKUMS

Nodaļā aplūkotie teorētiskie jautājumi un detalizēti paskaidrotie piemēri ir domāti, lai studenti labāk varētu izprast tēmu, kā arī studēt doto materiālu patstāvīgi. Tiek izskaidroti funkciju atvasināšanas pamatpricipi un to nozīme. Tiek aplūkti atvasināšans likumi un paņēmieni. Atvasinājuma pielietojumu piemēri doti arī funkciju izpētē – aprēķinot pieskares un normāles vienādojumus, pētot funkcijas monotonitātes intervālus un lokālos ekstrēmus, kā arī pārliekuma punktus. Aplūkotas tiek arī atvasināšanas metodes robežu aprēķinos. Lasītājs tiek iepazīstināts ar funkcijas diferenciāla jēdzienu. Svarīgs funkcijas atvasinājuma pielietojums dots arī tādu ekstrēma uzdevumu risināšanā, kuriem ir praktiska nozīme. Parādīts arī atvasinājumu pielietojums jūrniecības jautājumu risināšanā. Atbilstošus funkciju grafikus var konstruēt ar dažādu programme palīdzību (Geogebra, Excel, Desmos un citām).

MĒRĶIS: Apgūt funkciju atvasināšanas likumus, iepazīt atvasinājumu un diferenciaļu pielietošanas iespējas, prast lietot atvasinājumus praktisku jautājumu risināšanā.

Mācību rezultāts:

1. Studenti prot definēt funkcijas atvasinājumu un diferenciāli
2. Prot atvasināt pamatelementāras un saliktas funkcijas
3. Prot atvasināt parametriski dotas, kā arī netiešā veidā dotas funkcijas
4. Izprot funkcijas atvasinājums ģeometrisko jēgu
5. Prot pieleitot atvasinājumus, lai noteiktu funkcijas ekstrēmus, kā arī tās grafika pārliekuma.
6. Prot izpildīt funkcijas pētīšanas jautājumus un konstruēt atbilstošu grafiku

Priekšzināšanas: Studenti pazīst pamatelementārās funkcijas un to īpašības; prot aprēķinat funkciju robežas ar algebriskām metodēm; zina algebras un trigonometrijas fiormulas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: atvasinājumus plaši lieto fizikā un mehānikā, piemēram aplukojot ķermeņu pārvietosānas atrumu, paātrinājumu. Piemēram, metereologijā lieto atvasina'jumus, lai prognozētu ekstrēmālus laika apstākļus gan jūrā, gan uz sauszemes. Svarīga nozīmē atvasinājumiem ir arī kuģniecības nozarē, izvērtējot dažādus biznesa riskus. Stabilitātes teorijā, navigācijas teorijā dažādus jautājumus risina ar atvasinājumu palīdzību.

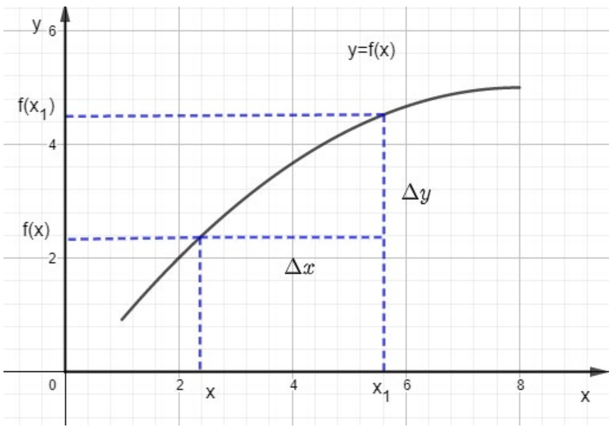
Saturs

6.1. Funkcijas atvasinājums

Viens no matemātikas svarīgākajiem jēdzieniem ir funkcijas atvasinājums, ko plaši pielieto diferenciālrēķinos. Matemātisko analīzi radīja divi izcilli matemātiķi – vācu matemātiķis,, filozofs, jurists Gotfrīds Vilhelms Leibnics (1646-1716) un angļu matemātiķis, fiziķis un astronoms Īzaks Ņūtons (1642-1727). 18 gadsimtā izcēlas lieli strīdi par to, kurš no viņiem bijis pirmais atklājējs un kurš ir piesavinājies otra zinātnieka darbu. Kā zināms, abi matemātiķi strādāja neatkarīgi un apvainojumi bija nepatiesi. Tieši Leibnica un Ņutona darbos tika ieviests atvasinājums jēdziens. Īzaks Ņutons to aprakstīja pirms 1669 gada, risinot uzdevumu par ķermeni, kurš nevienmērīgi pārvietojas pa doto taisni. Savukārt Gotfrīds Leibnics pētīja funkcijas maiņas momentāno atrumu, lai noteiktu funkcijas grafika punktā novilktās pieskares virziena koeficientu (1670. gadā).

Dota funkcija $y = f(x)$, kura ir nepārtraukta punktā x un tā apkārtnē, tas nozīmē arī, ka tā ir defināta punktā x un tā apkārtnē.

Atcerēsimies, kas ir funkcijas argumenta pieaugums Δx un funkcijas pieaugums Δy punktā x.



Attēls 1

Ja fiksētajā punktā x ir nobīde $\Delta x = x_1 - x$ pa x-asi, tā izraisa arī funkcjas vērtību izmaiņas

$$\Delta y = f(x) - f(x_1)$$

Ievērojot, ka funkcija argumenta x apkārtnē ir nepārtraukta (zinām – šī intervāla katrā punktā bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums punkta x apkārtnē – skatīt funkcijas nepārtrauktības definīciju), tad varam aplūkot attiecību

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

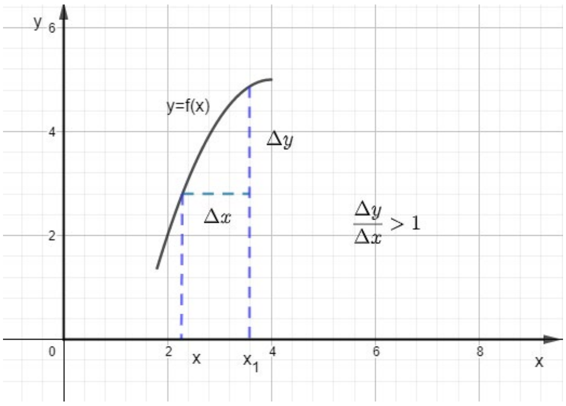
Attiecība raksturo funkcijas vidējo maiņas ātrumu intervālā Δx. Varam novērtēt šo attiecību, piemēram, ja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 1,$$

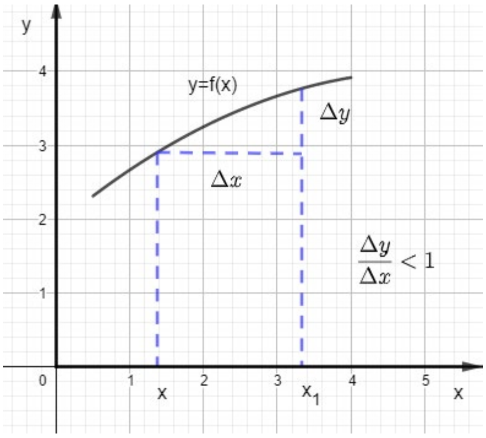
funkcija ir pieaug strauji, bet, ja attiecība

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 1,$$

tā aug lēnāk (skat. attēlu 2 a) un b)).



a)



b)

Attēls 2

6.2 Funkcijas atvasinājuma punktā x definīcija

Ja aplūkojam, kas ar funkciju notiek gadījumā, kad $\Delta x \to 0$, tad iegūstam funkcijas pieaugšanas momentāno ātrumu punktā x. To izsaka ar robežas palīdzību

Definīcija. Par funkcijas $y = f(x)$ *atvasinājumu pēc argumenta x* sauc funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecību, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli

$$\boldsymbol{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Atvasinājumu apzīmē

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df(x)}{dx},$$

kuru lasa „igrek prim" vai „de-igrek pēc de-x" .

Darbību sauc par *atvasināšanu* jeb *diferencēšanu.*

Aplūkosim pāris piemērus, kā atrast funkcijas atvasinājumu pēc definīcijas.

Piemērs 1

Aprēķināsim funkcijas $y = 4x$ atvasinājumu. Saskaņā ar definīciju

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x + \Delta x) - 4x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4$$

Piemērs 2

Aprēķināsim funkcijas $y = x^2$ atvasinājumu. Vispirms veiksim funkcijas pieauguma vienkāršošanu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

Tad aprēķinām atvasinājumu

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Piemērs 3

Aplūkosim funkciju $y = \sin x$. Te, lai varētu vienkāršot funkcijas pieauguma izteiksmi, būs jālieto trigonometrijas formula funkciju summas (starpības) pārveidošanai reizinājumā

$$\boldsymbol{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right)\sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) =$$

$$= 2\cos x \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Funkcijas atvasinājumu aprēķināsim, izmantojot pirmo ievērojamo robežu

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos x \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \cos x \cdot \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Sinusa funkcijas atvasinājums ir

$$\boldsymbol{(\sin x)' = \cos x}$$

Komentārs. Aprēķinā ievērojam, ka funkcija $\cos x$ nav atkarīga no robežas mainīgā Δx, tāpēc to var iznest pirms robežas zīmes kā reizinātāju. Skaitli 2 var nonest izteiksmes saucējā kā dalītāju.

Piemērs 4

Apskatīsim naturālā logaritma funkciju $y=\ln x$. Lai atrastu šīs funkcijas atvasinājumu pēc definīcijas, lLietotim dažādas logaritmu un robežu īpašības, kā arī otro ievērojamo robežu

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha x+\beta}=e^{\alpha}$$

Funkcijas pieaugums

$$\Delta y=ln(x+\Delta x)-lnx=ln\frac{x+\Delta x}{x}=ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

Atvasinājuma definīcija

$$(lnx)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=ln\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)=\left|\begin{matrix} apzīmē: & \frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{t}; & \Delta x=\frac{x}{t} \\ & ja\ \Delta x\to 0, tad & t\to\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}}\right)=ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{x}$$

Atradām logaritmiskās funkcijas atvasināšanas formulu

$$\boldsymbol{(lnx)'=\frac{1}{x}}$$

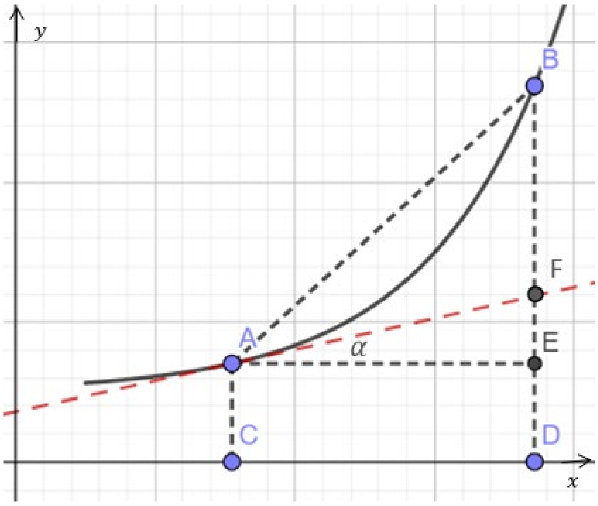
6.3 Funkcijas atvasinājuma ģeometriskā interpretācija

Apskatīsim funkciju $y=f(x)$, kas definēta intervālā $[x_0,x_0+\Delta x]$. Atbilstošos punktus uz grafika apzīmēsim ar A un B, bet intervāla galapunktus ar C un D (skat. attēlu 3). Punktu koordinātes ir $A(x_0,f(x_0))$, $B(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$.

No punkta A novilksim nogriezni AE, kas krusto BD un ir paralēls x-asij.

Punktā A novilksim grafika pieskari AF (attēlā 3 sarkanā pārtrauktā līnija). Pieskare veido leņķi α ar x-asi.

Apskatīsim taisnleņķa trijstūri ABE. Punkta C x-koordināte ir x_0, bet punkta D x-koordināte ir $x_0+\Delta x$. Tad funkcijas argumenta pieaugums un funkcijas pieaugums punktā x_0 ir nogriežņu garums $CD=AE=\Delta x$ un $ED=\Delta y$ atbilstoši.



Attēls 3

Aplūkosim leņķi ∡BAE, ko var izteikt ar tangensa funkcijas palīdzību

$$tg(\measuredangle BAE) = \frac{BE}{AE} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Tagad izpētīsim situāciju – kas notiks, ja punkts B slīdēs pa grafiku punkta A virzienā. Ievērojot, ka punkta B projekcija uz x-ass ir punkts D, tad arī punkti D, E, F tuvosies punktam A un nogrieznis CD samazināsies jeb Δx tieksies uz nulli. Trijstūra ABE hipotenūza AB saīsināsies. Tā ir arī loka AB horda, kura tuvosies pieskarei AF. Tad leņķis

$$\measuredangle BAE \to \alpha, \qquad ja\ \ \Delta x \to 0.$$

Robežgadījumā

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg(\measuredangle BAE) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \Big|_{x\, =\, x_0} = \mathrm{tg}\alpha$$

Zināms, ka $\mathrm{tg}\alpha$ ir pieskares AF virziena koeficients.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k_A$$

Funkcijas atvasinājuma ģeometriskā nozīme: Funkcijas atvasinājums punktā x_0 ir vienāds ar tādas pieskares vienādojuma virziena koeficientu, kas funkcijas grafikam novilkta punktā $A(x_0, f(x_0))$. Pieskares vienādojums ir

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = k_A(x - x_0)}$$

Funkcijas grafika normāle, kas tam novilkta punktā A, ir taisne, kas perpendikulāra pret šajā punktā novilkto pieskari. Perpendikulārām taisnēm virziena koeficientu sakarība ir

$$\boldsymbol{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

Tad normāles vienādojums ir

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = -\frac{1}{k_A}(x - x_0)}$$

Piemērs

Dota funkcija $y = x^2$. Atrast tās pieskares un normāles vienādojumus punktā $x = -1$.

Atrisinājums

Dotās funkcijas grafiks ir parabola. Pieskari vilksim funkcijas grafikam punktā $A(-1;\ 1)$.

Aprēķināsim pieskares virziena koeficientu

$$y' = (x^2)' = 2x$$

$$k_1 = 2x\Big|_{x\,=\,-1} = -2$$

Pieskares vienādojums ir

$$y - 1 = -2(x + 1)$$

$$y = -2x - 1$$

Normāles virziena koeficients ir

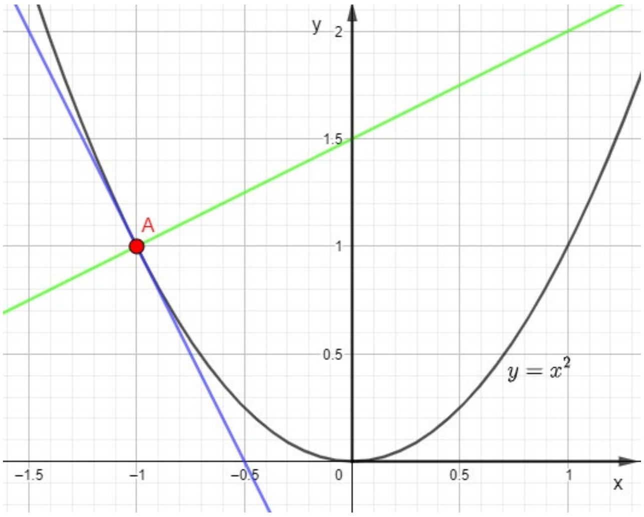
$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}$$

Normāles vienādojums ir

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$y = 0{,}5x + 1{,}5$$

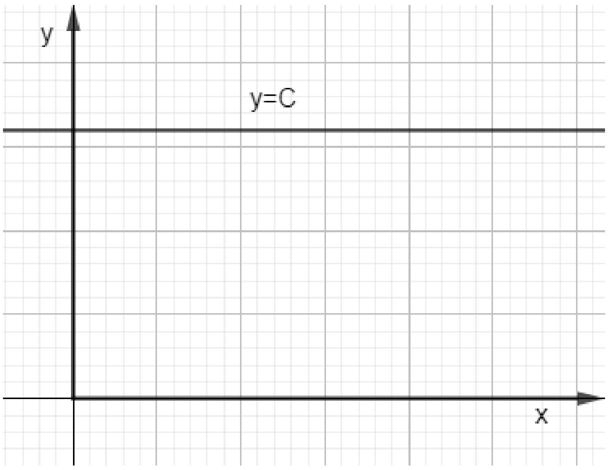
Konstruējam funkcijas grafiku un tā pieskari un normāli punktā A. Attēlā 4 pieskare ir zilā krāsā, bet normāle ir zaļā krāsā.



Attēls 4

6.4 Atvasināšanas likumi un to pielietojums

Vispirms apskatīsim konstantas funkcijas $y = C$ atvasinājumu. Tās grafiks ir horizontāla taisne, kas iet caur punktu C uz y-ass (skat.attēlu 5).



Attēls 5

Aprēķināsim šīs funkcijas pieaugumu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

Funkcijas pieaugums visā funkcijas definīcijas apgabalā ir 0, jo visos definīcijas apgabala punktos funkcijas vērtības ir vienādas.

Tad funkcijas atvasinājums

$$y' = C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Jeb, ja $y = C$, tad $\boldsymbol{C' = 0}$.

Tālāk aplūkosim divu *nepārtrauktu* funkciju summas, starpības, reizinājuma un dalījuma atvasināšanas likumus. Dotas divas nepārtraukta funkcijas $u = u(x)$ un $v = v(x)$.

1) Divu funkciju summas atvasinājums ir vienāds ar atsevišķo funkciju atvasinājumu summu

$$\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$$

Pamatojums:

Izteiksim funkciju summas pieaugumu

$$\begin{aligned}\Delta y &= (u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x)) = \\ &= u(x+\Delta x) - u(x) + +v(x+\Delta x) - v(x) = \\ &= \Delta u + \Delta v\end{aligned}$$

Tad

$$(u+v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

2) Līdzīgi var pamatot funkciju starpības atvasinājuma likumu

$$\boldsymbol{(u-v)' = u' - v'}$$

3) Pamatosim funkciju reizinājuma atvasinājuma likumu

$$\boldsymbol{(u \cdot v)' = u'v + v'u}$$

Pamatojums:

Ievērosim

$$u(x+\Delta x) - u(x) = \Delta u$$

Tad funkcijas vērtību pieauguma punktā var izteikt

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u = u + \Delta u$$

Vienkāršosim funkciju reizinājuma pieauguma izteiksmi

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= (u+\Delta u)(v+\Delta v) - u \cdot v = \\ &= uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v - uv = \\ &= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v\end{aligned}$$

Aprēķināsim atvasinājumu

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u' \cdot 0 + v \cdot u' + u \cdot v' = v \cdot u' + u \cdot v'$$

Komentārs. Dotās funkcijas ir npeārtrauktas, tāpēc funkcijas v pieaugums Δv tiecas uz nulli, ja Δx tiecas uz nulli.

No šīs īpašības izriet sekas

$$(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))' = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$$

4) Dalījuma likumu pamato, balstoties uz funkciju reizinājuma atvasināšanas likumu:

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}^2}$$

Pamatojums:

Funkciju dalījumu pārveidosim kā reizinājumu

$$y = \frac{u}{v}; \quad u = v \cdot y$$

Tad atvasinājums ir

$$u' = v'y + y'v$$

Veiksim apgebriskus pārveidojumus

$$y'v = u' - v'y = u' - v' \cdot \frac{u}{v}$$

$$y'v = \frac{u'v - v'u}{v}$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Jau iepriekš pēc definīcijas pamatojām, ka

$$(sinx)' = cosx$$

Līdzīgi var pierādīt, ka

$$(cosx)' = -sinx$$

Izmantojot funkciju dalījuma formulu, pamatosim tangensa funkcijas atvasinājumu

$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - (cosx)'sinx}{cos^2x} = \frac{sin^2x + cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

Līdzīgi var pamatot, ka kotangensa funkcijas atvasinājums ir

$$(\mathrm{ctg}x)' = \frac{-1}{sin^2 x}$$

6.5 Saliktas funkcijas atvasināšana

Aplūkosim saliktu funkciju

$$y = f(u), \qquad \text{kur } u = u(x)$$

Saliktas funkcijas, *piemēram*, ir

1) $y = \sin 2x = \sin(2x)$

   Te saliktās funkcijas arguments ir funkcija $u(x) = 2x$, bet arējā funkcija ir $f(u) = \sin u$

2) $y = \sin x^2 = \sin(x^2)$

   Te saliktās funkcijas arguments ir funkcija $u(x) = x^2$, bet arējā funkcija ir $f(u) = \sin u$

3) $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$

   Te saliktās funkcijas arguments ir funkcija $u(x) = \sin x$, bet arējā funkcija ir $f(u) = u^2$

4) $y = e^{\sin x} = f(\sin x)$

   Te saliktās funkcijas arguments ir funkcija $u(x) = \sin x$, bet arējā funkcija ir $f(u) = e^u$

Kā atvasināt saliktu funkciju? Izmantosim funkcijas atvasinājuma definīciju

$$\boldsymbol{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Apskatīsim funkcijas pieauguma pēc argumenta pieauguma attiecību

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pārveidosim šo izteiksmi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Aprēķināsim robežu

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x$$

Esam ieguvuši saliktas funkcijas atvasinājuma likumu

$$\boldsymbol{(f(u))'=f'(u)\cdot u'}$$

Atvasināsim funkcijas, kuras aplūkojām iepriekšējos piemēros.

Piemērs 1

$y=\sin 2x;\ \ u=2x$

Iepriekš pierādījām, ka $(\sin x)'=\cos x$, savukārt $(2x)'=2$, ko var iegūt līdzīgi, kā Piemēra 1 aprēķinā (skat. nodaļu „6.2 Funkcijas atvasinājuma definīcija“).

Tad, saskaņā ar saliktas funkcijas atvasinājuma likumu

$$\boldsymbol{(\sin u)'=\cos u\cdot u'}$$

Seko

$(sin2x)'=cos(2x)\cdot(2x)'=cos(2x)\cdot 2$

Piemērs 2

$y=\sin x^2;\ \ u=x^2$

Iepriekš pierādījām, ka $(\mathrm{x}^2)'=2x$

Tad, saskaņā ar saliktas funkcijas atvasinājuma likumu

$$\boldsymbol{(\sin u)'=\cos u\cdot u'}$$

Seko

$(sinx^2)'=cos(x^2)\cdot(x^2)'=cos(x^2)\cdot 2$

Piemērs 3

$y=\sin^2 x=(\sin x)^2;\ \ \ u(x)=\sin x$
Zinām, ka $(\mathrm{x}^2)'=2x$

Tad, saskaņā ar saliktas funkcijas atvasinājuma likumu

$$\boldsymbol{(u^2)'=2u\cdot u'}$$

Veicam atvasinājumu un rezultātam pielietojam sinusa funkcijas dubultleņķa formulu

$(\sin^2 x)'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$

6.6 Pamatelementāro funkciju atvasināšanas formulas

Mēs jau apskatījām vairāku funkciju atvasinājumus, kur formulas ieguvām, aprēķinot funkcijas atvasinājumu pēc definīcijas. Piemēram, $(4x)'=4;\ \ (x^2)'=2x$. Abas funkcijas ir pakāpes funkcijas. Tomēr, risināt robežas uzdevumu katram atsevišķam gadījumam ir neracionāli. Tāpēc aplūkosim pakāpes funkcijas vispārīgo izteiksmi

$$y(x) = x^n$$

Lai vienkāršotu aprēķinu, šo izteiksmi logaritmēsim un izmantosim logaritma īpašību

$$\mathbf{\log_a b^k = k \cdot \log_a b}$$

$$\ln(y(x)) = \ln(x^n) = n \cdot \ln x$$

Vienādības kreisajā pusē ir salikta funkcija, jo $y(x)$ ir funkcija no argumenta x. Pirmīt pamatojām, ka $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Tad pēc saliktas funkcijas atvasinājuma likuma

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

Ja divas funkcijas ir vienādas, tad to atvasinājumi arī ir vienādi, tāpēc

$$(\ln(y))' = (n \cdot \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x}$$

Pareizināsim abas vienādības puses ar y

$$y' = n \cdot \frac{1}{x} \cdot y = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Ieguvām pakāpes funkcijas atvasināšanas formulu

$$\boldsymbol{y' = n \cdot x^{n-1}}$$

Līdzīgi iegūst eksponentfunkcijas $y = e^x$ atvasinājumu:

$$\ln(y) = \ln(e^x) = x \cdot \ln e = x; \quad x' = 1$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = x' = 1$$

$$y' = 1 \cdot y = e^x$$

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$$

Ciklometriskās funkcijas atvasina, tās vispirms apvēršot, piemēram, apskatīsim funkciju $y = arcsinx$. Izsakām x kā funkciju no argumenta y:

$$x = sin\, y; \;\; y = y(x)$$

Funkcija $\sin y$ ir salikta funkcija, tāpēc to atvasina pēc saliktas funkcijas atvasināšanas likuma

$$x' = (siny)' = cosy \cdot y'$$

$$1 = cosy \cdot y'$$

Izteiksim atvasinājumu y' un pielietosim trigonometrijas identitāti

$$\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

$$y' = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Formula arksinusa funkcijas atvasināšanai ir

$$\boldsymbol{(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Apkoposim atvasināšanas likumus un formulas

Atvasināšanas likumi

$$C' = 0;\ \ C \in \mathbb{R}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(Cu)' = C(u)'$$

Atvasināšanas formulas

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$	7. $(cosx)' = -sinx$	13. $(\mathrm{cth}x)' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2x}$
2. $(e^x)' = e^x$	8. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$	14. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(a^x)' = a^x lna$	9. $(ctgx)' = \frac{-1}{sin^2x}$	15. $(arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $(lnx)' = \frac{1}{x}$	10. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$	16. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
5. $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$	11. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$	17. $(arcctgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$
6. $(sinx)' = cosx$	12. $(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$	

Aplūkosim vairākus piemērus, kur funkciju atvasināšanā lietosim atvasināšanas likumus un formulas.

Piemērs 1

$$y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$$
$$y' = (3x^3 - 4x^2 + 5x + 6)' =$$
$$= (3x^3)' - (4x^2)' + (5x)' + 6' =$$
$$= 3(x^3)' - 4(x^2)' + 5(x)' + 6' =$$
$$= 3 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 5 + 0 =$$
$$= 9x^2 - 8x + 5$$

Piemērs 2

$$y = x^3 \cdot \sqrt{x} + \frac{2}{4x}$$

Vispirms pārveidosim doto funkciju, izmantojot pakāpju īpašības

$$y = x^3 \cdot \sqrt{x} + \frac{2}{4x} = x^{3+\frac{1}{2}} + \frac{2}{4} \cdot x^{-1} = x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2} \cdot x^{-1}$$
$$y' = \left(x^{\frac{7}{2}}\right)' + \frac{1}{2} \cdot (x^{-1})' =$$
$$= \frac{7}{2} x^{\frac{7}{2}-1} + \frac{1}{2} \cdot (-1) x^{-1-1} =$$
$$= \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} x^{-2}$$

Piemērs 3

$$y = 2log_2 x - ctgx + \sqrt{sin1}$$
$$y' = 2(log_2 x)' - (ctgx)' + \left(\sqrt{sin1}\right)' =$$

(Ievērosim, ka sin(1) ir konstante)

$$= 2\frac{1}{x\,ln2} - \frac{-1}{sin^2 x} + 0 =$$
$$= \frac{2}{x\,ln2} + \frac{1}{sin^2 x}$$

Aplūkosim funkciju atvasināšanas piemērus, kur dots funkciju reizinājums vai dalījums

Piemērs 4

$$y = sinx \cdot e^x$$
$$y' = (sinx)' \cdot e^x + sinx \cdot (e^x)' =$$
$$= cosx \cdot e^x + sinx \cdot e^x$$

Piemērs 5

$$y = \frac{2x^2 + 4x}{3x - 1}$$

$$y' = \frac{(2x^2 + 4x)'(3x - 1) - (3x - 2)'(2x^2 + 4x)}{(3x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(4x + 4)(3x - 1) - 3(2x^2 + 4x)}{(3x - 1)^2} =$$

$$= \frac{12x^2 + 8x - 4 - 6x^2 - 12x}{(3x - 1)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 4x - 4}{9x^2 - 6x + 1}$$

Aplūkosim dažus piemērus, kuros atvasināsim saliktas funkcijas

Piemērs 6

$$y = (8x^3 - 0.5x^2 + 12)^4$$

$$y' = ((8x^3 - 0.5x^2 + 12)^4)' = 4(8x^3 - 0.5x^2 + 12)^3 \cdot (8x^3 - 0.5x^2 + 12)' =$$

$$= 4(8x^3 - 0.5x^2 + 12)^3 \cdot (24x^2 - x)$$

Komentārs. Ievērosim ka ārējā funkcija ir pakāpes funkcija, tad

$$(u^4)' = 4u^3 \cdot u'$$

Piemērs 7

$$y = \sin\left(\sqrt{4x^2 + 2}\right)$$

Šajā uzdevuma ievērosim, ka ir saliktas 3 funkcijas – ārējā funkcija ir sinusa funkcija, tās arguments ir kvadrātsakne, bet kvadrātsaknes arguments ir kvadrātiska funkcija.

$$y' = \left(\sin\left(\sqrt{4x^2 + 2}\right)\right)' = \cos\left(\sqrt{4x^2 + 2}\right) \cdot \left(\sqrt{4x^2 + 2}\right)' =$$

$$= \cos\left(\sqrt{4x^2 + 2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 2}} \cdot (4x^2 + 2)' =$$

$$= \cos\left(\sqrt{4x^2 + 2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 2}} \cdot 8x$$

Komentārs. Te izmantojām saliktas funkcijas atvasināšanas formulas:

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u' \quad \text{un} \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

Piemērs 8

$$y = \ln(\mathrm{ch}x \cdot 5^x)$$

$$y' = \left(\ln(\mathrm{ch}x \cdot 5^x)\right)' = \frac{1}{\mathrm{ch}x \cdot 5^x} \cdot (\mathrm{ch}x \cdot 5^x)' =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}x \cdot 5^x} \cdot \left((\mathrm{ch}x)' \cdot 5^x + \mathrm{ch}x \cdot (5^x)'\right) =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}x \cdot 5^x} \cdot (\mathrm{sh}x \cdot 5^x + \mathrm{ch}x \cdot 5^x \cdot \ln 5)$$

Komentārs. Te vajadzēja ievērot, ka logaritma funkcijas arguments ir divu funkciju reizinājums.

6.7 Vingrinājumi

1. Izmantojot atvasināšanas likumus un funkcijas $y = e^x$ atvasināšanas formulu, pierādīt hiperbolisko funkciju atvasināšanas formulu pareizību

   Hiperboliskajas sinusam $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$

   Hiperboliskajas kosinusam $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$

   Hiperboliskajam tangensam $(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

2. Aprēķināt funkcijas atvasinājumu pēc definīcijas

   $a)\ y = 2x^3;$

   $b)\ y = 6x - 8$

3. Aprēķināt funkciju atvasinājumus, izmantojot pamatformulas un atvasināšanas likumus

   $a)\ y = 7x^2 - \frac{4}{x^3} + 0.5\sqrt{x} + 6$

   $b)\ y = \ln x + \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{x^{-2} \cdot x^{1/3}}$

   $c)\ t = 2\mathrm{arctg}y + \arccos 0.5 - \sqrt{2} \cdot 3^y$

   $d)\ r = 2\varphi\cos\varphi$

   $e)\ y = e^x \cdot 9^x$

   $f)\ y = \dfrac{\mathrm{ctg}x}{2\sqrt{x}}$

4. Aprēķināt saliktu funkciju atvasinājumus

   $a)\ y = cos(x^2 + 12x - 1)$

   $b)\ y = log_2 \dfrac{3\sqrt[3]{x}}{e^x}$

$c)\ y = ln(\sqrt{2x^2+1} - 2) + ln(\sqrt{2x^2-1} + 2)$

$d)\ s = cos^3(arctg(2t))$

$e)\ y = \dfrac{2^{\sqrt{5x-1}}}{(3x^2-2)\cdot sinx}$

$f)\ y = \dfrac{e^{-x^2}\cdot arcsin\left(e^{-x^2}\right)}{\sqrt{2e^{-x^2}-1}}$

6.8 Parametriskā veidā dotu funkciju atvasināšana

Apskatīsim parametriski dotu funkciju

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Apskatīsim funkcijas atvasinājuma definīciju un veiksim pārveidojumu, ievērojot funkciju nepārtrauktību

$$y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}} =$$

$$= y'_t\cdot\frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Komentārs. Pirmkārt, piereizinām robežu ar $\frac{\Delta t}{\Delta t}$, bet pēc tam sagrupējam reizinātājus. Ievērojot, ka funkcija $x(t)$ ir nepārtraukta, varam aizvietot robežas argumentu Δx ar Δt. Saskaņā ar definīciju, esam ieguvuši divu funkciju atvasinājumus pēc argumenta t.

Parametriski dotas funkcijas atvasinājums pēc argumenta x ir

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Dažkārt to mēdz pierakstīt arī, atvasinājumu pēc parametra t pierakstot kā funkcijas izteiksmi ar augšējo punktu:

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

Piemērs

Dota funkcija $\begin{cases} x = 3\sqrt{t} + 2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$

Vispirms atradīsim abu doto funkciju atvasinājumus pēc parametra t, tad izteiksim funkcijas y atvasinājumu pēc argumenta x

$$\dot{x} = \left(3\sqrt{t} + 2\right)' = \frac{3}{2\sqrt{t}}$$

$$\dot{y} = (4t^3)' = 12t^2$$

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{12t^2}{3} \cdot 2\sqrt{t} = 8t^2\sqrt{t}$$

6.9 Apslēptā veidā dotu funkciju atvasināšana

Līdz šim, runājot par funkcijas atvasinājumu, aplūkojām atklātā veidā dotas funkcijas, tas ir,

$$y = f(x).$$

Kā zināms, funkcija var būt uzdota arī parametriski. Funkcija var būt uzdota arī apslēptā veidā, pierakstā iekļaujot gan neatkarīgo mainīgo x, kā arī pašu funkciju y, kuras arguments ir mainīgais x. Funkciju pieraksta ar vienādojuma palīdzību

$$F(x, y) = 0,$$

kur ir zināms, ka $y = y(x)$.

Lai atrastu funkcijas y atvasinājumu pēc argumenta x, atvasinām vienādojuma kreiso un labo pusi, saprotot, ka izteiksme no argumenta y ir salikta funkcija. Aplūkosim pāris piemērus.

Piemērs 1

Dota funkcija $y^2 - 2x + xy = 0$, kur $y = y(x)$. Atrast funkcijas atvasinājumu y'_x.

$$(y^2 - 2x + xy)' = 0'$$

Te ievērosim, ka y^2 ir salikta funkcija, bet xy ir funkciju reizinājums.

$$2y \cdot y' - 2 + x'y + y'x = 0$$

Izteiksim funkcijas atvasinājumju

$$y'(2y + x) = 2 - y$$

$$y' = \frac{2 - y}{2y + x}$$

Piemērs 2

Dota funkcija $\sin x \cdot \cos y + 2y = 0$

Atvasinām

$$(\sin x \cdot \cos y + 2y)' = 0'$$

$$(\sin x)' \cdot \cos y + \sin x \cdot (\cos y)' + 2y' = 0$$

$$\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \cdot y' + 2y' = 0$$

Izskām funkcijas atvasinājumu

$$y' = \frac{-\cos x \cdot \cos y}{2 - \sin x \cdot \sin y}$$

6.10 Augstāku kārtu atvasinājumi

Dota funkcija $y = f(x)$ un tās atvasinājums y'_x, kas arī ir kāda funkcija, kuru arī var atvasināt, tādā kārtā iegūstot funkcijas otrās kārtas atvasinājumu.

Definīcija. Funkcijas *otrās kārtas atvasinājums* ir funkcijas pirmās kārtas atvasinājuma atvasinājums pēc argumenta x

$$y'' = (y')' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Līdzīgā veidā funkcijas atvasināšanu var turpināt, iegūtot trešās kārtas, ceturtās kārtas un arī citu augstāku kārtu atvasinājumus, kurus pieraksta y''', y^{IV}; y^{V}; ... Augstāku kārtu atvasinājumus dažkārt apzīmē arī ar arābu cipariem iekavās, piemēram, n-tās kārtas atvasinājums tiek apzīmēts $y^{(n)}$**.** Lai iegūtu, piemēram, funkcijas trešās kārtas atvasinājumu, vispirms jāaprēķina pirmās kārtas atvasinājums. Tad to vēlrēz atvasina, iegustot otrās kārtas atvasinājumu, kuru vēlreiz atvasina.

Piemērs 1

Dota funkcija $y = e^x$

Šīs funkcijas atvasinājums ir $y' = e^x$. Funkcijas otrās kārtas atvasinājums ir

$y'' = (y')' = (e^x)' = e^x$

Līdzīgi $e^x = y = y' = y'' = y''' = \cdots = y^{(n)}$.

Piemērs 2

Dota funkcija $y = 5x^3 - 6x^2 + 12x - 1$. Atrast tās trešās kārtas atvasinājumu.

$y' = 5(x^3)' - 6(x^2)' + 12x' - 1' =$

$= 15x^2 - 12x + 12$

$y'' = 15(x^2)' - 12x' + 12' =$

$= 30x - 12$

$y''' = 30x' - 12' = 30$

Piemērs 3

Dota funkcija $y = \mathrm{tg}x$. Atrast tās otrās kārtas atvasinājumu.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2}$$

Pirmās kārtas atvasinājums ir salikta funkciju, kuru vajag atvasināt pēc salikta funkcijas atvasinājuma likuma

$$y'' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' =$$
$$= 2(\cos x)^{-3} \cdot \sin x$$

Aplūkosim **parametriski dotas funkcijas otrās kārtas atvasinājumu**.

Dota funkcija

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Tās pirmās kārtas atvasinājums pēc argumenta x ir

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Tad otrās kārtas atvasinājums ir

$$y''_x = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)'_x = \frac{\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)'_t}{\dot{x}} =$$
$$= \frac{\frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Parametriski dotas funkcijas otrās kārtas atvasinājums ir

$$\boldsymbol{y''_x = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}}$$

Piemērs 4

Dota funkcija

$$\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = \text{arctg} t \end{cases}$$

Aprēķināt tās otrās kārtas atvasinājumu

Vispirms aprēķināsim šīs funkcijas pirmās un otrās kārtas parametriskos atvasinājumus.

$$\dot{x} = 2\cos t; \;\; \ddot{x} = -2\sin t$$

$$\dot{y} = \frac{1}{1+t^2}; \;\; \ddot{y} = ((1+t^2)^{-1})' = -(1+t^2)^{-2} \cdot 2t$$

Izsakām funkcijas otrās kārtas atvasinājumu pēc argumenta x

$$y''_x = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} =$$

$$= \frac{-(1+t^2)^{-2} \cdot 2t \cdot 2\cos t - (-2\sin t) \cdot \frac{1}{1+t^2}}{(2\cos t)^3} =$$

$$= \frac{\frac{-4t\cos t}{(1+t^2)^2} + \frac{2\sin t}{1+t^2}}{8\cos^3 t} = \frac{-4t\cos t + 2\sin t(1+t^2)}{8\cos^3 t \cdot (1+t^2)^2}$$

6.11 Vingrinājumi

1. Aprēķināt parametriski dotas funkcijas pirmās un otrās kārtas atvasinājumu un funkcijas vērtību pie parametra $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$$

2. Atrast funkcijas grafika pieskares vienādojumu punktā, kas dots pie parametra $t = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} x = 4cost \\ y = 2sint \end{cases}$$

   Konstruēt funkcijas un tās pieskares dotajā punktā grafiku!

3. Aprēķināt apslēptā veidā doto funkciju atvasinājumus
   $a)$ $\sqrt{x^2 + y} + 3\sin(x + y) = 0$
   $b)$ $4xy^3 + 2x^4y^2 = 7$
   $c)$ $e^y + \ln(x - 2y) - \text{tg} x = 0$

4. Aprēķināt norādītās kārtas funkciju atvasinājumus
   $a)$ $y = \text{arcctg} x; \;\; y'' = ?$
   $b)$ $s = 5\text{sh} t; \;\; y^{(6)} = ?$

$c)\ u = \log_2(2r-1);\ \ y''' = ?$
$d)\ r = 2sin^3\varphi;\ \ r'' = ?$

6.12 Funkcijas diferenciālis

Apskatīsim piemēru $y = x^3$, apskatīsim funkcijas pieaugumu $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Te argumenta pieagumi ir $\Delta x, (\Delta x)^2, (\Delta x)^3$. Ja aplūko situāciju, kad $\Delta x \to 0$, tad $(\Delta x)^2$ un $(\Delta x)^3$ tiecas uz 0 daudz straujāk nekā Δx. Funkcijas pieauguma pirmais saskaitāmais ir lineārs, tāpēc saskaitāmo $3x^2\Delta x$ sauc par funkcijas galveno lineāro daļu.

Funkcijas nelineārā daļa ir izteiksme $3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, kas kļūst bezgalīgi maza, ja $\Delta x \to 0$. Tā ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija, ko mēdz apzīmēt ar $o(\Delta x)$ (lasa: „o no delta x“).

$$\alpha = o(\Delta x) = (3x + \Delta x)(\Delta x)^2 \text{ , ja } \Delta x \to 0$$

Aplūkosim vispārīgu gadījumu. Dota funkcija $y = f(x)$. Ja funkcijai punktā x eksistē atvasinājums

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

tad, saskaņā ar robežas definīciju, attiecību var izteikt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$$

Vienādības abas puses pareizina ar Δx, iegūstot

$$\Delta y = \Delta x \cdot f'(x) + \alpha(x) \cdot \Delta x$$

jeb

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

Gadījumā, kad argumenta pieagums tiecas uz nulli, $\Delta x \to 0$, saskaitāmais $\alpha(x) \cdot \Delta x$ daudz ātrāk tiecas uz nulli, jo tas ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija, salīdzinot ar Δx.

Var novērtēt, ka funkcijas pieaugums ir aptuveni vienāds ar funkcijas galveno lineāro daļu $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Definīcija. Funkcijas $y = f(x)$ *galveno lineāro daļu* attiecībā pret Δx sauc par funkcijas $f(x)$ *diferenciāli* punktā x un apzīmē

$$\boldsymbol{dy = d(f(x)) = f'(x)\Delta x}$$

Apskatīsim funkciju $y = x$, tad

$$dy = dx = x'\Delta x = \Delta x$$

Seko, argumenta pieaugums ir vienāds ar argumenta diferenciāli punktā x

$$\boldsymbol{\Delta x = dx}$$

Tāpēc funkcijas diferenciāli var pierakstīt

$$\boldsymbol{dy = f'(x)dx}$$

Ievērojot šo izteiksmi, funkcijas atvasinājumu var pierakstīt diferenciālā formā

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{dy}{dx}},$$

kur argumenta diferenciālis $dx = \Delta x$ nav atkarīgs no x, savukārt funkcijas diferenciālis dy ir atkarīgs gan no x, gan Δx.

Ja apzīmē $f'(x) = A$, tad var pierakstīt

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

Definīcija. Funkciju $y = f(x)$ sauc par *diferencējamu punktā x_0*, ja tās pieaugumu Δy šajā punktā var aprakstīt formā

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

kur A ir lielums, kas nav atkarīgs no Δx, bet ir atkarīgs no punkta x_0.

Seko. Ja funkcijai eksistē atvasinājums punktā x_0, tad tā šajā punktā ir diferencējama.

Var pamatot arī apgriezto apgalvojumu – ja funkcija punktā x_0 ir diferencējama, tad tai šajā punktā eksistē atvasinājums.

Funkcijas diferencēšana ir cieši saistīta ar atvasināšanu, te darbojas līdzīgi likumi.

1) Summas diferenciālis

$$\boldsymbol{d(u \pm v) = du \pm dv}$$

Pamatosim

$$d(u + v) = (u + v)'dx =$$
$$= (u' + v')dx = u'dx + v'dx =$$
$$= du + dv$$

Pārējos diferencēšanas likumus pamato līdzīgi.

2) Funkciju reizinājuma diferenciālis

$$\boldsymbol{d(uv) = udv + vdu}$$

3) Funkciju dalījuma diferenciālis

$$\boldsymbol{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}}$$

4) Funkcijas reizinājuma ar skaitli diferenciālis

$\boldsymbol{d(av) = adv}$, kur $\boldsymbol{a}$ jebkurš reāls skaitlis.

Piemērs 1

Aprēķināsim funkcijas diferenciāli

$$d(x^5) = (x^5)'dx = 5x^4dx$$

Piemērs 2

Aprēķināt funkcijas diferenciāli $d(e^{3\cos x})$

Lietosim formulu $dy = y'dx$

$$d(e^{3\cos x}) = (e^{3\cos x})'dx =$$

$$= e^{3\cos x} \cdot (-3\sin x)dx$$

Ievērojot, ka funkcijas diferenciālis ir aptuveni vienāds ar funkcijas pieaugumu punktā x_0,

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

to ir ērti lietot dažādos praktiskos uzdevumos.

Izsakām funkcijas pieaugumu

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

tad

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

jeb

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Piemērs 3

Noteikt funkcijas $\sin(31°)$ aptuveno vērtību!

Atrisinājums

Te noteiksim $x_0 = 30°$, bet argumenta pieaugums $\Delta x = 1°$.

Funkcijas atvasinājums ir $(\sin x)\,' = \cos x$. Tad tā vērtība punktā $x_0$ir

$$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ievietosim zināmās vērtības, pēc tam vienu grādu izteiksim radiānos

$$\sin(31°) \approx \sin(30°) + \cos(30°) \cdot 1° =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}5 + 0{,}866 \cdot 0{,}017 \approx 0{,}515$$

Piemērs 4

Kubiskas formas ūdens bākas vienas šķautnes garums ir 2 metri. Kā mainīsies bākas tilpums, ja tās šķautni pagarinās par 1 centimetru?

Atrisinājums

Šķautnes garumu apzīmēsim ar x. Tad $x + \Delta x = 2 + 0{,}01.$

Bākas tilpuma formulu var izteikt ar funkcijas palīdzību

$$V(x) = x^3.$$

Plānotās izmaiņas – šķautnes pagarināšana, ir izsakāma kā tilpuma funkcijas pieaugums

$$\Delta V \approx dV(x) = (x^3)' \cdot \Delta x = 3x^2 \Delta x = 3 \cdot 4 \cdot 0{,}01 = 0{,}12$$

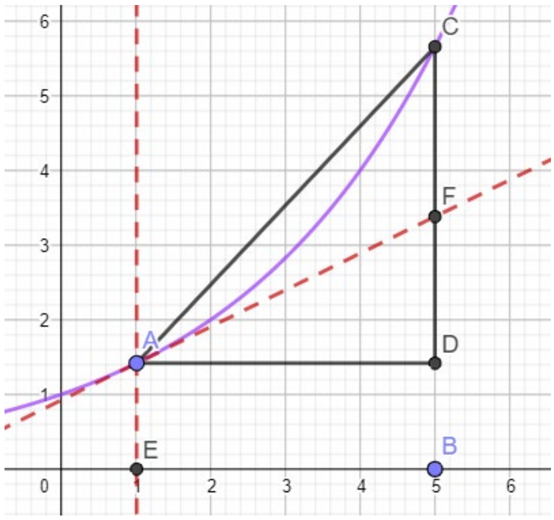
Saskaņā ar aprēķinu, pagarinot kubiskās formas bākas šķautni, tās tilpums palielināsis par 0,12 kubikmetriem.

Komentārs. Aprēķinā atcerēsimies arī šādu faktu, ka argumenta diferenciālis ir vienāds ar argumenta pieaugumu dotajā punktā.

6.13 Funkcijas diferenciāļa ģeometriskā interpretācija

Konstruēsim funkcijas $y = f(x)$ grafiku un noviksim tam punktā A pieskari (skat. attēlu 6). Punkta A koordinātes ir $A(x, f(x))$, bet punktiem D un C koordinātes ir $D(x + \Delta x;\ f(x))$ un $C(x + \Delta x;\ f(x + \Delta x))$. Apskatīsim trijstūri ACD.

$$AD = \Delta x;\ \ CD = \Delta y$$



Attēls 6

Pieskares vienādojums $y = kx + b$, kur $k = \mathrm{tg}\alpha = f'(x)$. Te leņķis α ir leņķis, ko pieskare veido ar x-asi.

Apskatīsim trijstūri AFD. Var izteikt $\mathrm{tg}\alpha = \frac{FD}{AD} = y'$. No šejienes

$$FD = y' \cdot AD = y' \cdot \Delta x = y' \cdot dx$$

Seko $FD = y'dx = dy$.

Funkcijas diferenciālis punktā x vienāds ar grafikam novilktās pieskares punktā x ordinātas pieaugumu.

6.14 Diferenciāļa formas invariance

Apskata saliktu funkciju, kuras neatkarīgais mainīgais ir t

$$y = y(x(t))$$

Ir zināms, kā aprēķināt saliktas funkcijas atvasinājumu

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t$$

Aplūkosim funkcijas diferenciāli dy. To aprēķina sekojoši

$$dy = y'dt = y'_x \cdot x'_t dt$$

Ievērojot, ka

$$x'_t dt = dx,$$

Funkcijas y diferenciāli var pārrakstīt

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x \, dx = ydx$$

Secinām, ka funkcijas diferenciāļa forma nav atkarīga no tā, vai funkcijas arguments ir neatkarīgais mainīgais x vai arī funkcija, piemēram, $x(t)$.

Piemērs

Apskatīsim funkcijas $y = \sin x^2$ diferenciāli.

Diferenciāli var izteikt divējādi – gan kā diferenciāli pēc neatkarīgā argumenta x (zemāk - izteiksme sarkanā krāsā), gan kā diferenciāli pēc funkcijas x^2 (izteiksme zilā krāsā).

$$dy = d(\sin x^2) = (\sin(x^2))' d(x^2) = \cos(x^2)\, d(x^2)$$

$$dy = \cos(x^2)\, d(x^2) = \cos x^2 \cdot (x^2)' dx = \cos x^2 \cdot 2x\, dx$$

6.15 Vingrinājumi

1. Aprēķināt doto funkciju diferenciāļus pēc argumenta x

   a) $d(\mathrm{arctg} x)$
   b) $d(\sqrt{1+x^2})$
   c) $d(e^{2x} \cdot cosx)$
   d) $d(log_2(ctg(sh^3 x)))$

2. Aprēķināt funkcijas diferenciāli dy dotajā punktā x_0 pie argumenta pieauguma Δx

   a) $y = \frac{2}{1+x^3},\ \ x_0 = 1;\ \ \Delta x = 0{,}02$
   b) $y = ln(2x^2 - 1),\ \ x_0 = 2;\ \ \Delta x = 0{,}01$
   c) $y = \sqrt{(1-4x)^3},\ \ x_0 = 0;\ \ \Delta x = 0{,}1$

6.16 Funkciju atvasinājumu pielietošana funkciju robežu aprēķināšanā: Lopitāla kārtula

Iepriekšējās nodaļās aplūkojām, kā aprēķināt dažādu funkciju robežas, izmantojot algebriskus pārveidojumus, trigonometrijas formulas un analītiskas metodes. Te aplūkosim vēl kādu paņēmienu, ko var lietot, ja dotas divas tādas funkcijas, kuru dalījuma robeža ir speciāla veida nenoteiktība

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad vai \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Teorēma. Ja divas funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ ir nepārtrauktas un diferencējamas punkta a apkārtnē, varbūt izņemot pašu punktu a, pie tam punkta a apkārtnē ir spēkā

$$g(x) \neq 0 \; un \; g'(x) \neq 0$$

un punkta a apkārtnē abas funkcijas vienlaikus tiecas uz bezgalību vai vienlaikus tiecas uz nulli, tad, ja eksistē šo funkciju atvasinājumu attiecības robeža, kad x tiecas uz a, tad eksistē arī abu funkciju attiecības robeža un tā ir vienāda ar atvasinājumu attiecības robežu.

Šo teorēmu sauc par *Lopitāla kārtulu*:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Lopitāla kārtulu ir ērti izmantot, ja jāaprēķina robeža no tādu funkciju dalījuma, kuras punkta a apkārtnē abas vienlaikus tiecas uz nulli vai vienlaikus tiecas uz bezgalību.

Piemērs 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$$

Piemērs 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin\frac{x}{4}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{\left(\sin\frac{x}{4}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x\cdot 7}{\cos\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\cos 0\cdot 7}{\cos 0\cdot\frac{1}{4}}=28$$

Piemērs 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3e^x+4x}{\mathrm{x}^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3e^x+4x)'}{(\mathrm{x}^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^x+4}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3e^x+4)'}{(2x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^x}{2}=\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}e^x=\frac{3}{2}e^{\infty}=\infty$$

Gadījumā, ja ir dota cita veida nenoteiktība, piemēram, $(\infty\cdot 0)$, tad ir jāveic pārveidojums, lai iegūtu nenoteiktību $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ vai $\left(\frac{0}{0}\right)$, kur robežas aprēķināšanā var lietot Lopitāla kārtulu.

Piemērs 4

$$\lim_{x\to\infty}x^{-3}\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\infty}=0$$

Piemērs 5

Dotajā piemērā pārveidosim nenoteiktību $(\infty - \infty)$ par atbilstošu nenoteiktību $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - \mathrm{x}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

6.17 Vingrinājumi

Aprēķināt dotās robežas, pielietojot Lopitāla kārtulu, norādīt, kāda veida nenoteiktība ir dota

$a)$ $\lim_{x\to 0} x\cdot tg4x$

$b)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{8x^2}$

$c)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$

$d)$ $\lim_{x\to\infty}(7x - 1)\cdot e^{-2x}$

$e)$ $\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{\ln(x+3)}\right)$

6.18 Funkciju atvasinājumu pielietošana funkciju pētīšanā

Dažādus procesus, kuros ir izteiktas sakarības starp mainīgiem lielumiem, var aprakstīt ar funkciju palīdzību. Funkcijas un to robežas ir viens no galvenajiem matemātiskās analīzes pētījuma objektiem. Lai izpētītu kādas funkcijas raksturu, var lietot vienkāršas metodes, aplūkot robežjautājumus, kā arī rezultātus, ko sniedz funkciju atvasinājuma ģeometriskās interpretācijas.
Te apskatīsim speciālu sistēmu, ko sauc

Funkciju pētīšanas pilnā shēma

1.daļa

1. Funkcijas definīcijas apgabals.

2. Funkcijas grafika krustpunkti ar koordinātu asīm.
3. Funkcijas pāra, nepāra īpašības (grafika simetrija).
4. Periodiskums un periods.
5. Pārtraukuma punktu noteikšana, to veids.
6. Vertikālo asimptotu aprēķināšana.
7. Slīpo asimptotu aprēķināšana.
8. Funkcijas izturēšanās definīcijas apgabala intervālu galapunktos un (vai) bezgalībā.

2.daļa

9. Pirmā veida kritiskie punkti.
10. Monotonitātes intervāli un ekstrēmi.

3.daļa.

11.Otrā veida kritiskie punkti.
12. Ieliekuma un izliekuma intervāli, pārliekuma punkti.

4.daļa

13. Grafika konstruēšana.

Funkcijas pētījuma shēmu var iedalīt vairākos atšķirīgos soļos. Pirmajā daļā tiek pētīti tādi vispārīgi jautājumi kā funkcijas definīcijas apgabals, funkcijas grafika krustpunkti ar koordinātu asīm, pāra un nepāra īpašības, periodiskums, kas ir jautājumi, pazīstami jau no vidusskolas kursa. Citi jautājumi sasitīti ar funkcijas robežu aprēķināšanu. Otrās daļas pētījumā jau tiek lietots funkcijas pirmās kārtas atvasinājums un tā īpašības, trešajā daļā – otrās kārtas atvasinājums. Kā noslēguma uzdevums ir funkcijas grafika konstruēšana, kas parāda kopējo pētījuma rezultātu.

6.18.1 Funkcijas definīcijas apgabals, krustpunkti ar koordinātu asīm

Funkcijas definīcijas apgabals ir visas tādas argumentu vērtības, pie kurām funkcijai ir jēga. Citiem vārdiem sakot, pie jebkura argumenta no definīcijas apgabala var aprēķināt funkcijas vērtību.

Piemērs 1

Noteikt dotās funkcijas definīcijas apgabalu

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x - 2}$$

Atrisinājums

Te ievērosim divus ierobežojumus

- Nedrīkst dalīt ar nulli,
- Nevar aprēķināt kvadrātsakni no negatīva skaitļa.

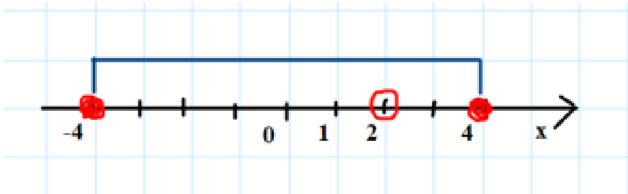
Dotajai funkcijai sastādīsim ierobežojumu sistēmu, kas nosaka funkcijas definīcijas apgabalu

$$\begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

Katras nevienādības atrisinājums ir

$$\begin{cases} x \neq 2 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Sistēmas atrisinājuma kopējo daļu nosakām grafiski



Funkcijas definīcijas apgabals ir

$$D_y = [-4;\ 2) \cup (2;\ 4]$$

Piemērs 2

Noteikt dotās funkcijas definīcijas apgabalu

$$f(x) = \sqrt[3]{8-x} + \lg(x^2 - 11x + 24)$$

Atrisinājums

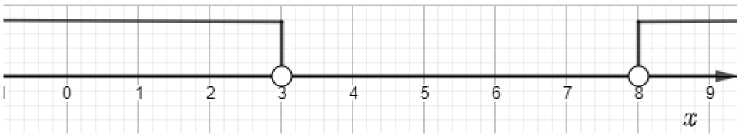
Vienīgais ierobežojums ir logaritma funkcijas definīcijas apgabals, bet kuba sakni var aprēķinat no visām reālu skaitļu vērtībām. Definīcijas apgablu nosaka nevienādība

$$x^2 - 11x + 24 > 0$$

Aprēķinām kvadrāttrinoma saknes

$$x_1 = 3;\ \ x_2 = 8$$

Nosakām kvadrāttrinoma pozitīvās vērtības



Dotās funkcijas definīcijas apgabals ir

$$D_y = (-\infty;\ 3) \cup (8;\ \infty)$$

Funkcijas $y = f(x)$ grafika krustpunktus ar koordinātu asīm aprēķina sekojoši: ja $x = 0$, iegūstam funkcijas grafika krustpunktu ar y-asi; ja $y = 0$, tad risinām vienādojumu $f(x) = 0$, lai atrastu funkcijas grafika krustpunktus ar x-asi.

Piemērs

Atrast funkcijas grafika krustpunktus ar koordinātu asīm

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$$

<u>*Atrisinājums*</u>

Aprēķinām funkcijas grafika krustpunktu ar y-asi

$$x = 0; \quad y = 0 - 36 = -36$$

Krustpunkts ar y-asi ir $(0;\ -36)$

Aprēķinām funkcijas grafika krustpunktus ar x-asi

$$y = 0; \quad x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = 0$$
$$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = (x^2 - 9)(x + 4)$$

Vienādojuma atrisinājums ir

$$x_1 = 3; \ \ x_2 = -3; \ \ x_3 = -4$$

Krustpunkti ar x-asi ir $(-4;\ 0), (-3;\ 0), (3;\ 0)$

6.18.2 Funkcijas pāra, nepāra īpašības

Definīcija. Funkcija $y = f(x)$ ir *pāra funkcija*, ja katram argumentam x no funkcijas definīcijas apgabala ir spēkā

$$f(-x) = f(x)$$

Definīcijas izteikumu var pierakstīt arī “matemātikas valodā”

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_y$$

Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret y-asi.

Definīcija. Funkcija $y = f(x)$ ir *nepāra funkcija*, ja katram argumentam x no funkcijas definīcijas apgabala ir spēkā

$$f(-x) = -f(x)$$

Atbilstošā simboliskā izteiksme ir

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_y$$

Nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākuma punktu.

Funkcijas, kuras nav ne pāra, ne nepāra funkcijas, ir *vispārīgas funkcijas*.

<u>*Piemērs 1*</u>

Noskaidrot, vai dotā funkcija ir pāra, nepāra vai vispārīga

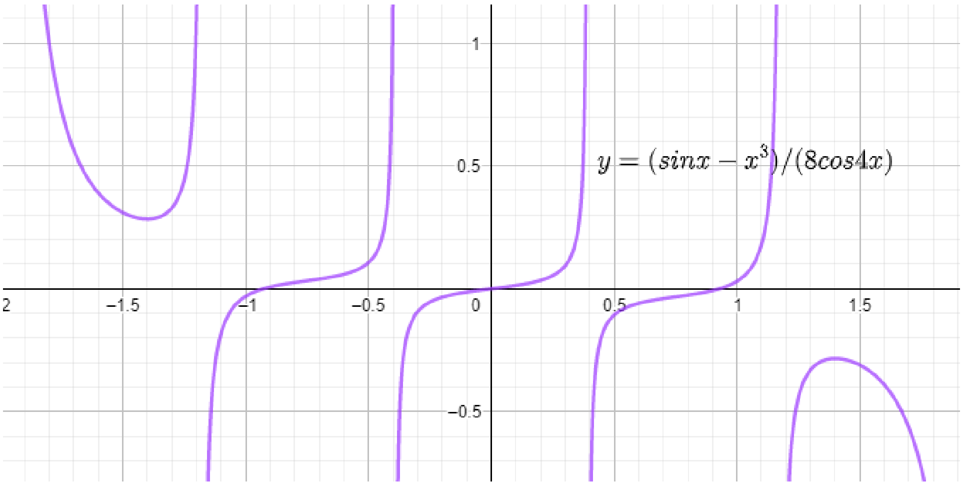
$$f(x) = \frac{\sin x - x^3}{8\cos 4x}$$

Atrisinājums

Funkcijas analītiskajā izteiksmē aizvietosim argumentu x ar $(-x)$ un atcerēsimies, ka sinusa funkcija un kubiskā funkcija ir nepāra funkcija, bet kosinusa funkcija ir pāra funkcija

$$f(-x) = \frac{\sin(-x) - (-x)^3}{8\cos(-4x)} =$$
$$= \frac{-\sin x + x^3}{8\cos 4x} = \frac{-(\sin x - x^3)}{8\cos 4x} = -f(x)$$

Dotā funkcija ir nepāra funkcija. Attēlā 7 redzama funkcijas grafika centrālā daļa. Grafiks ir ļoti komplicēts, jo funkcijai ir bezgalīgi daudz pārtraukuma punkti.



Attēls 7

Piemērs 2

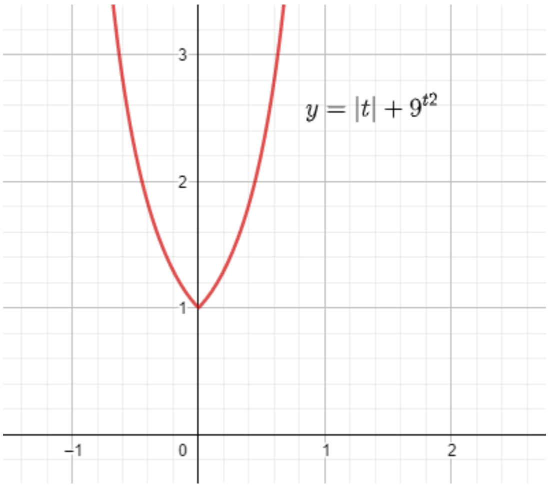
Noskaidrot, vai dotā funkcija ir pāra, nepāra vai vispārīga

$$f(t) = |t| + 9^{t^2}$$

Atrisinājums

$$f(-t) = |-t| + 9^{(-t)^2} = |t| + 9^{t^2} = f(t)$$

Dotā funkcija ir pāra funkcija, tās grafiks ir simetrisks pret y-asi (skat. attēlu 8)



Attēls 8

Piemērs 3

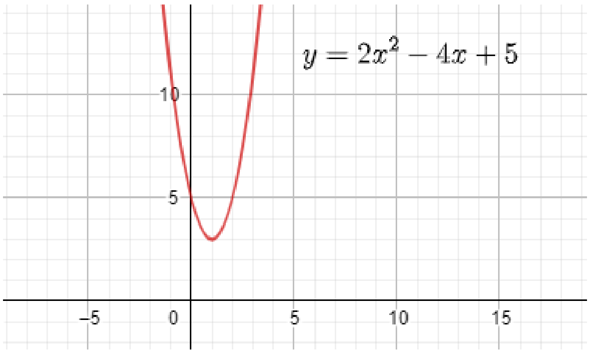
Noskaidrot, vai dotā funkcija ir pāra, nepāra vai vispārīga

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 12$$

Atrisinājums

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 4(-x) + 12 = -2x^2 + 4x + 12 = -(2x^2 - 4x - 12)$$

Pēdējā izteiksme iekavās nav vienāda ar doto funkciju. Tā nav ne pāra, ne nepāra funkcija. Dotā funkcija ir vispārīga, tās grafiks:



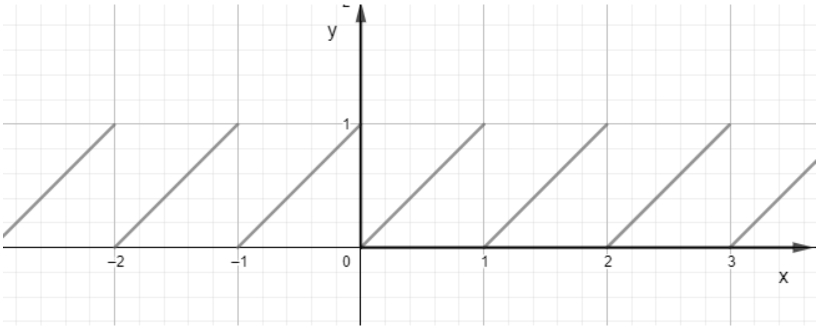
Attēls 9

6.18.3 Periodiskums

Definīcija. Funkcija $y = f(x)$ ir periodiska ar periodu $T \neq 0$, ja katram argumentam x no definīcijas apgabala ir spēkā $f(x+T) = f(x)$.

Trigonometriskās funkcijas ir periodiskas. Sinusa un kosinusa funkcijas periods ir 2π, tangensa un kotangensa periods ir π.

Periodiska var būt arī funkcija, kura nav trigonometriska. Piemēram, funkcija $y = x - \lfloor x \rfloor$. Te funkcijas loceklis $\lfloor x \rfloor$ nozīmē "skaitļa veselā daļa". Funkcijas grafiks:



Attēls 10

Piemērs 1

Aprēķināt funkcijas periodu

$$f(x) = \cos(3x - 1)$$

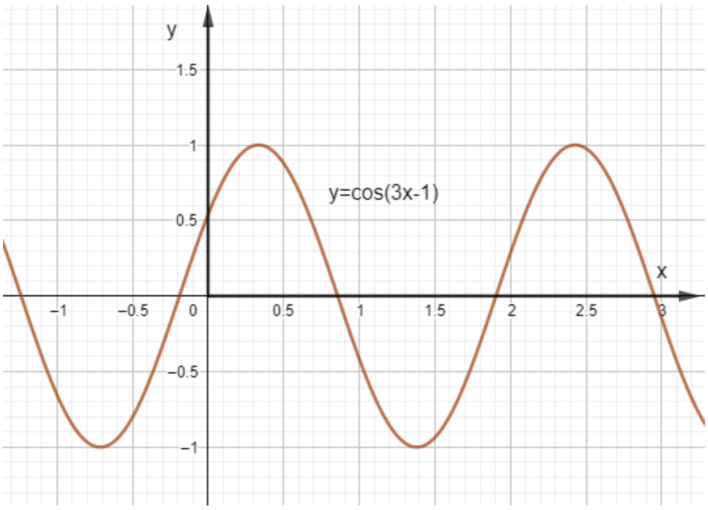
Atrisinājums

Kosinusa funkcijas periods ir 2π. Tad ir spēkā

$$4(x + T) + 5 = 4x + 5 + 2\pi$$

$$4T = 2\pi; \;\; T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Grafiks:



Attēls 11

Piemērs 2

Aprēķināt funkcijas periodu

$$f(x) = \sin\frac{5x}{3} + \mathrm{tg}4x$$

Atrisinājums
Sinusa funkcijas periods ir 2π, bet tangensa funkcijas periods ir π. Vispirms nosakām katras atsevišķās funkcijas periodu.
Sinusa funkcijai

$$\frac{5(x+T)}{3} = \frac{5x}{3} + 2\pi$$
$$\frac{5T}{3} = 2\pi; \ \ T = \frac{6\pi}{5}$$

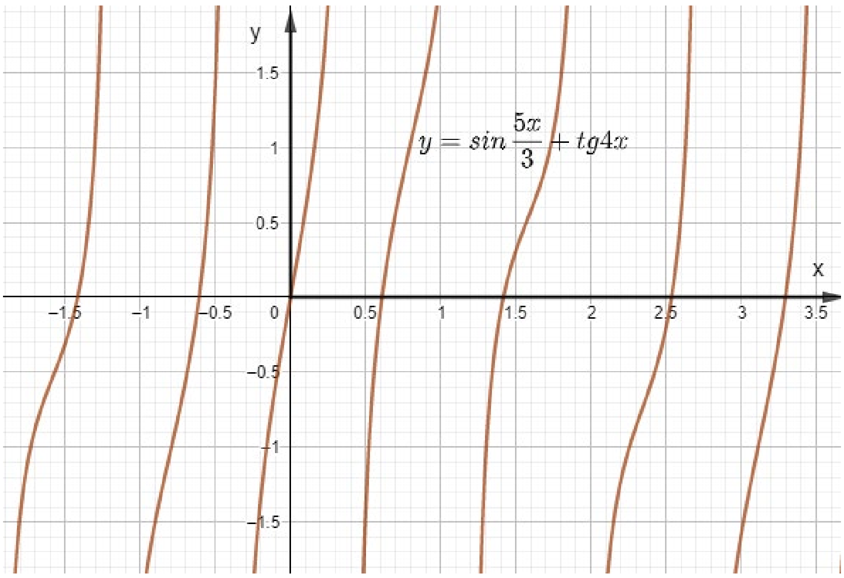
Tangensa funkcijai

$$4(x+T) = 4x + \pi$$
$$4T = \pi; \ \ T = \frac{\pi}{4}$$

Dotās funkcijas periodu var noteikt, ja nosaka attiecību – abu aprēķināto periodu mazākais kopīgais dalāmais (MKD) tiek dalīts ar periodu lielāko kopīgo dalītāju (LKD)

$$T = \frac{MKD(\pi, 6\pi)}{LKD(4,5)} = \frac{6\pi}{1} = 6\pi$$

Dotās funkcijas periods ir $T = 6\pi$.
Dēļ tangensa funkcijas īpašībām, dotās funkcijas grafiks sastāv no bezgalīgi daudziem zariem:



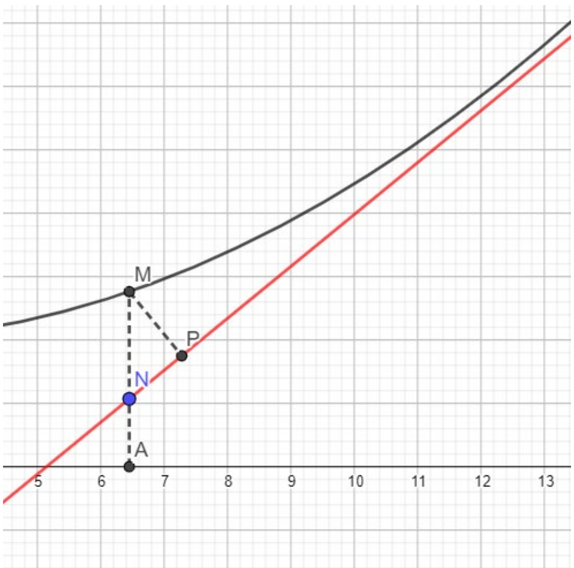
Attēls 12

6.18.4 Pārtraukuma punktu noteikšana un vertikālo asimptotu aprēķināšana

Ir zināmi divi funkciju pārtraukuma punktu veidi. Pirmā veida pārtraukums ir, ja funkcijas pārtraukuma punktā abas vienpusējās robežas ir galīgas. Otrā veida pārtraukums ir, ja pārtraukuma punktā vismaz viena no vienpusējām robežām ir bezgalīga.

Definīcija. Taisni, kurai funkcijas grafiks neierobežoti tuvojas, sauc par funkcijas grafika *asimptotu*.

Attēlā 13 ir parādīta funkcijas grafika vienpusējā asimptota (sarkanā krāsā).



Attēls 13

Dažām no zināmajām elementārajām funkcijām ir asimptotas – eksponentfunkcijai, piemēram, funkcijai $y = e^x$ asimptota ir x-ass; logaritmiskai funkcijai, piemēram, funkcijai $y = lgx$ asimptota ir y-ass, arktangensa funkcijai $y = arctgx$ ir divas asimptotas $y = \frac{\pi}{2}$ un $y = -\frac{\pi}{2}$.

Ja funkcijai punktā $x_0 = a$ ir otrā veida pārtraukuma punkts, tad tās vertikālās asimptotas vienādojums ir $x = a$.

Definīcija. Taisni $x = a$ sauc par funkcijas $y = f(x)$ grafika *vertikālo asimptotu*, ja vismaz viena no vienpusējām robežām, kad x tiecas uz a, ir bezgalīgi liela pozitīva vai bezgalīgi liela negatīva:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty \quad \text{vai} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$$

Piemērs 1

Aprēķināt funkcijas vertikālo asimptotu

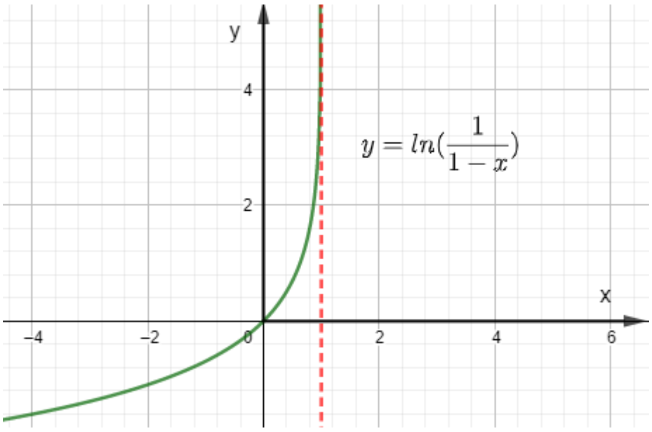
$$f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$$

Atrisinājums

Dotās funkcijas pārtraukuma punkts ir $x = 1$. Ievērojot, ka logaritma vērtību nevar aprēķināt negatīvām argumenta vērtībām un arī no nulles, tad šai funkcijai var aprēķināt tikai kreiso vienpusējo robežu

$$\lim_{x\to 1-0} \ln \frac{1}{1-x} = \ln\left(\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{+0}\right) = \ln(\infty) = \infty$$

Tā kā vienpusējā robeža ir bezgalība, tad funkcijas grafikam ir vertikālā asimptota $x = 1$.
Funkcijas grafiksdots attēlā 14.



Attēls 14

Piemērs 2

Aprēķināt funkcijas vertikālās asimptotas

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Atrisinājums

Dotās funkcijas pārtraukuma punkti ir $x = 2$ un $x = -2$. Kopumā te jāaprēķina četras vienpusējās robežas

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

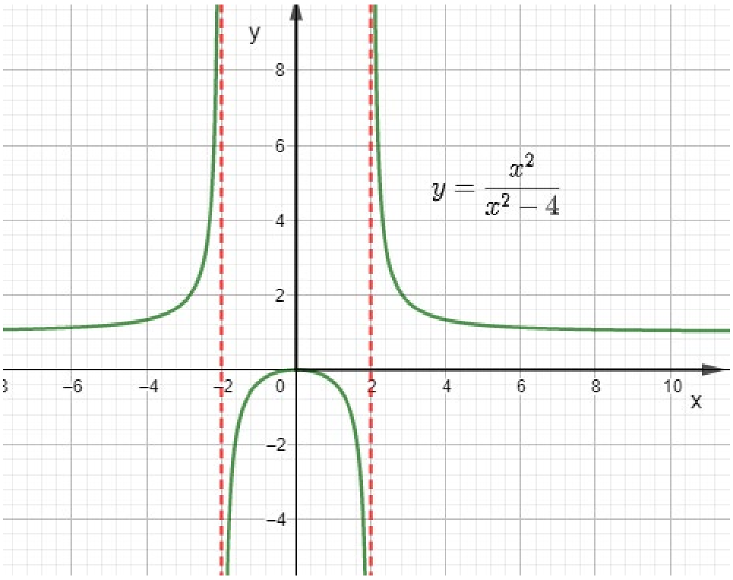
$$\lim_{x\to -2+0} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

Saskaņā ar definīciju, funkcijas grafikam ir divas vertikālās asimptotas (skat. attēlu 15)

$$x = -2 \text{ un } x = 2$$



Attēls 15

6.18.5 Slīpo asimptotu aprēķināšana

Funkcijas grafika slīpā asimptota ir taisne, kuras vienādojums ir

$$y = kx + b$$

Lai atrastu funkcijas $y = f(x)$ slīpās asimptotas vienādojumu, ir nepieciešams aprēķināt koeficientus k un b. Vispirms aprēķina koeficientu k

$$\boldsymbol{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{k}}$$

Ja koeficients k ir galīgs skaitlis, tad var aprēķinat koeficientu b

$$\boldsymbol{b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)}$$

Slīpā asimptota ekstistē, ja abi koeficienti ir galīgi skaitļi. Ja koeficients $k = 0$, tad asimptotas vienādojums ir $y = b$ un to sauc par *horizontālo asimptotu*. Vispārīgā gadijumā, aprēķinot koeficientus k un b, ir jāšķiro gadījumi, kad $x \to \infty$ vai $x \to -\infty$.

Apskatīsim iepriekšējā paragrāfa piemēru 2, kur funkcijai aprēķinājām vertikālās asimptotas, bet tagad aprēķināsim tās slīpo asimptotu.

Piemērs 1

Aprēķināt funkcijas slīpo asimptotu

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Atrisinājums

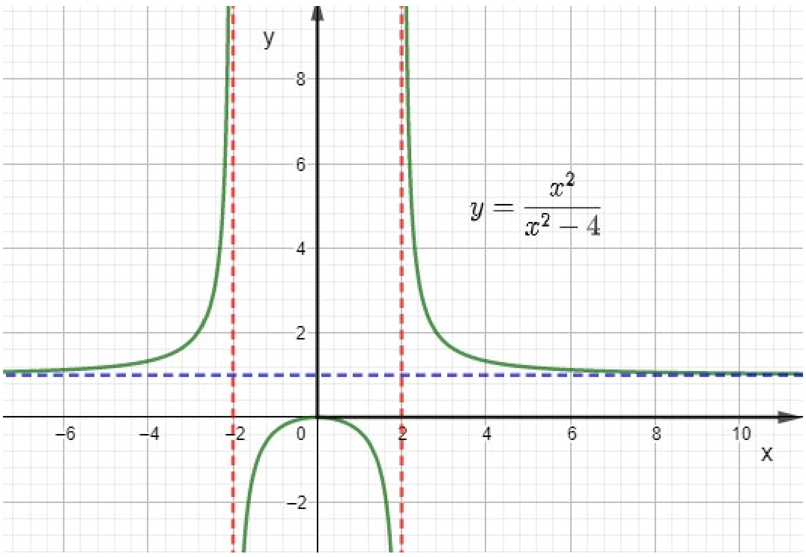
Aprēķināsim taisnes virziena koeficientu k, ievērojot, ka abos gadījumos, kad $x \to \infty$ vai $x \to -\infty$, robežas vērtība būs viena un tā pati

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x^2-4)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-4} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Tad

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$

Dotās funkcijas grafikam ir horizontālā asimptota y=1, kā arī divas vertikālās asimptotas, kuras aprēķinājām jau iepriekš (skat. attēlu 16).



Attēls 16

Piemērs 2

Aprēķināt funkcijas slīpās asimptotas

$$y = \frac{x}{2} + \mathrm{arctg}2x$$

Atrisinājums

Atsevišķi apskatīsim gadījumus, kad $x \to \infty$ un $x \to -\infty$

Aprēķinām koeficientus vienā no gadījumiem

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{2} + \mathrm{arctg}2x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{arctg}2x}{x}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{2} + \mathrm{arctg}2x - \frac{x}{2}\right) = \mathrm{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$$

Vienas slīpās asimptotas vienādojums gadījumam, kad arguments pieņem ļoti lielas pozitīvas vērtibas, ir

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Aprēķinām koeficientus otrā no gadījumiem

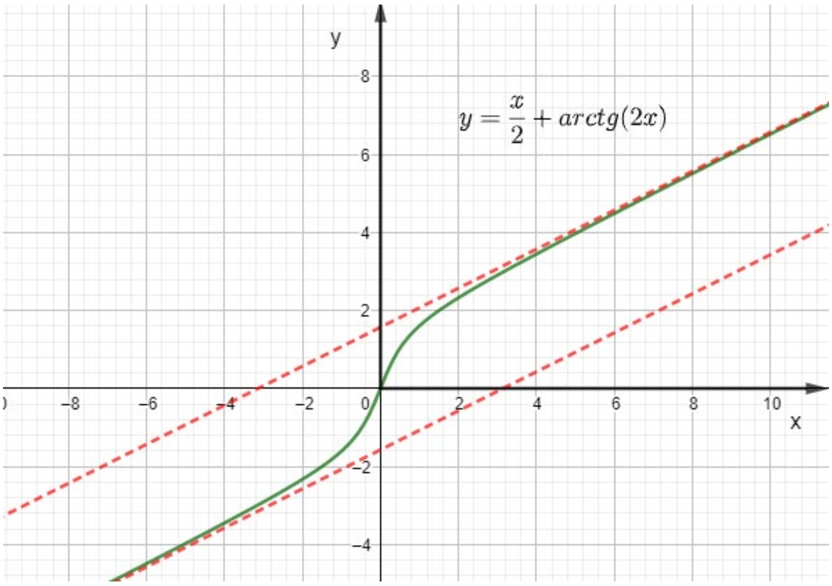
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{2} + \mathrm{arctg}2x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{arctg}2x}{x}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}}{-\infty} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{2} + \mathrm{arctg}2x - \frac{x}{2}\right) = \mathrm{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Slīpās asimptotas vienādojums gadījumam, kad arguments pieņem ļoti lielas negatīvas vērtibas, ir

$$y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$$

Redzam, ka funkcijas grafikam plus bezgalībā un mīnus bezgalībā ir divas dažādas asimptotas (skat. attēlu 17).



Attēls 17

6.18.6 Funkcijas izturēšanās bezgalībā

Kā noskaidrot, kādas vērtības funkcija pieņem definīcijas apgabala kreisajā un labajā pusē, tas ir, tā galapunktos, ja tādi ir, vai bezgalībā? To veic, aprēķinot funkcijas atbilstošās robežvērtības.

Piemērs 1

Noteikt funkcijas izturēšanos pie definīcijas apgabala robežām

$$y = \ln \frac{1}{1 - x}$$

Atrisinājums

Dotās funkcijas definīcijas apgabalu nosaka logaritma funkcijas arguments

$$\frac{1}{1 - x} > 0$$

$$D_y = (-\infty;\ 1)$$

Aplūkosim, kādas ir funkcijas vērtības definīcijas intervāla kreisajā pusē

$$\lim_{x\to-\infty} \ln \frac{1}{1-x} = \ln \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = \ln\left(\frac{1}{+\infty}\right) = \ln(+0) = -\infty$$

Jau iepriekš aprēķinājām, ka labajā definīcijas intervāla pusē vienpusējā robeža ir bezgalība

$$\lim_{x\to1-0} \ln \frac{1}{1-x} = \ \infty$$

Šis pētījums nosaka arī funkcijas vērtību apgabalu

$$E_y = (-\infty;\ +\infty)$$

Piemērs 2

Noteikt funkcijas izturēšanos bezgalībā

$$y = 2^x$$

Atrisinājums

Dotā funkcija ir definēta visiem reāliem argumentiem x.

Aprēķinām vienpusējās robežas plus un mīnus bezgalībā

$$\lim_{x\to\infty} 2^x = 2^\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Argumentam pieņemot ļoti lielas pozitīvas vērtības, funkcijas vērtības arī kļūst ļoti lielas pozitīvas. Ja arguments tiecas uz mīnus bezgalību, funkcijas vērtības tuvojas nullei. Varam pierakstīt arī funkcijas vērtību apgabalu

$$E_y = (0;\ \infty)$$

6.18.7 Funkcijas monotonitātes intervāli, pirmā veida kritiskie punkti un ekstrēmi

Ir zināms, kā definē intervālā $[a, b]$ augošu funkciju $f(x)$.

Definīcija. Funkcija $y = f(x)$ ir *augoša* intervālā $[a,\ b]$, ja jebkuriem diviem argumentiem $x_1\ un\ x_2$ no intervāla $[a, b]$, kuriem $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) < f(x_2)$.

Līdzīgi definē arī intervālā dilstošu funkciju. Var aplūkot arī intervālā neaugošas vai nedilstošas funkcijas. Piemēram, funkcija intervālā $[a, b]$ ir nedilstoša, ja visiem argumentiem $x_1 < x_2$ seko, ka $f(x_1) \le f(x_2)$. Visus tādus intervālus, kuros funkcija aug, dilst, neaug, nedilst, sauc par *funkcijas monotonintātes intervāliem*.

Funkcijas monotonitāti raksturo arī funkcijas pieaugums – funkcija dotā puncta apkārtnē ir augoša, ja pozitīvam argumenta pieaugumam $(\Delta x > 0)$ atbilst pozitīvs funkcijas pieaugums

$(\Delta y > 0)$; funkcija ir dilstoša, ja pozitīvam argumenta pieaugumam $(\Delta x > 0)$ atbilst negatīvs funkcijas pieaugums $(\Delta y < 0)$.

Definīcija. Funkcija $y = f(x)$ ir augoša intervālā $[a, b]$, ja katrā intervāla punktā pozitīvam argumenta pieaugumam $(\Delta x > 0)$ atbilst pozitīvs funkcijas pieaugums $(\Delta y > 0)$.

Tad seko

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

Apskatot robežgadījumu, arī robežas vērtība ir pozitīva

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \text{ jeb } \ y' > 0.$$

Tas nozīmē, ka intervālā $[a, b]$ augošai funkcijai atvasinājums katrā intervāla punktā ir pozitīvs.

Funkcijas augšanas un dilšanas *nepieciešamā pazīme*:

Teorēma. Ja funkcija intervālā $[a, b]$ ir augoša, tad tās atvasinājums šī intervāla katrā punktā ir pozitīvs:

$$\forall x \in [a, b] \quad f'(x) > 0$$

Ja funkcija intervālā $[a, b]$ ir dilstoša, tad tās atvasinājums šī intervāla katrā punktā ir negatīvs:

$$\forall x \in [a, b] \quad f'(x) < 0$$

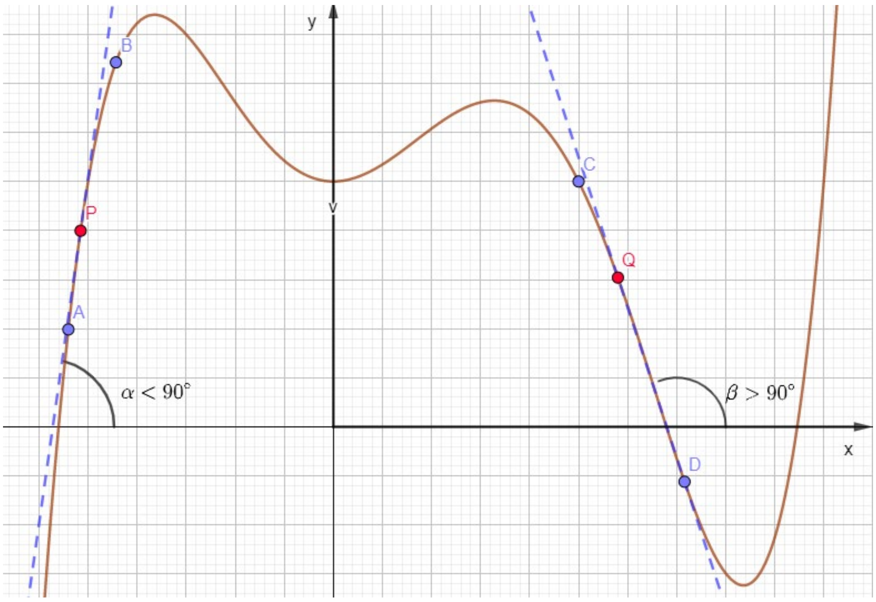
Līdzīgi formulē funkcijas augšanas un dilšanas *pietiekamo pazīmi*:

Teorēma. Ja funkcijai katrā intervāla punktā tās atvasinājums ir pozitīvs, tas ir, $f'(x) > 0$, tad funkcija šajā intervālā ir augoša.

Ja funkcijai katrā intervāla punktā $f'(x) < 0$, tad funkcija šajā intervālā ir dilstoša.

Ievērojot funkcijas monotonitātes pazīmes un funkcijas atvasinājuma ģeometrisko interpretāciju (funkcijas atvasinājums dotajā punktā ir vienāds ar pieskares virziena koeficientu, kas novilkta funkcijas grafikam šajā punktā) var secināt, ka funkcijas grafikam novilktās pieskares veido šauru leņķi ar x-asi intervālā, kur funkcija aug, bet platu leņķi - intervālā, kur funkcija dilst.

Tā, piemēram, attēlā 18 redzams funkcijas grafiks, kur punkts P atrodas kādā no funkcijas augšanas intervāliem (uz loka AB). Punktā P novilktā pieskare veido šauru leņķi ar x-asi. Grafika punkts Q atrodas funkcijas dilšanas intervālā (uz loka CD). Punktā Q novilktā pieskare veido platu leņķi ar x-asi.



Attēls 18

Apskatīsim, kā nosaka funkcijas monotonitātes intervālus.

Funkcijas monotonitātes intervālu noteikšanas plāns

1. Atvasina doto funkciju
2. Atvasinājumu pielīdzina nullei un atrod vienādojuma saknes un tās vērtības, pie kurām funkcijas nav definēta. Tās visas sauc par *pirmā veida kritiskajiem punktiem*
3. Kritiskos punktus atliek uz skaitļu ass. Katrā intervālā nosaka funkcijas atvasinājuma zīmi
4. Izdara secinājumus par funkcijas monotonitātes intervāliem, raksta atbildi

Piemērs 1

Atrast dotās funkcijas monotonitātes intervālus

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 11$$

Atrisinājums

1) Atvasina funkciju

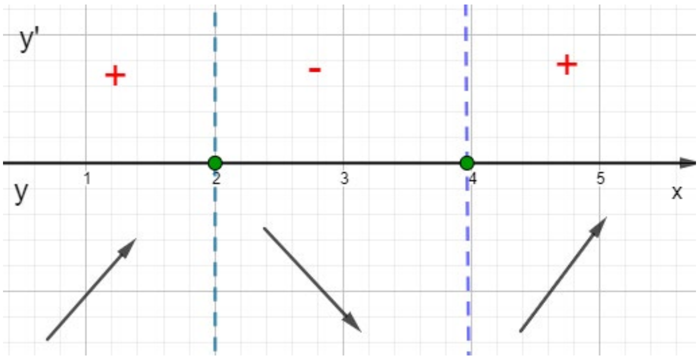
$$y' = 3x^2 - 18x + 24$$

2) Atrisina vienādojumu

$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Saknes ir $x_1 = 2;\ \ x_2 = 4$

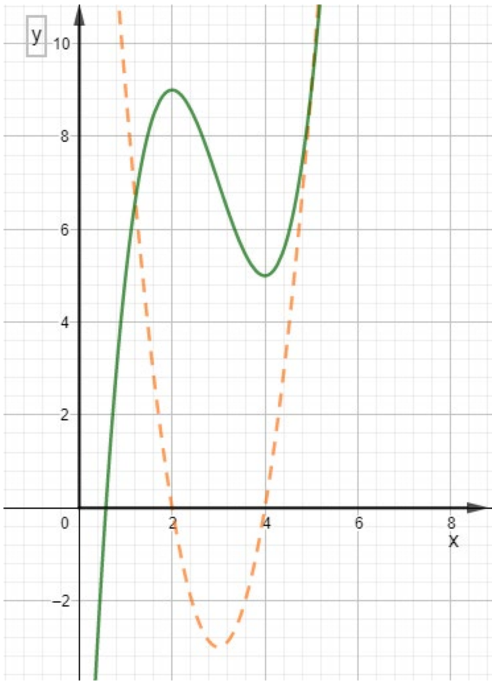
3) Kritiskos punktus atliek uz skaitļu ass un nosaka atvasinājuma zīmes katrā no intervāliem. Atvasinājuma funkcijas grafiks ir parabola, kuras zari vērsti uz augšu, tad, kā zināms, centrālajā intervālā funkcijas vērtības ir negatīvas (skat. attēlu 19).



Attēls 19

4) Secinām, ka funkcija aug intervālos, kur $x \in (-\infty;\ 2) \cup (4;\ \infty)$
   Funkcija dilst intervālā $x \in (2;$ 4).

Attēlā 20 vVaram aplūkot arī funkcijas grafiku (zaļā krāsā) un tās atvasinājuma grafiku (konstruēts ar pārtrauktu līniju):



Attēls 20

Nupat alplūkotaja piemērā noskaidrojām funkcijas augšanas un dilšanas intervālus. Šie intervāli atbilst gandrīz visam funkcijas definīcijas apgabalam, bet ārpus monotonitātes intervāliem paliek divi punkti $x = 2$ un $x = 4$. Funkcijas grafiks (skat. attēlu 20) šajos punktos ir "izlocīts" – šajos punktos ir funkcijas lielākā un mazākā vērtība kādā pietiekami nelielā intervālā, piemēram, intervālā $x \in (1{,}5;\ \ 4,5)$. Šādus punktus sauc par *funkcijas lokālajiem ekstrēmiem*. Definēsim tos.

Definīcija. Punktu $x_0 \in [a, b]$ sauc par funkcijas $y = f(x)$ *maksimuma punktu (jeb lokālo maksimumu)*, ja katram $x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x],\ kur\ x \neq x_0$, ir spēkā $f(x) < f(x_0)$.

Definīcija. Punktu $x_0 \in [a,b]$ sauc par funkcijas $y = f(x)$ *minimuma punktu (jeb lokālo minimumu)*, ja katram $x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x],\ kur\ x \neq x_0$, ir spēkā $f(x) > f(x_0)$.

Aplūkosim nosacījumus.

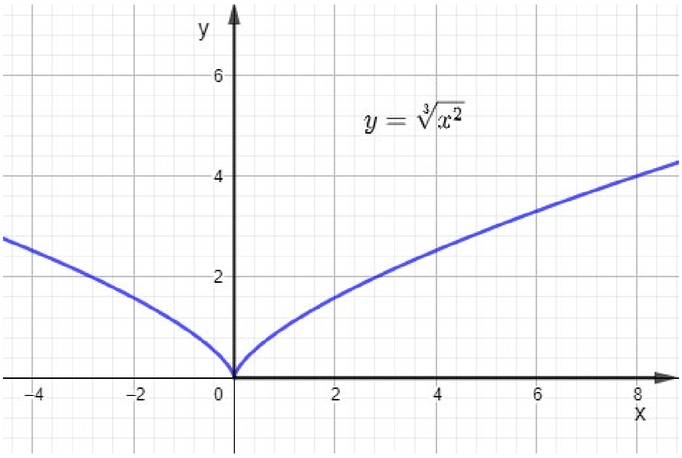
Funkcijas ekstrēmu eksistences nepieciešamais nosacījums

Ja funkcijai $y = f(x)$ punktā x_0 ir ekstrēms, tad šajā punktā funkcijas atvasinājums ir nulle vai arī funkcija nav definēta.

Piemērs 2

Aplūkosim funkciju $y = \sqrt[3]{x^2}$

Funkcijas vismazākā vērtība jeb minimums ir punktā $x = 0$ (skat. attēlu 21), jo visas pārējās funkcijas vērtības ir pozitīvas.



Attēls 21

Aprēķināsim funkcijas atvasinājumu

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Atvasinājums nav definēts, ja $x = 0$. Intervālā $x \in (-\infty;\ 0)$ atvasinājuma vērtības ir negatīvas, bet intervālā $x \in (0;\ \infty)$ pozitīvas.

Tomēr nosacījums, ka funkcijas atvasinājums punktā x_0 ir nulle vai nav defināts, nav pietiekams, lai apgalvotu, ka funkcijai šajā punktā ir ekstrēms. To demonstrēsim ar sekojošo piemēru.

Piemērs 3

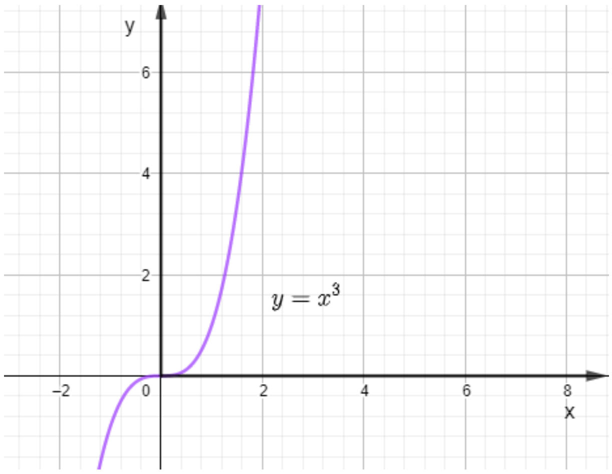
Aplūkosim pakāpes funkciju $y = x^3$. Tai nav ekstrēma punkta (skat. attēlu 22), lai gan atvasinājums punktā 0 ir vienāds ar 0. Kubiskā parabola ir augoša funkcija visā tās definīcijas apgabalā.

Atvasinām

$$y' = 3x^2$$

$$y' = 3x^2 = 0, \text{ja } x = 0$$

Ievērosim, ka funkcijas atvasinājums ir viscaur pozitīvs, tā vismazākā vērtība ir punktā $x = 0$.



Attēls 22

Lai varētu noskaidrot funkcijas ekstrēma punktu eksistenci, lietosim sekojošu nosacījumu:

Funkcijas ekstrēmu eksistences pietiekamais nosacījums

Punkts x_0 ir funkcijas $f(x)$ ekstrēma punkts, ja, ejot caur to argumenta x pieaugšanas virzienā, funkcijas atvasinājums $f'(x)$ maina zīmi:

Ja no "+" uz "-", tad x_0 ir maksimuma punkts.

Ja no "-" uz "+", tad x_0 ir minimuma punkts.

Piemērs 3

Noteikt funkcijas monotonitātes intervālus un ekstrēma punktus

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 5}$$

Atrisinājums

Atvasināsim doto funkciju

$$y' = \frac{2x(x-5) - (x^2-9)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x - x^2 + 9}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x + 9}{(x-5)^2}$$

Funkcjas atvasinājums ir 0, ja skaitītājs vienāds ar 0.

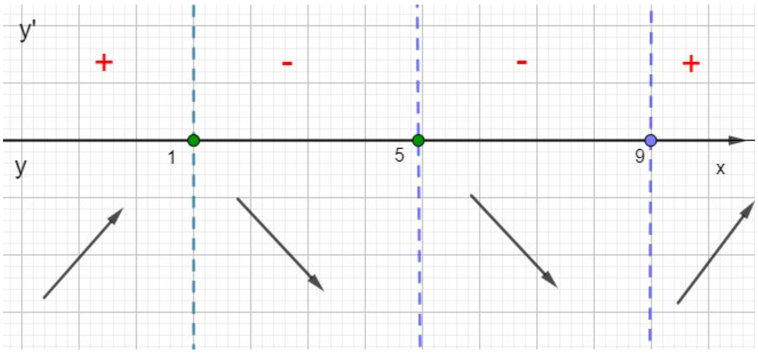
Aprēķināsim saknes

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ un } x_2 = 9$$

Tad funkcijai ir trīs kritiskie punkti – abas vienādojuma saknes un punkts, kurā funkcijas atvasinājums (arī pati funkcija) nav definēts $x_3 = 5$.

Atliekam šos punktus un koordinātu ass un nosakām atvasinājuma zīme intervālos (skat. attēlu 23)



Attēls 23

No dotā rezultāta secinām

Funkcija aug intervālos $x \in (-\infty;\ 1) \cup (9;\ \infty)$

Funkcija dilst intervālos $x \in (1;\ 5) \cup (5;\ 9)$

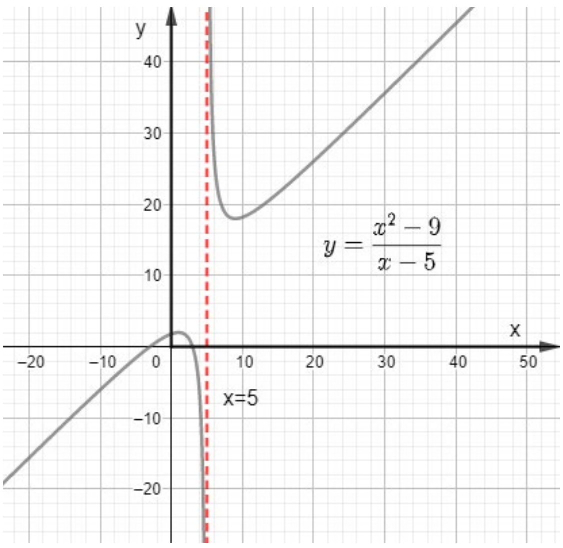
Funkcijas maksimums ir, ja $x = 1$. Funkcijas vērtība maksimuma punktā ir

$$f(1) = \frac{1-9}{1-5} = 2$$

Funkcijas minimums ir, ja $x = 9$. Funkcijas vērtība minimuma punktā ir

$$f(9) = \frac{81-9}{9-5} = 18$$

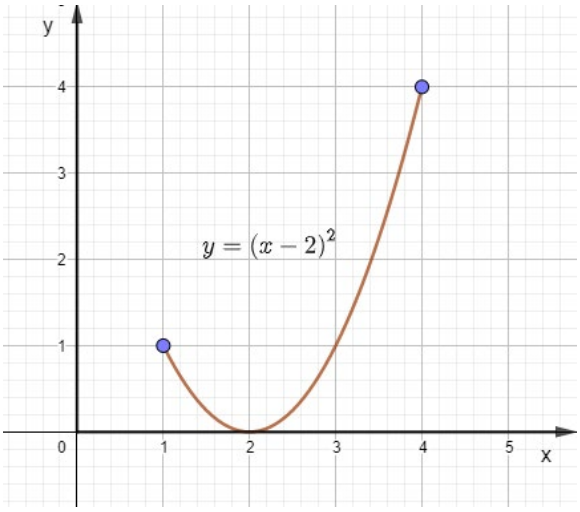
Funkcijas grafiks dots attēlā 24.



Attēls 24

6.18.8 Funkcijas vislielākā un vismazākā vērtība slēgtā intervālā

Ja aplūko funkciju $y = f(x)$ kādā slēgtā intervālā, kurā funkcija ir nepārtraukta, var aprēķināt tās vērtību jebkurā intervāla iekšējā punktā kā arī intervāla galapunktos. Var gadīties, ka funkcijas vislielākā vai vismazākā vērtība būs kādā no intervāla $[a;\ b]$ galapunktiem. Tā, piemēram, funkcijas $y = (x-2)^2$ vislielākā vērtība intervālā $[1;\ 4]$ ir tieši galapunktā $x = 4$. Funkcijas vērtība ir $y(4) = 4$ (skat.attēlu 25)



Attēls 25

Lai noteiktu funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību slēgtā intervālā,

1) atrod funkcijas pirmā veida kritiskos punktus;
2) izvēlas tikai tos kritiskos punktus, kas pieder dotajam intervālam;
3) aprēķina funkcijas vērtību kritiskajos punktos un intervāla galapunktos;
4) izvēlas funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību.

Piemērs

Noteikt funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību slēgtā intervālā

$$y = \frac{4x}{4+x^2} + 3; \quad x \in [0;\ 4]$$

Atrisinājums

Atvasināsim doto funkciju

$$y' = \frac{4(4+x^2) - 2x \cdot 4x}{(4+x^2)^2} = \frac{16-4x^2}{(4+x^2)^2}$$

Aprēķinām kritiskos punktus

$$16 - 4x^2 = 0; \quad x^2 = 4$$

Saknes

$$x_1 = -2 \ \text{un}\ x_2 = 2$$

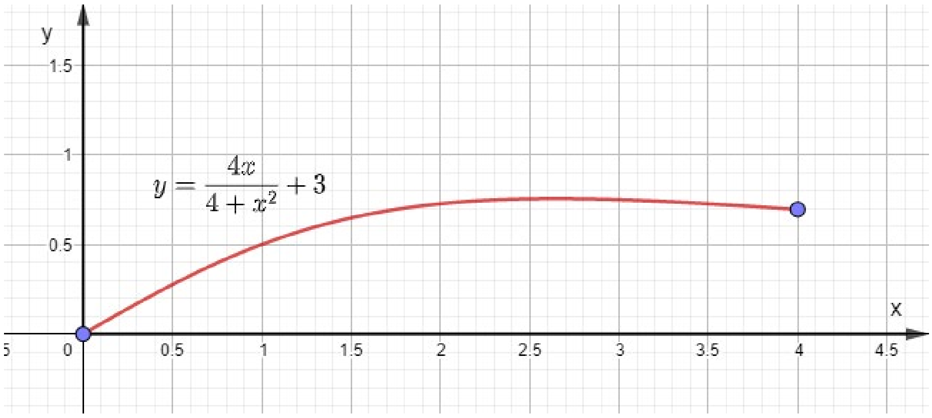
Sakne $x_1 = -2$ nepieder intervālam [0; 4]. Aprēķinām funkcijas vērtību kritiskajā punktā $x_2 = 2$ un intervāla galapunktos

$$y(0) = 0 + 3 = 3$$

$$y(2) = \frac{8}{4+4} + 3 = 4$$

$$y(4) = \frac{16}{20} + 3 = 3{,}8$$

Secinām, ka funkcijas vismazākā vērtība ir kreisajā galapunktā, bet vislielākā vērtība ir kritiskajā punktā $x_2 = 2$ (skat. attēlu 26).



Attēls 26

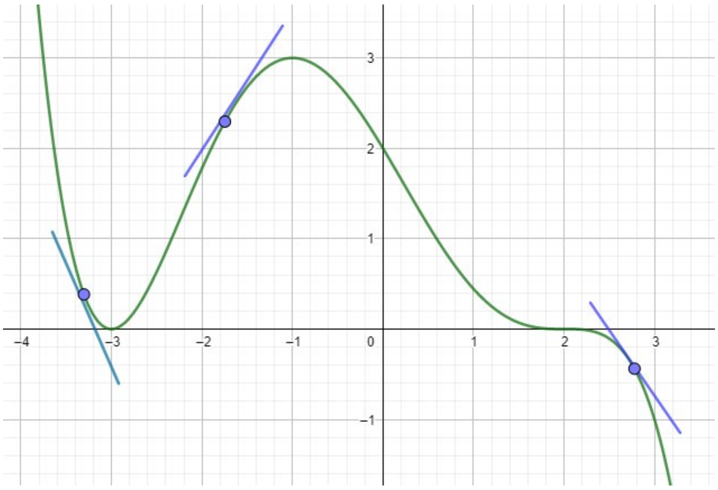
6.18.9 Funkcijas otrās kārtas atvasinājuma pielietošana funkcijas izpētē

Ar otrās kārtas atvasinājuma palīdzību nosaka funkcijas ieliekuma un izliekuma intervālus.

Definīcija. Funkcija $f(x)$ ir *izliekta* intervālā $[a;\ b]$, ja katrā šī intervāla punktā grafikam novilktā pieskare atrodas virs funkcijas grafika.

Definīcija. Funkcija $f(x)$ ir *ieliekta* intervālā $[a;\ b]$, ja katrā šī intervāla punktā grafikam novilktā pieskare atrodas zem funkcijas grafika.

Attēlā 27 redzams tādas funkcijas grafiks, kura ir ieliekta intervālā (-2,5; -3,5). Grafiks ir izliekts intervālos (-2; 0) un (2,5; 3). Ievērosim, ka piemērā ieliekuma un izliekuma intervāli noteikti aptuveni. Konkrētu intervālu noteikšanai ir nepieciešami aprēķini.



Attēls 27

Definīcija. Punktus, kur funkcijas grafiks mainās no ieliekta uz izliektu vai otrādi, sauc par funkcijas grafika *pārliekuma punktiem*.

Funkcijas izliekumu var noskaidrot ar funkcijas otrās kārtas atvasinājuma palīdzību.

Teorēma. Ja funkcija $f(x)$ intervālā $[a;\ b]$ ir diferencējama un tās otrās kārtas atvasinājums ir pozitīvs $f''(x) > 0$, tad funkcija šajā intervālā ir ieliekta, bet ja tās otrās kārtas atvasinājums ir negatīvs $f''(x) < 0$, tad funkcija ir izliekta.

Punktus, kuros funkcijas otras kārtas atvasinājums ir nulle vai neeksistē, sauc par funkcijas otrā veida kritiskajiem punktiem. Kritiskajā punktā ir funkcijas pārliekuma punkts, ja izpildīts sekojošais nosacījums:

Pārliekuma punkta eksistences pietiekamais nosacījums

Punkts x_0 ir funkcijas $f(x)$ pārliekuma punkts, ja ejot caur to argumenta x pieaugšanas virzienā, funkcijas otrās kārtas atvasinājums $f"(x)$ maina zīmi.

Aplūkosim plānu, kā noteikt funkcijas izliekuma – ieliekuma intervālus.

Funkcijas ieliekuma/izliekuma intervālu un pārliekuma punktu noteikšana

1. Atvasina doto funkciju
2. Atrod funkcijas otro atvasinājumu
3. Otro atvasinājumu pielīdzina 0 un atrod saknes, kā arī tos punktus, kur funkcijas otrais atvasinājums nav definēts. Tie ir funkcijas *otrā veida kritiskie punkti*
4. Kritiskos punktus atliek uz skaitļu ass; nosaka funkcijas otrā atvasinājuma zīmes intervālos
5. Veic secinājumus par funkcijas ieliekuma, izliekuma intervāliem un pārliekuma punktiem. Raksta atbildi.

Piemērs

Noteikt funkcijas ieliekuma un izliekuma intervālus un pārliekuma punktus

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$$

Atrisinājums

Atvasināsim

$$y' = 3x^2 - 18x + 24$$

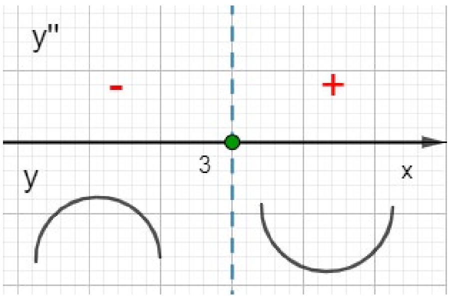
Atvasināsim otrreiz

$$y'' = 6x - 18$$

Te ir viens kritiskais punkts, kad funkcijas vērtība ir vienāda ar nulli

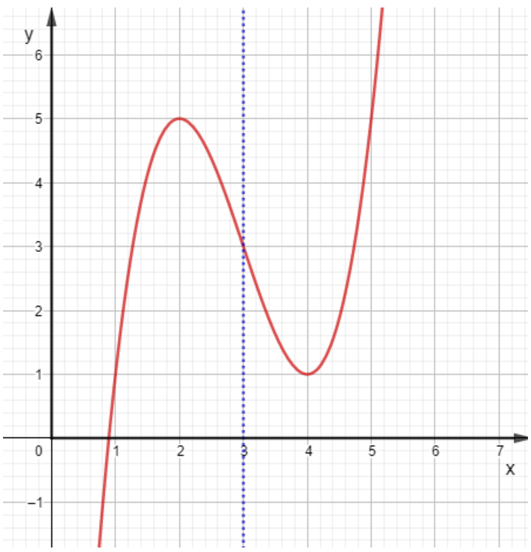
$$6x - 18 = 0; \quad x = 3$$

Atliekam kritisko punktu uz skaitļu ass un nosakam otrās kārtas atvasinājums zīmes abos intervālos (skat.attēlu 28).



Attēls 28

Noskaidrojam, ka funkcijas grafiks ir izliekts intervālā $(-\infty;\ 3)$, bet ieliekts intervālā $(3;\ \infty)$. Funkcijai ir pārliekuma punkts $x = 3$, funkcijas vērtība $y(3) = 57$. Funkcijas grafiks ir dots attēlā 29. Taisne $x = 3$ atdala funkcijas ieliekto daļu no izliektās.



Attēls 29

6.18.10 Funkcijas pilnais pētījums

Aplūkosim pāris piemērus, kā veikt funkcijas pilno pētījumu.

Piemērs 1

Izpētīt doto funkciju un konstruēt tās grafiku

$$y = x^4 - 5x^2 + 4$$

Atrisinājums

Funkcijas pētījumu veiksim plānveidīgi.

1. Funkcijas definīcijas apgabals

   Funkcija definēta pie visām reālām argumenta vērtībām

$$D_y = (-\infty;\ \infty)$$

2. Funkcijas grafika krustpunkti ar koordinātu asīm

   Aprēķināsim funkcijas grafika krustpunktu ar y-asi

$$x = 0;\ \ y = 4$$

   Aprēķināsim funkcijas grafika krustpunktus ar x-asi. Vispirms funkcijas analītisko izteiksmi sadalīsim reizinātājos

$$y = x^4 - 5x^2 + 4 = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$$

Tad saknes ir

$$\text{ja } y = 0, \text{tad } x_1 = -2;\ x_2 = 2;\ \ x_3 = -1;\ \ x_4 = 1$$

3. Funkcijas pāra, nepāra īpašības (grafika simetrija).

   Pārbaudīsim, vai dotā funkcija ir pāra funkcija

$$y(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = y$$

   Dotā funkcija ir pāra funkcija, tās grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu y-asi.

4. Periodiskums un periods

   Funkcija nav periodiska.

5. Pārtraukuma punktu noteikšana, to veids

   Funkcijai nav pārtraukuma punktu, tā ir viscaur definēta

6. Vertikālo asimptotu aprēķināšana

   Funkcijai nav vertikālo asimptotu.

7. Slīpo asimptotu aprēķināšana

   Funkcijai nav slīpo asimtotu, jo

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x} = \infty$$

8. Funkcijas izturēšanās definīcijas apgabala intervālu galapunktos un (vai) bezgalībā

   Apskatīsim funkcijas vērtības gadījumā, kad arguments x tiecas uz bezgalību

$$\lim_{x\to\infty}(x^4-5x^2+4)=\lim_{x\to\infty}x^4\left(1-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)=\infty\cdot 1=\infty$$

Funkcija bezgalībā pieņem ļoti lielas pozitīvas vērtības. Tāpat ir arī, ja x tiecas uz mīnus bezgalību, jo dotā funkcija ir pāra funkcija.

9. Pirmā veida kritiskie punkti

Atvasināsim doto funkciju

$$y'=4x^3-10x$$

Aprēķināsim funkcijas pirmā veida kristiskos punktus

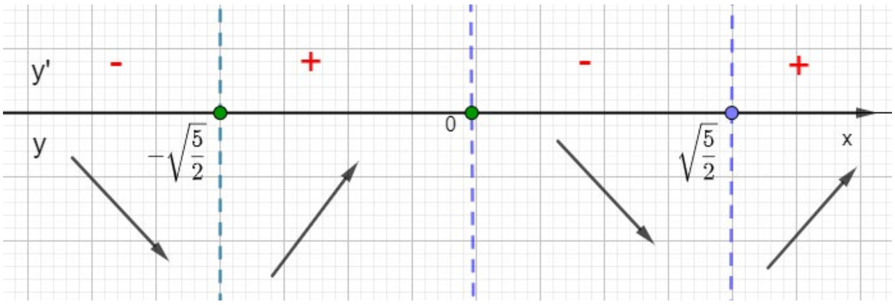
$$y'=0;\ \ 4x^3-10x=2x(2x^2-5)=0$$

Ir trīs kritiskaie punkti, pie kuriem funkcijas atvasinājuma vērtība ir nulle

$$x_1=0;\ x_2=\sqrt{\frac{5}{2}}\approx 1{,}58;\ \ x_3=-\sqrt{\frac{5}{2}}\approx -1{,}58$$

10. Monotonitātes intervāli un ekstrēmi

Atliksim šīs vērtības uz skaitļu ass un noteiksim funkcijas atvasinājuma zīme intervālos, kā arī ekstrēma punktu veidu (skat. attēlu 30).



Attēls 30

Funkcija aug intervālos $x\in\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{5}{2}};\ \infty\right)$

Funkcija dilst intervālos $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\cup\left(0;\ \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

Funkcijas lokālais maksimums

$$x=0,\text{tad } y=4$$

Funkcijas minimuma punkti

$$x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\text{tad } y=\frac{25}{4}-5\cdot\frac{5}{2}+4=-2{,}25$$

11.Otrā veida kritiskie punkti

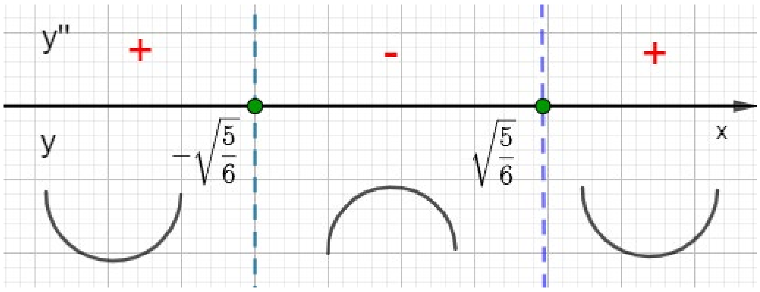
Aprēķināsim funkcijas otrās kārtas atvasinājumu un otrā veida kritiskos punktus

$$y''=12x^2-10$$

$$y'' = 0, tad\ x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 2{,}45$$

12. Ieliekuma un izliekuma intervāli, pārliekuma punkti

Aplūkosim, kāda veida intervālos kritiskie punkti iedala skaitļu asi, kāda būs funkcijas izturēšanās šajos intervālos (skat. attēlu 31).



Attēls 31

Funkcijas grafiks ir izliekts intervālā $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}; \sqrt{\frac{5}{6}}\right)$

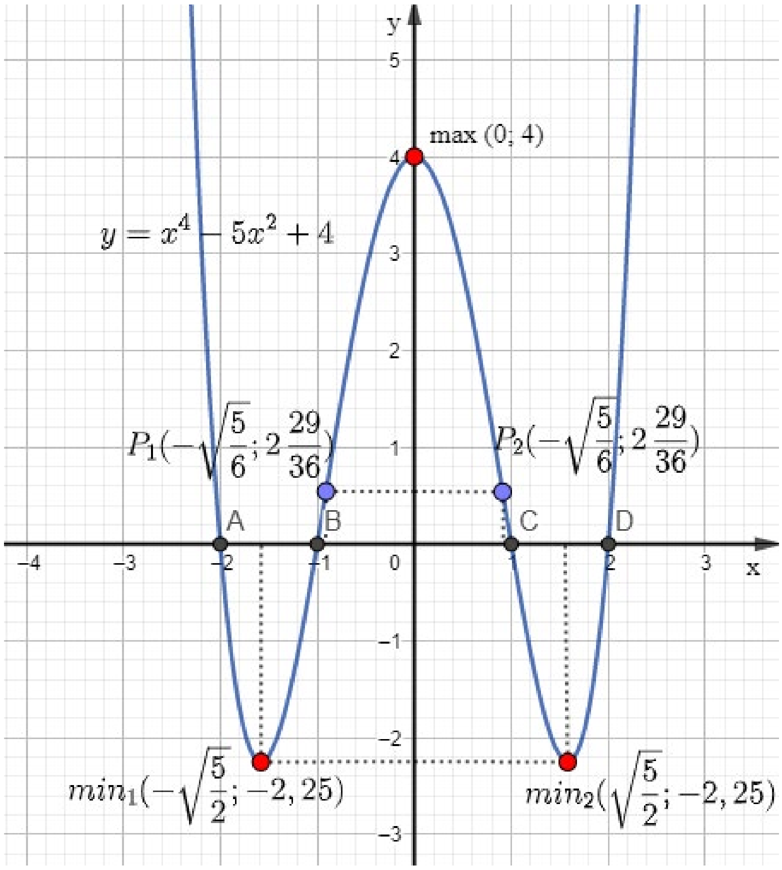
Funkcijas grafiks ir ieliekts intervālos $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5}{6}}; \infty\right)$

Funkcijas grafikam ir divi pārliekuma punkti

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}, \text{tad } y = \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 4 = -2\frac{29}{36}$$

13. Grafika konstruēšana

Grafika konstruēšanai izmantosim GeoGebra programmu. Grafikā norādam arī visus svarīgākos punktus. Programmas GeoGebra lietotnē var norādīt funkcijas grafika ekstrēma punktus (izvēlne *Extremum*) min_1un min_2, maksimuma punktu max. Tāpat var noteikt arī grafika krustpunktus ar x-asi (izvēlne *Roots*), grafika punktus A, B, C, D, kuri redzami attēlā 32. Grafika pārliekuma punkti ir P_1 un P_2.



Attēls 32

Piemērs 2

Izpētīt doto funkciju un konstruēt tās grafiku

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Atrisinājums

Funkcijas pētījumu veiksim plānveidīgi.

1. Pārtraukuma punktu noteikšana, to veids

   Funkcija nav definēta, ja saucējā ir 0. Tad pārtraukuma punkts ir $x = 1$.

   Lai noteiktu pārtraukuma punkta veidu, ir jāaprēķina vienpusējās robežas

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{+0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

   Funkcijai ir otrā veida pārtraukuma punkts

2. Funkcijas definīcijas apgabals

Ievērojot, ka funkcijai ir pārtraukuma punkts, tās definīcijas apgabals ir

$$D_y = (-\infty; 1) \cup (1;\ \infty)$$

3. Funkcijas grafika krustpunkti ar koordinātu asīm

Aprēķināsim funkcijas grafika krustpunktu ar y-asi

$$x = 0, \text{tad } y = -2$$

Aprēķināsim funkcijas grafika krustpunktus ar x-asi. Tas iespējams, ja funkcijas skaitītājs ir 0.

$$y = x^2 - 2x + 2 = 0$$

Vienādojumam reālu sakņu nav. Funkcijas grafiks nekrusto x-asi.

4. Funkcijas pāra, nepāra īpašības (grafika simetrija)

Pārbaudīsim, vai dotā funkcija ir pāra vai nepāra funkcija

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) + 2}{(-x) - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

Dotā funkcija nav ne pāra funkcija, ne nepāra funkcija. Tā ir vispārīga funkcija.

5. Periodiskums un periods

Funkcija nav periodiska.

6. Vertikālo asimptotu aprēķināšana

Funkcijai ir vertikālā asimptota, jo tai ir otrā veida pārtraukuma punkts. Vertikālās asimptotas vienādojums ir $x = 1$.

7. Slīpo asimptotu aprēķināšana

Funkcijas slīpās asimptotas vienādojums ir $y = kx + b$. Aprēķināsim koeficientus

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1$$

Slīpās asimptotas vienādojums ir $y = x - 1$.

8. Funkcijas izturēšanās definīcijas apgabala intervālu galapunktos un (vai) bezgalībā

Apskatīsim funkcijas vērtības gadījumā, kad arguments x tiecas uz plus vai mīnus bezgalību

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} \left(\frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty} x \cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} \left(\frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot 1 = -\infty$$

Funkcija bezgalībā pieņem ļoti lielas pozitīvas vērtības, ja arguments x tiecas uz plus bezgalību, un funkcijas vērtības kļūst bezgalīgi lielas negatīvas, ja x tiecas uz mīnus bezgalību.

9. Pirmā veida kritiskie punkti

Atvasināsim doto funkciju

$$y' = \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Aprēķināsim funkcijas pirmā veida kristiskos punktus

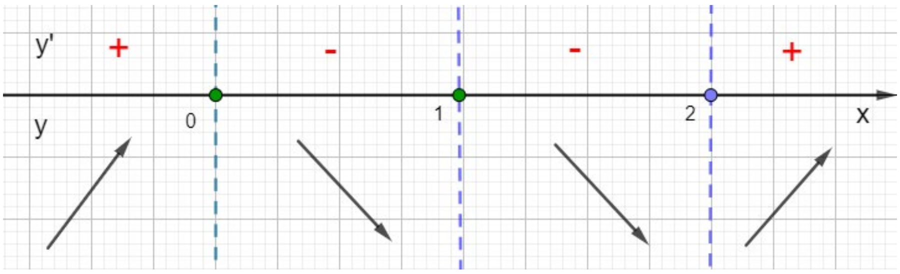
$$y' = 0;\ \ x^2-2x = x(x-2) = 0$$

Ir divi kritiskie punkti, pie kuriem funkcijas atvasinājuma vērtība ir nulle, un vēl viens, kur funkcijas atvasinājums nav definēts

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ \ x_3 = 1$$

10. Monotonitātes intervāli un ekstrēmi

Atliksim kritiskās vērtības uz skaitļu ass un noteiksim funkcijas atvasinājuma zīmes intervālos, kā arī ekstrēma punktu veidu (skat. attēlu 33).



Attēls 33

Funkcija dilst intervālos $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2)$.

Funkcija aug intervālos $x \in (-\infty;\ 0) \cup (2;\ \infty)$.

Funkcijas lokālais maksimums

$$x = 0, \text{tad } y = -2$$

Funkcijas minimuma punkts

$$x = 2, \text{tad } y = 2$$

11.Otrā veida kritiskie punkti

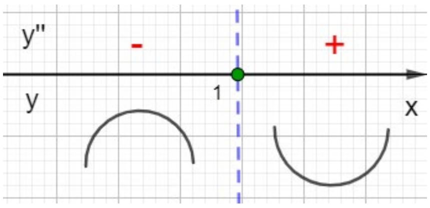
Aprēķināsim funkcijas otrās kārtas atvasinājumu un otrā veida kritiskos punktus

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Funkcijas atvasinājums nekad nav vienāds ar 0, jo skaitītājā ir konstants skaitlis. Vienīgais otrā veida kritiskais punkts ir $x = 1$.

13. Ieliekuma un izliekuma intervāli, pārliekuma punkti

Aplūkosim, kāda veida intervālos (skat. attēlu 34) kritiskais punkts iedala skaitļu asi, kāda būs funkcijas izturēšanās šajos intervālos.



Attēls 34

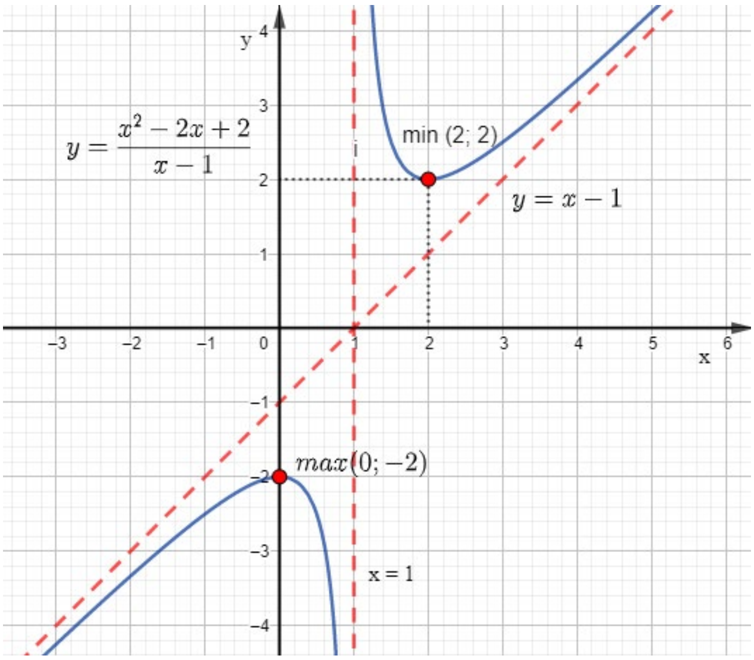
Funkcijas grafiks ir izliekts intervālā $x \in (-\infty;\ 0)$

Funkcijas grafiks ir ieliekts intervālā $x \in (0;\ \infty)$

Funkcijas grafikam pārliekuma punktu nav.

13. Grafika konstruēšana

Grafika konstruēšanai izmantosim GeoGebra programmu.



Attēls 35

Programmas GeoGebra lietotnē var norādīt funkcijas grafika ekstrēma punktus – maksimuma punkts *max*, minimuma punkts *min*. Te funkcijas maksimuma punkts vienlaikus ir arī tās grafika krustpunkts ar y-asi (skat. attēlu 35).

Piemērs 3

Izpētīt doto funkciju un konstruēt tās grafiku

$$y = (x-1)e^{4x-1}$$

Atrisinājums

1. Funkcijas definīcijas apgabals

   Funkcija definēta pie visām reālām argumenta vērtībām

$$D_y = (-\infty;\ \infty)$$

2. Funkcijas grafika krustpunkti ar koordinātu asīm

   Aprēķināsim funkcijas grafika krustpunktu ar y-asi

$$x = 0;\ \ y = \frac{-1}{e}$$

   Aprēķināsim funkcijas grafika krustpunktu ar x-asi

$$\text{ja } y = 0, \text{tad } x = 1$$

3. Funkcijas pāra, nepāra īpašības

   Pārbaudīsim, vai dotā funkcija ir pāra funkcija

$$y(-x) = (-x-1)e^{-4x-1}$$

   Dotā funkcija ir vispārīga funkcija, tās grafiks nav simetrisks.

4. Periodiskums un periods

   Funkcija nav periodiska.

5. Pārtraukuma punktu noteikšana, to veids

   Funkcijai nav pārtraukuma punktu, tās definīcijas apgabals ir visa reālo skaitļu ass.

6. Vertikālo asimptotu aprēķināšana

   Funkcijai nav vertikālo asimptotu.

7. Slīpo asimptotu aprēķināšana

   Dotajai funkcijai asimptotas jāaplūko divos gadījumos:

   a) arguments x tiecas uz plus bezgalību, te slīpā asimptota nav, jo

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)e^{4x-1}}{x} = (1\cdot\infty) = \infty$$

   b) aplūkosim otru gadījumu, kurā, aprēķinot koeficientu b, lietosim Lopitāla kārtulu

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{xe^{1-4x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{e^{1-4x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{1-4x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-4e^{1-4x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

   Slīpās asimptotas vienādojums ir $y = 0$. Šāda veida asimptotu sauc par horizontālo asimptotu. Tā ir x-ass.

8. Funkcijas izturēšanās definīcijas apgabala intervālu galapunktos un (vai) bezgalībā

Apskatīsim funkcijas vērtības gadījumā, kad arguments x tiecas uz plus bezgalību

$$\lim_{x\to\infty}(x-1)e^{4x-1}=(\infty\cdot\infty)=\infty$$

Funkcijas izturēšanos, kad arguments x tiecas uz mīnus bezgalību nosaka iepriekšējā punktā veiktais pētījums. Funkcija plus bezgalībā pieņem ļoti lielas pozitīvas vērtības. Bet, ja x tiecas uz mīnus bezgalību, dotās funkcijas vērtības kļūst ļoti mazas negatīvas.

9. Pirmā veida kritiskie punkti

Atvasināsim doto funkciju

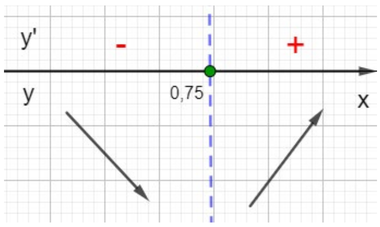
$$y'=e^{4x-1}+(x-1)e^{4x-1}\cdot 4=e^{4x-1}(4x-3)$$

Aprēķināsim funkcijas pirmā veida kristisko punktu

$$y'=0;\;\; 4x-3=0, \text{tad } x=0{,}75$$

10. Monotonitātes intervāli un ekstrēmi

Atliksim kritisko punktu uz skaitļu ass un noteiksim funkcijas atvasinājuma zīmi intervālos, kā arī ekstrēma punkta veidu (skat. attēlu 36).



Attēls 36

Funkcija aug intervālā $x\in(0{,}75;\ \infty)$

Funkcija dilst intervālā $x\in(-\infty;\ 0{,}75)$

Funkcijas lokālais minimums ir

$$x=0{,}75, \text{tad } y=(0{,}75-1)e^{0{,}75\cdot 4-1}=-0{,}25e^{2}\approx -1{,}85$$

11.Otrā veida kritiskie punkti

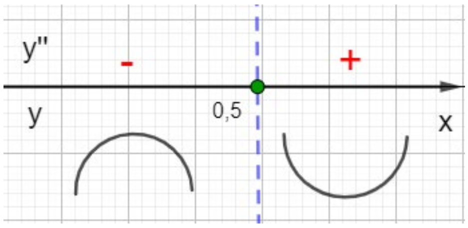
Aprēķināsim funkcijas otrās kārtas atvasinājumu un otrā veida kritisko punktu

$$y''=4e^{4x-1}+(4x-3)e^{4x-1}\cdot 4=4e^{4x-1}(4x-2)$$

$$y''=0, \text{tad } x=0{,}5$$

14. Ieliekuma un izliekuma intervāli, pārliekuma punkti

Aplūkosim, kāda veida intervālos kritiskie punkti iedala skaitļu asi, kāda būs funkcijas izturēšanās šajos intervālos. Shēma dota attēlā 37.



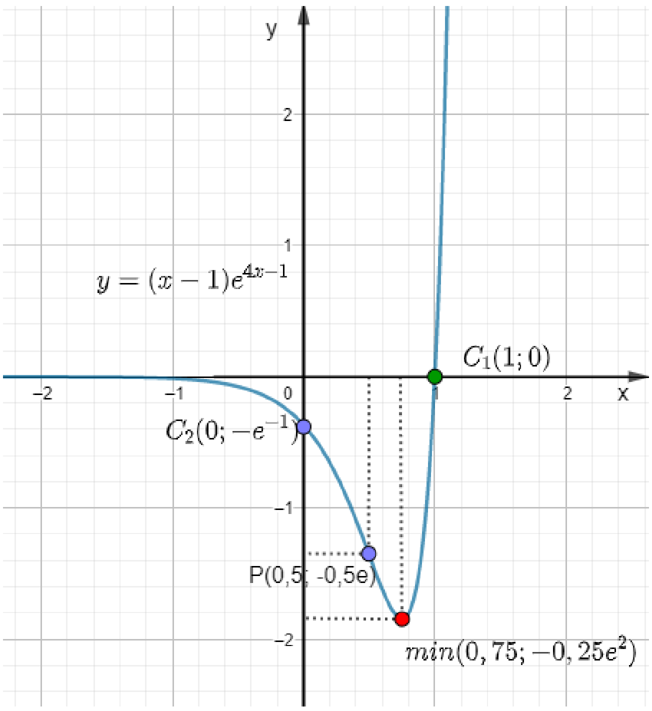
Attēls 37

Funkcijas grafiks ir izliekts intervālā $x \in (-\infty;\ 0{,}5)$
Funkcijas grafiks ir ieliekts intervālos $x \in (0{,}5;\ \infty)$
Funkcijas grafikam ir pārliekuma punkts

$$x = 0{,}5;\ \ y = -0{,}5e \approx -1{,}34$$

13. Grafika konstruēšana

Grafika konstruēšanai izmantosim GeoGebra programmu.



Attēls 38

Grafikā attēlojam arī visus svarīgos punktus: funkcijas minimuma punktu *min*, krustpunktus ar asīm C_1 un C_2, funkcijas grafika pārliekuma punktu P.

6.19 Vingrinājumi

1. Noteikt funkcijas lielāko un mazāko vērtību dotajā intervālā.
   2. $y = x^4 + 8x^3 + 16x^2; \quad x \in [-3;\ 1]$
   3. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2; \quad x \in [2;\ 5]$
   4. $y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15; \quad x \in [-2;\ -0{,}5]$
   5. $y = x + 2\sqrt{x}; \quad x \in [0;\ 4]$

3. Veikt pilnu funkcijas pētījumu un konstruēt tās grafiku.
   1. $y = x^4 - 2x^2 - 5$
   2. $y = x^3 - 9x^2 + 24x$
   3. $y = (x-4)x^2$
   4. $y = \dfrac{12x}{x^2+9}$
   5. $y = \dfrac{x^3 - x^2}{(x+1)^2}$
   6. $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2(x^2 - 2x + 1)}$
   7. $y = x^3 e^{\frac{1}{x}}$
   8. $y = \ln(x^2 - 4x + 8)$
   9. $y = 2x - \arcsin x$

6.20 Pielietojumi

Jūrlietas neaptver tikai kuģošanu vai ar kuģošanu saistītas darbības un navigāciju. Jūrlietu kompetencē ir noteikumi par kuģošanas drošību, darbiniekiem un uzņēmumiem, sākot no kuģubūves līdz tirdzniecībai, transportam un lietu organizācijai un pārvaldībai. Dažāda veida reālās dzīves un jūrniecības problēmas un jautājumus var risināt ar matemātiskās analīzes aprēķinu palīdzību.

Funkciju atvasinājumus var lietot ekstrēma uzdevumu risināšanā, lai noteiktu konkrētu funkciju maksimālās un minimālās vērtības (piemēram, izmaksas, izturību, ēkā izmantotā materiāla daudzuma efektivitāti, peļņu, zaudējumus un daudzus citus jautājumus). Atvasinājumus pielieto arī jūrniecības jomā, risinot uzdevumus par kuģa ātrumu un pozīciju, kā arī dažāda veida vielu daudzuma maiņas ātrumu zināmos apstākļos.

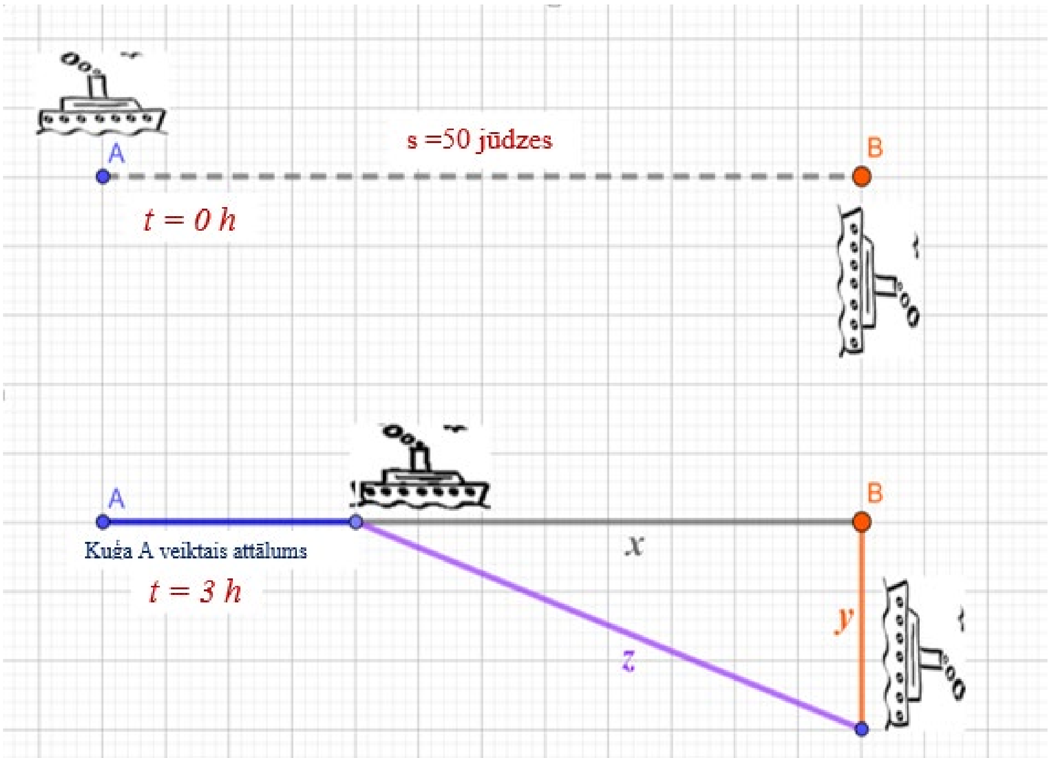
6.20.1 Procesa maiņas ātrums

1. piemērs

Kuģis A ir 50 jūras jūdzes attālumā rietumu pusē no kuģa B. Kuģis A virzās uz austrumiem ar ātrumu 10 mezgli, bet kuģis B iet uz dienvidiem ar ātrumu 15 mezgli. Aprēķiniet, kāds būs attālums starp kuģiem pēc 3 stundām! Kāds būs attāluma maiņas ātrums starp abiem kuģiem?

Atrisinājums:

Doto situāciju parādīsism sekojošajā attēlā 39:



Attēls 39

Apskatīsim situāciju pēc 3 stundām. Ar y apzīmēsim attālumu, ko veicis kuģis B, ar x apzīmēsim kuģa A atrašanās vietu attiecībā pret kuģa B izejas punktu. Ar z apzīmēsim attālumu starp abiem kuģiem. Piezīmēsim, ka lielumi x, y, z ir funkcijas, kas atkarīgas no laika, bet sākotnējais attālums starp kuģiem $s = 50$ jūdzes, ir konstants lielums.

Ievērojot, ka x apzīmē kuģa A attālumu līdz kuģa B sākuma pozīcijai, tad funkcijas x atvasinājums pēc argumenta t izsaka kuģa A pārvietošanās ātrumu. Ievērojot, ka attālums x samazinās, kuģim A virzoties uz priekšu, tad

$$\frac{dx}{dt} = -10 \text{ jūras jūdzes stundā jeb mezgli.}$$

Līdzīgi var izteikt kuģa B ātrumu

$$\frac{dy}{dt} = 15 \text{ mezgli}$$

Ievērojot, ka jāatrod, kā ir mainījies attālums starp kuģiem pēc 3 stundām, ir jāaprēķina

$$\frac{dz}{dt}\text{, ja } t = 3$$

Pielietojot zināmo formulu ceļš – ātrums – laiks $s = v \cdot t$, izteiksim

$$x = s - v_A t = 50 - 10 \cdot 3 = 20 \text{ mezgli}$$

$$y = v_B \cdot t = 15 \cdot 3 = 45 \text{ mezgli}$$

Ievērojot, ka attālumu z var izteikt kā taisnleņķa trijstūra hipotenūzu, lietosim Pitagora teorēmu un aprēķināsim

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20^2 + 45^2} = 49{,}24 \text{ mezgli}$$

Lai noteiktu attāluma maiņas ātrumu starp kuģiem, atvasināsim Pitagora vienādojumu pēc argumenta t

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{dz^2}{dt} = \frac{d(x^2 + y^2)}{dt}$$

$$2zz' = 2xx' + 2yy'$$

$$z' = \frac{2xx' + 2yy'}{2z} = \frac{2 \cdot 20 \cdot (-10) + 2 \cdot 45 \cdot 15}{2 \cdot 49.24} = 19{,}29 \text{ mezgli}$$

Pēc 3 stundām attālums starp abiem kuģiem mainīsies ar ātrumu 19,29 mezgli.

2. Piemērs

Kuģis peld saskaņā ar sekojošo likumu:

$$s = \left(1272{,}7 \cdot ln\frac{1 + 6 \cdot e^{0{,}055t}}{7} - 50t\right) \text{ metri}$$

Ir jānosaka kuģa sākuma ātrums.

<u>Atrisinājums</u>

Ar s apzīmējam attālumu, ko veicis kuģis. Tas mainās atkarībā no kuģa peldēšanas laika, tāpēc to apzīmē $s(t)$.

Kuģa sākotnējais ātrums v ir kuģa momentānais ātrums, veicot attālumu atkarībā no patērētā laika t. Tādēļ nepieciešams aprēķināt ceļa funkcijas atvasinājumu $s'(t)$.

$$v = \frac{ds}{dt} = 1272,7 \cdot \frac{7}{1 + 6 \cdot e^{0.055t}} \cdot \frac{6}{7} \cdot e^{0,055t} \cdot 0,055 - 50$$

$$v = \frac{420}{1 + 6 \cdot e^{0,055t}} - 50$$

Kuģa sākotnējais ātrums bija laika momentā $t = 0$. Tāpēc

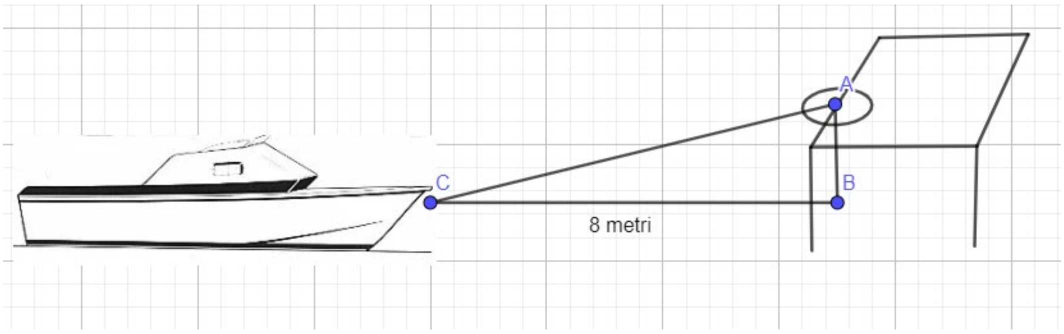
$$v_0 = \frac{420}{1 + 6} - 50 = 10\, m/s$$

3. Piemērs

Laivu ievelk piestātnē ar virves palīdzību, kuras viens gals ir piestiprināts pie laivas priekšpuses, bet otrs gals iet cauri piestātnei piestiprinātam gredzenam punktā 1 m augstāk par laivas priekšpusi. Virve tiek vilkta caur gredzenu ar ātrumu 1 m/sekundē. Cik ātri laiva tuvojas piestātnei, ja laiva no pietātnes ir 8 m attālumā?

<u>Atrisinājums:</u>

Konstruēsim zīmējumu (skat. attēlu 40)>



Attēls 40

Saskaņā ar doto $BC = 8$ metri, jo laiva atrodas 8 metru attālumā no piestātnes. Laiva par pietātni ir 1 m zemāk, tāpēc $AB = 1$. Attālums AC nav zinams, to apzīmēsim ar x jeb $AC = x$. Ievērosim, ka trijstūris ABC ir taisnleņķa trijstūris, tāpēc attālumu AC var aprēķināt pēc Pitagora teorēmas

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$x^2 = 1 + 64 = 65$$

Virves garums sākuma momentā ir $x = \sqrt{65}$

Attālums AC mainās ar ātrumu 1 m/s. Apzīmēsim $AB = y$ un $BC = z$. Samazinoties attālumam AC, tā izmaiņas ātrumu var apzīmēt ar

$$\frac{dx}{dt} = -1m/s$$

Izmaiņas ātrums ir negatīvs, jo attālums AC samazinās.

Pitagora teorēmu, izsakot to ar nezināmajiem, pārrakstām

$$x^2 = y^2 + z^2$$

Lai noteiktu laivas tuvošanās ātrumu piestātnei, tas ir, cik ātri samazinās attālums jeb nogriezis $BC = z$, ir nepieciešams diferencēt doto vienādojumu

$$d(x^2) = d(y^2 + z^2)$$

Ievērojot, ka izmaiņas ir atkarīgas no laika, diferencēt nepieciešams pēc argumenta t, tad ievērosim, ka funkciju kvadrāti ir saliktas funkcijas

$$2x\frac{dx}{dt} = d(y^2) + d(z^2) = 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dt}$$

Nogrieznis AB ir konstants, tad $y = 1$ un tā atvasinājums ir 0. Tad

$$2x\frac{dx}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

Izsakām attāluma BC maiņas ātrumu $\frac{dz}{dt}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{65}}{8}\cdot(-1) \approx -\frac{8{,}06}{8} = -1{,}011\ m/s$$

<u>Atbilde.</u> Laiva tuvojas piestātnei ar ātrumu 1,011 metri sekundē.

4. Piemērs

Atmosfēras spiediens P mainās atkarībā no ķermeņa iegrimes dziļuma x attiecībā pret ūdens līmeni saskaņā ar likumu

$$P(x) = P_0 \cdot e^{-0.12104\,x}$$

Kur P_0 ir atmosfēras spiediens uz ūdens virsmas. Ja atmosfēras spiediens uz ūdens virsmas ir 1013 milibāri, tad cik ātri tas mainās attiecībā pret iegrimi 20 km dziļumā?

<u>Atrisinājums</u>

Spiediena maiņas ātrumu nosaka funkcijas $P(x)$ atvasinājums pēc argumenta x. Tā

$P'(x) = 1013 \cdot (e^{-0{,}12104\,x})' = 1013 \cdot (-0{,}12104) \cdot (e^{-0{,}12104\,x}) = -122{,}61 \cdot (e^{-0{,}12104\,x})$

$P'(20) = -122{,}61 \cdot (e^{-0{,}12104\cdot 20}) = 10{,}8939$ milibāri/km

5. Piemērs

Jānosaka tvaika turbīnas rotācijas kustības likums tās darbības laikā. Ir zināms, ka leņķiskā ātruma palielināšanās ir proporcionāla laika trešajai pakāpei un laika momentā $t = 3$ sekundes turbīnas rotora griešanās ātrums ir $n = 810$ apgriezieni minūtē.

<u>Atrisinājums</u>

Formula, kas apraksta rotācijas kustības likumu, ir

$$\varphi = k \cdot t^3$$

Var teikt, ka leņķiskais ātrums izsaka rotora pagrieziena leņķi kādā laika momentā. Analītiski tas nozīmē leņķa funkcijas φ atvasinājumu pēc argumenta t

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3 \cdot\ k \cdot t^2$$

No šī vienādojuma izteiksim proporcionalitātes koeficientu k

$$k = \frac{\omega}{3 \cdot t^2} = \frac{\pi \cdot n}{3 \cdot 30 \cdot t^2}$$

$$k = \frac{\pi \cdot 810}{3 \cdot 30 \cdot 9} = \pi$$

Precizēsim turbīnas rotācijas kustības likumu

$$\varphi = \pi \cdot t^3$$

Izteiksim leņķisko ātrumu

$$\omega = 3 \cdot \pi \cdot t^2$$

Aprēķināsim arī turbīnas rotora paātrinājumu ε

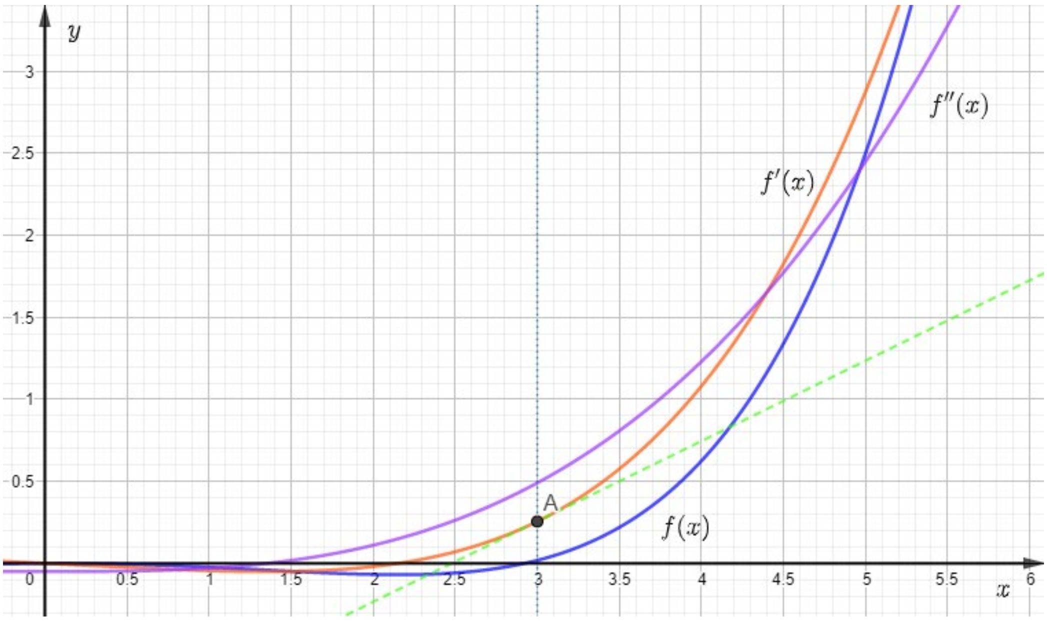
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \varphi'' = 6 \cdot \pi \cdot t.$$

6. Piemērs

Tērauda troses liekumu apraksta vienādojums $f(x) = 10^{-3}(x^5 - 25x^2)$, kur x apzīmē troses punktu attālumu līdz dotai sijai. Aprēķināt funkcijas otrās kārtas atvasinājumu punktā $x = 3$.

<u>Atrisinājums</u>

Konstruēsim funkcijas, tās pirmās kārtas atvasinājuma un tās otrās kārtas atvasinājuma grafikus (skat. attēlu 41).



Attēls 41

Funkcijas otrās kārtas atvasinājums raksturo dotās funkcijas izliekumu. Tāpat arī, ja aplūkojam funkcijas pirmās kārtas atvasinājumu, tad otrās kārtas atvasinājums dotajā punktā vienāds ar tās pieskares virziena koeficientu (skat. attēlā 41 punktā A novilkto pieskari).

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(10^{-3}x^5)}{dx} - \frac{d\left(10^{-3}25x^2\right)}{dx} = 10^{-3}(5x^4 - 50x)$$

$$y'' = 10^{-3}(20x^3 - 50)$$

$$y''_{x=3} = 0{,}49$$

6.20.2 Ekstrēmu uzdevumi

7. Piemērs

Aplūkosim praktisku piemēru. Saimniekam ir 300 metru garš stiepļu žogs. Viņš plāno izveidot putnu aploku ar vislielāko laukumu. Aplokam ir jābūt taisnstūra formā.

Atrisinājums

Pieņemsim, ka taisnstūra malu garumi ir x un y. Tad aploka laukums ir

$$S = xy$$

Aprēķināsim arī tā perimetru un pārveidosim laukuma formulu

$$P = 2x + 2y$$

$$2y = 300 - 2x$$

$$y = 150 - x$$

$$S = x(150 - x) = 150x - x^2$$

Funkcija S izteicām kā vienargumenta funkciju. Lai varētu atrast lielāko funkcijas vērtību, risināsim ekstrēmu uzdevumu – atvasināsim funkciju un atradīsim tās kritisko punktu.

$$S' = 150 - 2x$$

$$150 - 2x = 0$$

$$x = 75$$

Konstruēsim funkcijas grafiku (skat. attēlu 42).

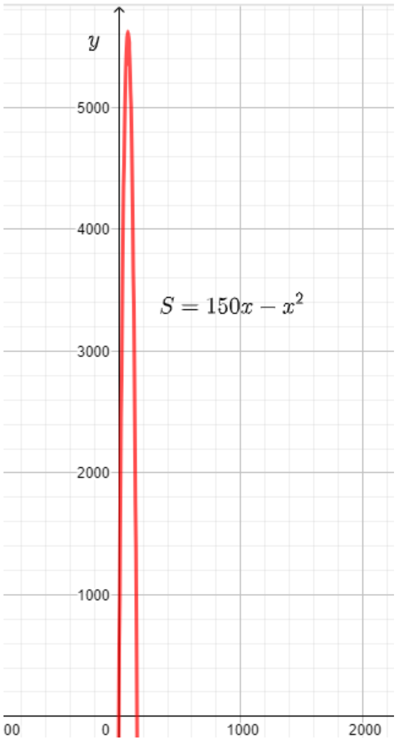
Kā redzams, punktā $x = 75$ ir funkcijas maksimālā vērtība $S(75) = 5625$.

Piezīme. Funkcijas lielāko vērtību var noteikt arī analītiski, nosakot funkcijas atvasinājuma zīmi kritiskā punkta blakus intervālos.

Ja aploka vienas malas garums ir $x = 75$ metri, tad otras malas garums ir

$$y = 150 - x = 150 - 75 = 75\ m$$

No tā seko, ka saimniekam ir jākonstruē kvadrātveida aploks.



Attēls 42

8. Piemērs

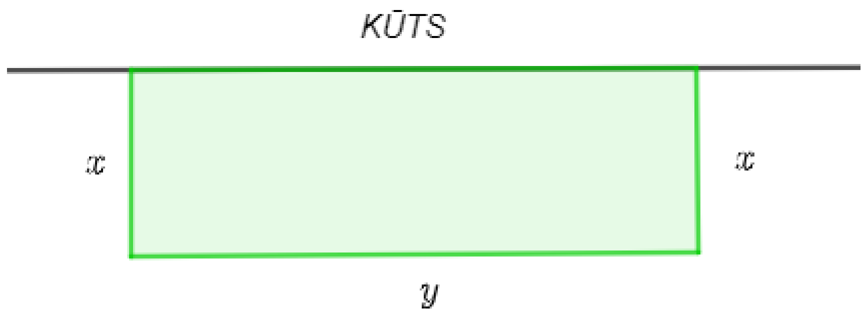
Septītajā piemērā minētajā gadījumā saimniekam ienāca prātā, ka viņš varētu uzbūvēt putnu aploku pie vienas no kūts sienām (skat. attēlu 43).

Attēls 43

Vai saimniekam izdosies palielināt aploka laukumu, ja metāla stiepļu žoga garums ir tas pats – 300 metri, bet aplokam jābūt taisnstūrveida.

<u>Atrisinājums</u>

Vispirms izveidosim aploka plānu (skat. attēlu 44).



Attēls 44

Tā malas ir garumā x un y metri. Aprēķināsim aploka triju malu perimetru

$$P = 2x + y$$

$$y = 300 - 2x$$

Izteiksim aploka laukumu un atvasināsim funkciju

$$S = xy = 300x - 2x^2$$

$$S' = 300 - 4x$$

Pielīdzināsim atvasinājumu nullei un aprēķināsim kritisko punktu x, kā arī vērtību y

$$300 - 4x = 0$$

$$x = 75$$

$$y = 300 - 2 \cdot 75 = 150$$

Laukuma lielums ir

$$S = 150 \cdot 75 = 11250$$

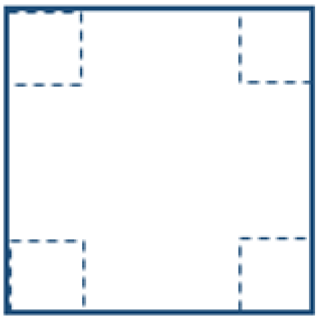
Laukumu starpība, izmantojot astotā un dotā piemēra rezultātus, ir

$$S_2 - S_1 = 11250 - 5625 = 5625\ m^2$$

Gudrais saimnieks var uzbūvēt aploku ar divas reizes lielāku laukumu.

9. Piemērs

No kvadrātveida metāla loksnes ar izmēru 2 x 2 metri ir jāizgatavo konteiners. Atslēdzniekam loksnes stūros ir jāizgriež kvadrāti, loksne jāloca un šuves jāsametina (skat attēlu 45). Cik lieliem ir jābūt izgrieztajiem kvadrātiem, lai iegūtu konteineru ar vislielāko tilpumu?



Attēls 45

Atrisinājums

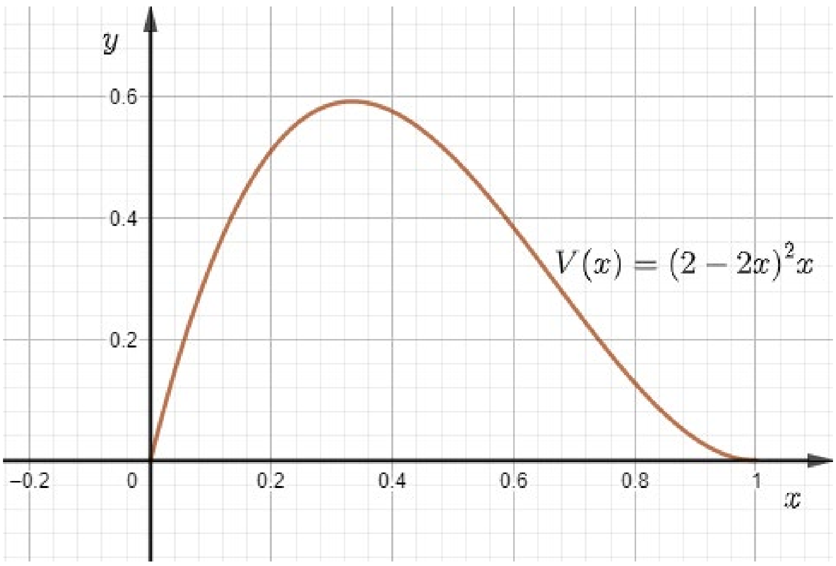
Izgriežamā kvadrāta laukumu apzīmēsim ar x. Konteinera apakša arī ir kvadrāts, tā malas garums ir

$$l = 2 - 2x$$

Konteinera tilpumu aprēķināsim pēc formulas

$$V(x) = x \cdot l^2 = x(2 - 2x)^2$$

Konstruēsim funkcijas $V(x)$ grafiku, ievērojot, ka doto izmēru dēļ $0 < x < 1$ (skat. attēlu 46).



Attēls 46

Aprēķināsim funkcijas atvasinājumu, lai noteiktu argumenta x kritisko vērtību

$$V'(x) = (4x^3 - 8x^2 + 4x)' = 12x^2 - 16x + 4$$

Atrisināsim vienādojumu

$$12x^2 - 16x + 4 = 0$$

Vienādojumam ir divas saknes

$$x_1 = 1; \;\; x_2 = \frac{1}{3}$$

Ievērojot, ka izgriezto kvadrātu malai ir jābūt mazākai nekā 1 metrs, seko, ka kritiskais punkts ir $x_2 = \frac{1}{3}$.

Aprēķināsim konteinera tilpumu

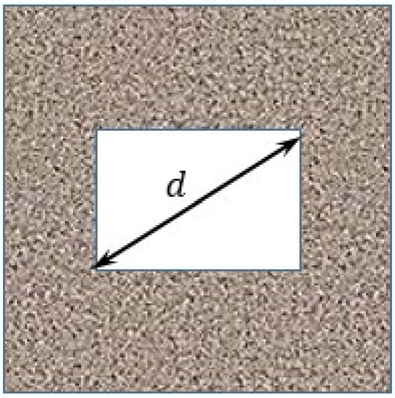
$$V(x) = x(2-2x)^2 = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{27} \approx 0{,}59\, m^3$$

10. Piemērs

Praktiskiem nolūkiem kuģa atslēdzniekam ir jāizgatavo sekojoša detaļa. Metāla plāksnes ar izmēru 10 x 10 cm centrā ir jāizgriež taisnstūrveida caurums, kuram apkārt ir jāpiemetina stieple. Plāksnes viena kvadrātcentimetra svars ir 2 grami, bet stieples viena centimetra svars ir 7 grami. Izgriezuma taisnstūra diagonāles garumam ir jābūt 5 cm. Pagatavojamajai detaļai ir jābūt ar iespējami lielāko svaru.

Atrisinājums

Aplūkosim detaļu, kas dota attēlā 47.



Attēls 47

Cauruma diagonāles garums ir $d = 5\ cm$, taisnstūra malas apzīmēsim ar x un y.

Izveidosim funkciju, kura apraksta iegūstamās detaļas svaru.

Dotās plāksnītes svars ir $W_1 = 2 \cdot 100 = 200\ g$

Izgrieztā taisnstūra svars ir $W_2 = 2 \cdot xy\ g$

Stieples, kuru piemetinās, svars ir $W_3 = 7 \cdot 2(x + y)$ g

Rezultātā detaļas svars ir

$$W = W_1 - W_2 + W_3$$

$$W = 200 - 2xy + 14(x + y)$$

Lai varētu atrast funkcijas lielāko vērtību, izteiksim to kā vienargumenta funkciju. Izmantosim sakarību starp x un y. Malas kopā ar diagonāli veido taisnleņķa trijstūri, tāpēc var lietot Pitagora teorēmu

$$d^2 = x^2 + y^2$$

$$25 = x^2 + y^2$$

Veiksim algebrisku pārveidojumu

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy =$$

$$= (x^2 + 2xy + y^2) - 2xy =$$

$$= (x + y)^2 - 2xy = 25$$

Tad

$$2xy = (x+y)^2 - 25$$

Funkcijas W izteiksmē aizvietosim $2xy$

$$W = 200 - 2xy + 14(x+y) =$$

$$= 200 - ((x+y)^2 - 25) + 14(x+y)$$

Veiksim substitūciju, lai iegūtu vienargumenta funkciju

$$t = x + y$$

$$W(t) = 200 - t^2 + 25 + 14t = -t^2 + 14t + 225$$

Atvasināsim funkciju pēc argumenta t un atradīsim tās ekstrēmālo vērtību

$$W'(t) = -2t + 14 = 0$$

$$t = 7$$

Detaļas lielākais iespējamais svars ir

$$W(7) = -49 + 98 + 225 = 274\ g$$

Aprēķināsim taisnstūra izmērus

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Izmantosim ievietošanas metodi, lai atrisinātu sistēmu

$$y = 7 - x$$

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

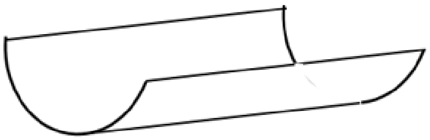
Pēc Vjeta teorēmas ir viegli noteikt saknes

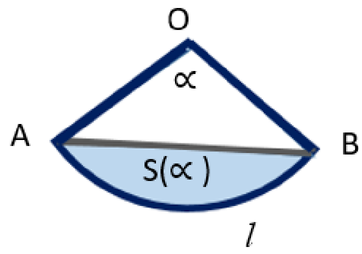
$$x_1 = 3;\ \ x_2 = 4$$

Līdz ar to zinām, ka izgriežamā taisnstūra vienas malas garums ir 3cm, bet otras malas garums ir 4 cm.

11. Piemērs

Priekš kāda eksperimenta ir jāizveido kanāls no metāliskas loksnes tā, lai caur to plūstu vislielākais ūdens daudzums. Plāksnes izliekuma šķērsgriezumam $S(\alpha)$ ir riņķa segmenta forma (skat. attēlu 48), kur atbilstošais sektora leņķis ir α. Aprēķināt šī leņķa lielumu!





Attēls 48

Atrisinājums

Lielākais ūdens daudzums caur kanālu izplūdīs, ja atbilstošajam segmentam būs vislielākais laukums. Ievērosim arī, ka leņķa robežas ir $0 < \alpha \leq 180°$.

Loksnes malas garumu apzīmēsim ar l, bet riņķa sektora rādiusu OA ar r. Aplūkosim riņķa segmenta laukuma formulu

$$S(\alpha) = \frac{\alpha r^2}{2} - \frac{1}{2}r^2 sin\alpha = \frac{r^2}{2}(\alpha - sin\alpha)$$

Ievērosim, ka $l = \alpha r$, kur leņķis α ir izteikts radiānos. Tad

$$S(\alpha) = \frac{l^2}{2\alpha^2}(\alpha - sin\alpha) = \frac{l^2}{2} \cdot \frac{\alpha - sin\alpha}{\alpha^2}$$

Izpētīsim atbilstošu funkciju

$$f(x) = \frac{x - sinx}{x^2}$$

Meklēsim šīs funkcijas ekstrēmus

$$f'(x) = \frac{(1 - cosx)x^2 - 2x(x - sinx)}{x^4} =$$

$$= \frac{(1 - cosx)x - 2(x - sinx)}{x^3} =$$

$$= \frac{2sinx - x(1 + cosx)}{x^3}$$

Veiksim trigonometriskus pārveidojumus

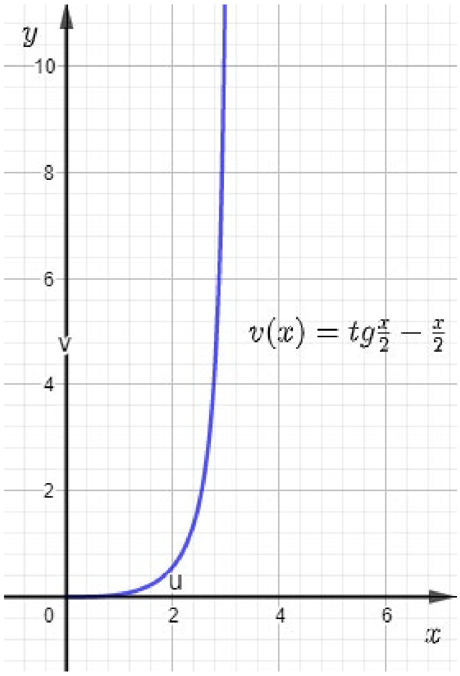
$$f'(x) = \frac{2 \cdot 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} - x(2cos^2\frac{x}{2})}{x^3}$$

Pieņemot, ka $x \neq 0$, sīkāk izpētīsim skaitītāju

$$4sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} - x \cdot 2cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= 4cos^2\frac{x}{2}\left(tg\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

Šī izteiksme būs vienāda ar nulli tikai tad, ja $cos^2\frac{x}{2}=0$. Otrās iekavās ir funkcija, kura dotajās robežās $0<x\leq\pi$ nav vienāda ar nulli (skat attēlu 49).



Attēls 49

Dotajās robežās vienādojuma $cos\frac{x}{2}=0$ atrisinājums ir $x=\pi$.

Tātad $\alpha=\pi$. Un atbilstošais kanāla šķērsgriezuma laukums, caur kuru izplūdīs lielākais ūdens daudzums ir

$$S(\alpha)=\frac{l^2}{2\alpha^2}(\alpha-sin\alpha)=\frac{l^2}{2\pi^2}(\pi-sin\pi)=\frac{l^2}{2\pi}$$

12. Piemērs

Sauskravas kuģim ir nepieciešams konteiners, kuram ir kvadrātveida pamats, atvērta augša, bet tilpums ir 5000 kubikmetri. Kāds ir šāda konteinera mazākais iespējamais virsmas laukums?

<u>Atrisinājums</u>

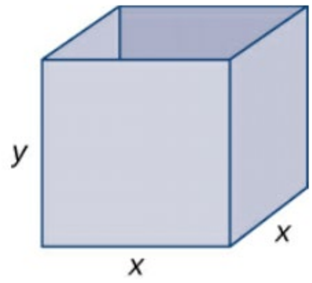
Apzīmēsim konteinera dimensijas ar x un y (skat. attēlu 50).

Tad tā virsmas laukums ir

$$S=4xy+x^2$$

Konteinera tilpums

$$V=x^2y=5000\ m^3$$



Attēls 50

Var pārveidot virsmas laukuma formulu par vienargumenta funkciju

$$y = \frac{5000}{x^2}$$

$$S(x) = 4x \cdot \frac{5000}{x^2} + x^2 = \frac{20\,000}{x} + x^2$$

Aprēķināsim funkcijas atvasinājumu un noteiksim kritiskos punktus

$$S'(x) = -\frac{20\,000}{x^2} + 2x = 0$$

$$x^3 = 10\,000$$

$$x = 10\sqrt[3]{10}$$

Ievērosim, ka konteinera pamata malas garums $x > 0$. Ir viens kritiskais punkts, kas skaitļu intervālu sadala 2 daļās. Noteiksim funkcijas atvasinājuma vērtības katrā intervāla daļā, izvēloties pa vienam pārstāvim no katra intervāla.

Izvēlēsimies $x = 1 < 10\sqrt[3]{10}$ tad

$$S'(x) = -\frac{20\,000}{x^2} + 2x = -20000 + 2 < 0$$

Izvēlēsimies $x = 1000 > 10\sqrt[3]{10}$

$$S'(x) = -\frac{20\,000}{x^2} + 2x = -\frac{20\,000}{1000^2} + 2000 = 2000 - 0.02 > 0$$

Secinām, ka pa kreisi no kritiskā punkta funkcija dilst, bet pa labi aug. Tad punktā $x = 10\sqrt[3]{10}$ ir funkcijas minimālā vērtība. Aprēķināsim konteinera augstumu

$$y = 5\sqrt[3]{10}$$

Aprēķināsim konteinera virsmas laukumu

$$S(x) = \frac{20\,000}{x} + x^2 = \frac{20\,000}{10\sqrt[3]{10}} + \left(10\sqrt[3]{10}\right)^2 = 300\sqrt[3]{10^2} \approx 1392{,}48\, m^2$$

13. Piemērs

Kanoe laivu izīrēšanas firma grib aprēķināt peļņas efektivitāti. Tā izīrē laivu par p eiro dienā, kur cena p var būt robežās $50 \leq p \leq 200$ eiro. Ir noteikts, ka laivu skaits n, ko var izīrēt vienā dienā, ir izsakāms kā lineāra funkcija atkarībā no laivas īres cenas

$$n(p) = 1000 - 5p.$$

Ja vienas laivas īres cena nepārsniedz 50 EUR, tad ir iespējams izīrēt visas laivas. Ja vienas laivas īres cena ir ne mazāka kā 200 EUR, tad nav iespējams izīrēt nevienu laivu. Kā firma var palielināt savus ienākumus, izīrējot laivas?

<u>Atrisinājums</u>

Firmas iespējamos ienākumus vienā dienā apzīmēsim ar R. To var aprēķināt pēc formulas

$$R = n \cdot p = (1000 - 5p) \cdot p = -5p^2 + 1000p$$

Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, arguments p ir robežās $p \in [50, 200]$.

Funkcija $R(p)$ dotajā slēgtajā intervālā ir nepārtraukta, tāpēc var aprēķināt tās lielāko iespējamo vērtību. Aprēķināsim to ar atvasinājuma palīdzību

$$R'(p) = -10p + 1000 = 0$$

$$p = 100$$

Funkcijas vērtība kritiskajā punktā $p = 100$ ir

$$R(100) = 50\,000$$

Funkcijas vērtības intervāla galapunktos

$$R(50) = 37\,500$$

$$R(200) = 0$$

Firma gūs vislielākos ienākumus, ja vienas kanoe laivas īre būs $p = 100$ EUR.