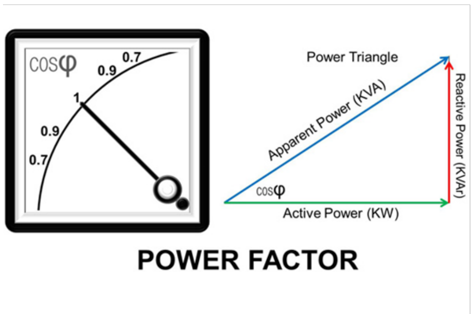
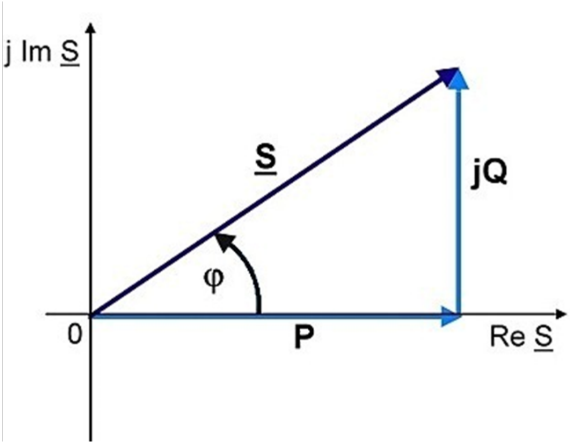
2 KOMPLEKSNI BROJEVI





Kompleksni brojevi su vrlo važni u inženjerstvu. Imaju primjenu u mnogim područjima, uključujući elektroniku, analizu signala i digitalnu obradu slike.

Ciljevi:

1) Uvođenje pojma kompleksnih brojeva
2) Pokazivanje učenicima operacija s kompleksnim brojevima
3) Uvođenje algebarskih i polarnih oblika
4) Učenici znaju raditi operacije s kompleksnim brojevima

Plan učenja:

1) Organizacijski trenutak
2) Predstavljanje novog materijala
3) Rješavanje zadataka
4) Davanje domaće zadaće
5) Završetak lekcije

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

SADRŽAJ

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

2.1 Imaginarna jedinica i

Imaginarna jedinica definira se kao

$i = \sqrt{-1}$, gdje je $i^2 = -1$.

2.2 Kompleksni brojevi i imaginarni brojevi

Skup svih brojeva u obliku $a + bi$ s realnim brojevima a i b i i imaginarna jedinica, naziva se skup **kompleksnih brojeva** .

Realni broj a naziva se **realni dio** , a realni broj b naziva se **imaginarni dio** kompleksnog broja $a + bi$.

Ako $je\ b \neq 0$ tada se kompleksni broj naziva ***imaginarni broj*** . Zamišljeni broj u obliku *bi* naziva se ***čisti imaginarni broj*** .

2.3 Operacije s kompleksnim brojevima

1) $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$
2) $(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$
3) $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$

PRIMJER 1:

1) $(2 + 5i) + (3 - 9i) = 2 + 5i + 3 - 9i = (2 + 3i) + (5i - 9i) = 5 - 4i$
2) $(1 + 3i) - (7 - 2i) = 1 + 3i - 7 + 2i = (1 - 7) + (3i + 2i) = -6 + 5i$
3) $(1 - 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i - 6i - 8i^2 = 3 + 4i - 6i + 8 = 11 - 2i$

2.4 Kompleksno konjugirani brojevi i dijeljenje

Kompleksno konjugirani broj broja $a + bi$ je

$$a - bi$$

a kompleksno konjugirani broj od $a - bi$ je

$$a + bi\,.$$

Množenje kompleksno konjugiranih brojeva daje realan broj.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$(a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2$$

Kompleksno konjugirani brojevi se koriste za dijeljenje kompleksnih brojeva. Cilj postupka dijeljenja je dobiti realan broj u nazivniku .

Ovaj realni broj postaje nazivnik a i b u kvocijentu $a + bi$.

Množenjem brojnika i nazivnika s kompleksno konjugiranim nazivnikom dobit će se realni broj u nazivniku.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$c^2 + d^2 \neq 0$

PRIMJER 2:

1) $\frac{2-5i}{3+i} = \frac{(2-5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i-15i+5i^2}{9-i^2} = \frac{6-2i-15i-5}{9+1} = \frac{1-17i}{10}$

2) $\frac{1+4i}{5-2i} = \frac{(1+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{5+2i+20i+8i^2}{25-4i^2} = \frac{5+2i+20i-8}{25+4} = \frac{-3+22i}{29}$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

2.5 Polarni oblik kompleksnog broja

Kompleksni broj $z = a + bi$ napisan je u ***polarnom obliku*** kao

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gdje $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ i

$$\varphi = \begin{cases} 2\pi - arctan\left|\frac{b}{a}\right|, \ if\ a > 0,\ b < 0 \\ arctan\left|\frac{b}{a}\right|, \ if\ a > 0, b \geq 0 \\ \pi - arctan\frac{b}{a}, \ if\ a < 0,\ b > 0 \\ \pi + arctan\frac{b}{a}, \ if\ a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, if\ b > 0,\ a = 0 \\ \frac{3\pi}{2}, if\ b < 0,\ a = 0 \end{cases}$$

Vrijednost ***r*** naziva se modulom kompleksnog broja i kut ϕ naziva se *argument* kompleksnog broja z s $0 \leq \varphi < 2\pi$.

PRIMJER 3 : Napiši z = $1 + \sqrt{3}i$ u polarnom obliku. a =1, b =$\sqrt{3}$

1) $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
2) a > 0, b > 0,$\varphi = arctan\left|\frac{b}{a}\right| = arctan\left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \frac{\pi}{3}$
3) z = 2 (cos $\frac{\pi}{3}$+ *i* sin $\frac{\pi}{3}$)

2.6 Umnožak dvaju kompleksnih brojeva u polarnom obliku

Neka su $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ dva kompleksna broja u polarnom obliku.

Njihov produkt, z_1z_2 je

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Da biste pomnožili dva kompleksna broja, pomnožite module i zbrojite argumente.

PRIMJER 4 : Pronađite $z_1 z_2$, ako $z_1 = 4(\cos 30° + i\sin 30°)$ i $z_2 = 2(\cos 60° + i\sin 60°)$.

$$z_1 z_2 = 4(\cos 30° + i\sin 30°) \cdot 2(\cos 60° + i\sin 60°)$$
$$= 4 \cdot 2[\cos(30° + 60°) + i\sin(30° + 60°)] = 8(\cos 90° + i\sin 90°)$$

2.7 Kvocijent dvaju kompleksnih brojeva u polarnom obliku

Neka su $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ dva kompleksna broja u polarnom obliku.

Njihov kvocijent $\frac{z_1}{z_2}$je $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

Da biste podijelili dva kompleksna broja, podijelite module i oduzmite argumente.

PRIMJER 5 : Pronađite $\frac{z_1}{z_2}$, ako $z_1 = 10(\cos 58° + i\sin 58°)$ i $z_2 = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10(\cos 58° + i\sin 58°)}{2(\cos 30° + i\sin 30°)} = 5[\cos(58° - 30°) + i\sin(58° - 30°)]$$
$$= 5(\cos 28° + i\sin 28°)$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

2.8 Vježbe

Vježba 1

Zborjite i zapišite rezultat u standardnom obliku.

$a)\ (3+5i)+(4+6i)$ $\quad b)\ (-4+6i)-(-7+5i)$

$c)\ (-0{,}2-1{,}1i)+(-0{,}8-1{,}9i)$ $\quad d)\ \left(1\frac{3}{4}-2{,}5i\right)-\left(\frac{1}{3}-0{,}5i\right)$

Vježba 2

Zbrojite ili oduzmite kako je naznačeno i zapišite rezultat u standardnom obliku.

$a)\ (1+i)+(2-3i)-(3+4i)$ $\quad b)\ (0{,}4-4{,}2i)-(1{,}5+0{,}6i)+3{,}3i$

$c)\ \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\ i\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\ i\right)-\left(\frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\ i\right)$ $\quad d)\ [0,(3)+1{,}1(6)i]-[0{,}1(3)-0,(2)i]$

Vježba 3

Pronađite svaki produkt i zapišite rezultat u standardnom obliku.

$a)\ (3+2i)(4-5i)$ $\quad b)\ (5-6i)(1-3i)$ $\quad c)\ (1-i)(1+i)$

$d)\ (1-i)(3+4i)$ $\quad e)\ (-5i-4)(3-i)$ $\quad f)\ (2-2i)(4i+5)$

Vježba 4

Pronađite svaki produkt i zapišite rezultat u standardnom obliku.

$a)\ \left(1+2\sqrt{3}\ i\right)\left(2-3\sqrt{3}\ i\right)$ $\quad b)\ 2i(1-\sqrt{3}\ i)(1+\sqrt{3}\ i)$

$c)\ (6-7i)(5+5)(3-5i)$ $\quad d)\ 2i(7+10i)(2-4i)$

$e)\ (2-3i)(-1-i)(3+4i)$ $\quad f)\ (5+4i)(-2-i)(5-4i)(-2+1)$

Vježba 5

Podijelite i izrazite rezultat u standardnom obliku.

$a)\ \frac{1}{1+i}$ $\quad b)\ \frac{3+i}{3-i}$ $\quad c)\ \frac{2i-3}{1-3i}$ $\quad d)\ \frac{3-5i}{2+3i}$

$e)\ \frac{1+\sqrt{3}\ i}{1-\sqrt{3}\ i}$ $\quad f)\ \frac{1+\sqrt{15}\ i}{1-\sqrt{3}\ i}$ $\quad g)\ \frac{\sqrt{6}\ -\ i}{\sqrt{6}-2i}$ $\quad h)\ \frac{1+2i}{1+\sqrt{2}i}$

Vježba 6

Napiši kompleksni broj u polarnom obliku. Argument možete izraziti u stupnjevima ili radijanima.

a) 1 b) 3 *i* c) -2 *i* d) - *i* e) 6 *i* f) -2 g) *i* h) -5 *i*

Vježba 7

Napiši kompleksni broj u polarnom obliku. Argument možete izraziti u stupnjevima ili radijanima.

a) 3 + i b) -3 - i c) 6 + 6i3 d) 6 - 6i3

e) -6 + 8i f) 2. 7 – 3.2i g) 1.8 + 0. 52i h) 2.7 – 1. 32i

Vježba 8

Pronađite umnožak i kvocijent kompleksnih brojeva. Ostavite odgovore u polarnom obliku.

a) $z = 4(cos\, 70° + Isin\, 70°)$ $w = 2(cos\, 40° + isin\, 40°)$

b) $z = 8(cos\, 80° + isin\, 20°)$ $w = 4(cos\, 80° + isin\, 20°)$

c) $z = 14(cos\, 3\pi/2 + isin 3\pi/2)$ $w = 7(cos\, 5\pi 4 + isin\, 5\pi/4)$

d) $z = 15(cos\, 4\pi/3 + isin 4\pi/3)$ $w = 5[(cos\, (-60°) + isin(-60°)$

2.9 Primjena kompleksnih brojeva

CILJEVI:

1) Studenti upoznavaju različite primjene kompleksnih brojeva u pomorstvu

2) Učenici upoznavaju pojam fazora i izmjenične struje

3) Učenici se upoznaju s različitim komponentama izmjeničnih krugova

2.9.1 Kompleksni brojevi u električnim krugovima

Uvod u izmjeničnu struju i fazore

Postoje dvije vrste izvora električne energije koje se koriste i na brodovima i na kopnu: istosmjerna (DC) i izmjenična struja (AC) (Sl. 1.1, *a* , *b*). Pretpostavimo da na otpornik *R* *primjenjujemo istosmjerni ili izmjenični napon*. Otporni element *R* modelira transformaciju električne energije u bilo koji drugi oblik energije: mehaničku, toplinsku, svjetlosnu, kemijsku itd.

Ako se istosmjerni napon *U* dovede na otpornik s otporom *R* (slika 1.1, *c*) to će uzrokovati istosmjernu struju *I* koja teče u krugu (slika 1.1, *d*). I napon i struja su unipolarni i međusobno povezani pomoću Ohmovog zakona

$$I = \frac{U}{R}.$$

Snaga koja se rasipa u otporniku *R* može se pronaći korištenjem Joule-Lenzovog zakona

$$P = UI = I^2 R.$$

Izmjenični napon je obični sinusni val s maksimalnom vrijednošću ili amplitudom U_m koja se matematički može opisati na sljedeći način

$$u = U_m \sin 2\pi ft = U_m \sin \omega t,$$

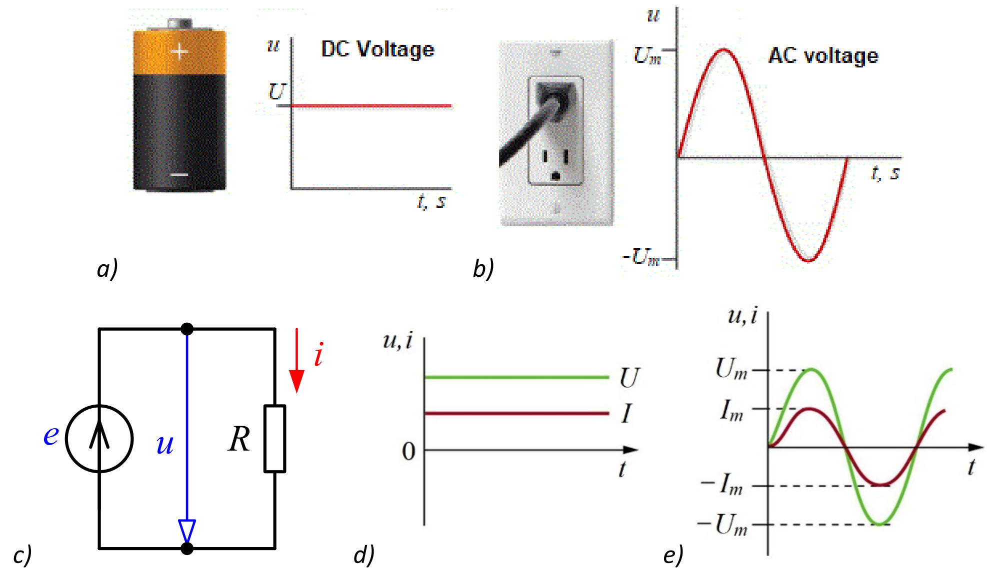
gdje je *u* trenutna vrijednost napona (V) u trenutku *t* (s), *f* je frekvencija sinusnog vala (Hz), $\omega = 2\pi f$ je kutna frekvencija (rad/s). Frekvenciju *f* možemo pronaći preko perioda *T* (s) sinusnog vala (slika 1.2) na sljedeći način

$$f = \frac{1}{T}.$$

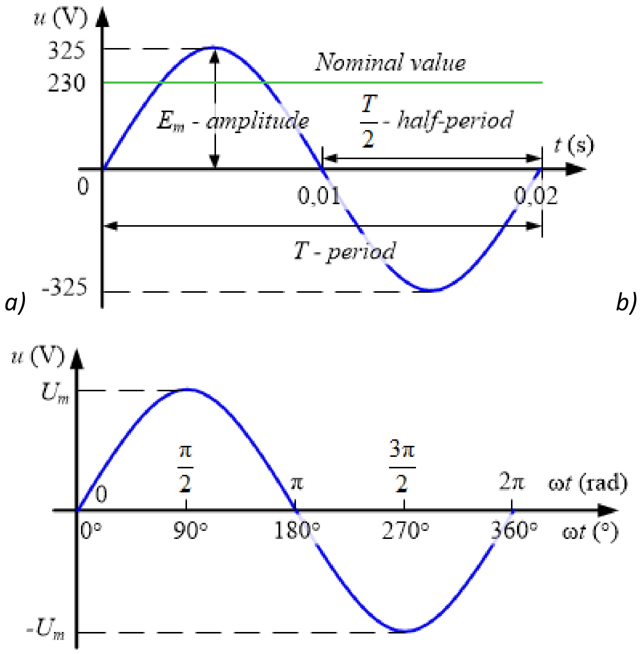
Takav sinusni napon primijenjen na otpornik *R* uzrokuje izmjeničnu struju *i* (Slika 1.1, *e*)

$$i = I_m \sin 2\pi ft = I_m \sin \omega t,$$

gdje je *i* trenutna vrijednost struje (A) u trenutku *t* (s), I_m je amplituda struje.



Slika 1.1. DC i AC krugovi: *a* – izvor istosmjernog napona (baterija), *b* – izvor izmjeničnog napona (izlaz električne mreže: utičnica), *c* – otpornik spojen na istosmjerni ili izmjenični izvor, *d* – istosmjerna struja uzrokovana istosmjernim naponom, *e* – izmjenična struja uzrokovana izmjeničnim naponom.



Slika 1.2. Sinusni val trenutnih vrijednosti napona koji se izmjenjuju duž osi vremena (*a*) i kuta (b).

U svakom trenutku vremena postoji odnos između trenutnih vrijednosti napona i struje prema Ohmovom zakonu

$$i = \frac{u}{R}.$$

Budući da su maksimalne vrijednosti također trenutne:

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

Nađimo amplitude izmjenične struje i napona koji proizvode istu disipaciju snage *P* kao što se događa u otporu *R* pod istosmjernim naponom *U* i strujom *I.* U teoriji elektrotehnike utvrđeno je da sinusoidni napon *u* i struja *i* s amplitudama

$$U_m = \sqrt{2}U \text{ i } I_m = \sqrt{2}I$$

može proizvesti snagu *P* u AC krugu na slici 1.3, *b* jednaku istosmjernoj snazi uzrokovanoj *U* i *I* u istosmjernom krugu na slici 1.3, *a*

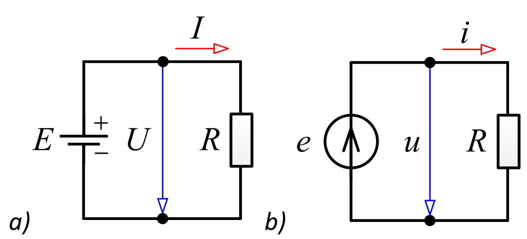
$$P = UI = I^2 R.$$

Vrijednosti izmjeničnog napona i struje koje su ekvivalentne istosmjernim vrijednostima nalaze se kako slijedi

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \text{ i } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

a nazivaju se rms ili efektivne vrijednosti.

Kada se kaže da je napon utičnice izmjenične struje 230 volti ili da je struja u AC kabelu 100 ampera, tada se spominju efektivne vrijednosti koje proizvode istu snagu kao istosmjerni napon od 230 V ili istosmjerna struja od 100 A. Na primjer , ako kroz otpor *R* od 100 Ω na slici 1.3 teče istosmjerna struja od 10 A , tada ona proizvodi snagu $P = I^2 R = 10^2 \cdot 100 = 10000$ W = 10 kW. Da bi se ista snaga *P* raspršila na otporniku *R* od 100 Ω na slici 1.3, *b* , treba primijeniti izmjeničnu struju *i* efektivne vrijednosti 100 A, tj. amplitude $I_m = 10\sqrt{2} = 14{,}1\ \mathrm{A}$.



Slika 1.3. DC (*a*) i AC (*b*) krugovi.

Fazori sinusnog vala

Postoji skup matematičkih alata razvijenih za istosmjerne krugove koji se mogu primijeniti na AC krugove. Primjena Ohmovih i Kirchhoffovih zakona na svaki trenutak izmjeničnog sinusnog vala ogroman je i kompliciran zadatak. Jedan od načina da se olakša korištenje zakona istosmjernog kruga u AC krugovima je primjena efektivnih vrijednosti umjesto amplituda. Međutim, to nije dovoljno. Izmjenična priroda sinusnih valova stvara složeno elektromagnetsko polje oko AC krugova koje stvara vremenske (kutne) pomake između napona i struja. Za predstavljanje i izračunavanje tih pomaka, predložena je zamjena sinusnih vrijednosti s njihovim rotirajućim vektorima također poznatim kao fazori. Razmotrimo kako zamijeniti sinusoidnu struju $i = Im_m \sin\omega t$ (slika 1.4) sa svojim fazorom.

Ako se vektor veličine I_m postavi na kartezijsku ravninu i rotira u smjeru suprotnom od kazaljke na satu oko točke O s kutnom brzinom ω tada se može opisati u polarnom i trigonometrijskom obliku kao

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\omega t} = I_m \cos\omega t + jI_m \sin\omega t ,$$

gdje je $\underline{I}_m$ kompleksna amplituda, j je električni zapis za imaginarnu veličinu $\sqrt{-1}$ označenu u matematici kao i , $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ brzina vrtnje koja je jednaka kutnoj frekvenciji izmjenične struje.

Tako se dobiva kompleksni broj $\underline{I}_m$. Koristeći kompleksnu ravninu, možemo zamisliti ponašanje ovog kompleksnog parametra. Veličina kompleksne amplitude je OA , a početni kut jednak je nuli pri t = 0 s . Kako vrijeme raste, mjesto točaka koje prati kompleksna amplituda stvara krug s konstantnom veličinom OA . Broj puta u sekundi $\underline{I}_m$ obilazi krug jednak je frekvenciji *f*. Vrijeme potrebno da se jednom obiđe krug je period *T*.

Projekcije $\underline{I}_m$ na realnu x i imaginarnu y -os daju nam stvarne i imaginarne dijelove kompleksne amplitude. Vidi se sa slike 1.4. Izuzetan je interes za imaginarni dio kompleksne amplitude u elektrotehnici.

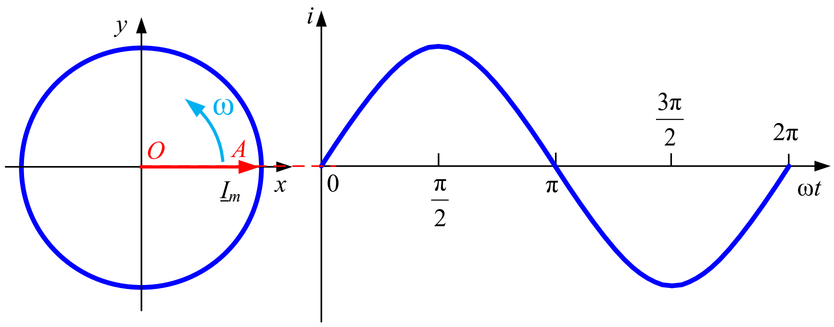
Projekcija $\underline{I}_m$ na imaginarnu y -os jednaka je nuli u početnom trenutku vremena t_0=0 s (slika 1.4, *a*). Također odgovara nuli na ravnini i -ω t na desnoj strani slike 1.4, *a* . Kada prođe vrijeme t_1 tada se fazor $\underline{OA}$ pomiče za kut ωt_1 (slika 1.4, *b*). Njegova projekcija na os y jednaka je vrijednosti $OA \sin\omega t_1$, tj. daje trenutnu vrijednost struje $i_1 = I_m \sin\omega t_1$. U drugom trenutku

t_2 fazor $\underline{OA}$ je pod kutom ωt_2 prema x -osi i njegova projekcija na y -os je $OA\sin\omega t_2$ (slika 1.4, c), što daje trenutnu vrijednost $i_2 = I_m \sin\omega t_2$ na desnoj strani dijagrama. Kada se prođe četvrtina razdoblja T. tj . $t_3 = T/4$ (slika 1.4, d), tada je fazor $\underline{OA}$ u svom okomitom položaju i njegova projekcija na os y jednaka je vektoru pune duljine

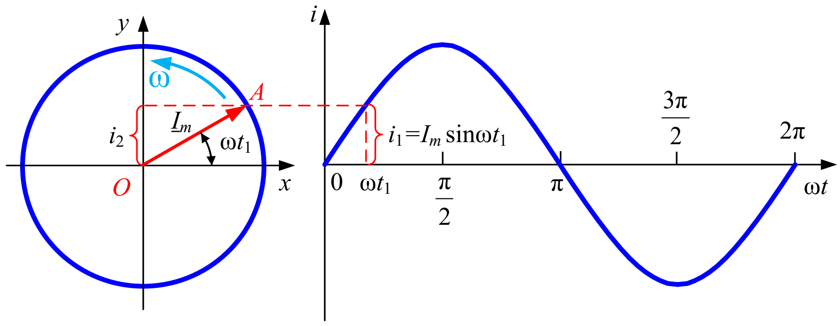
$$OA\sin\omega t_3 = OA\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) = OA\sin\frac{\pi}{2} = OA\,.$$

Trenutna vrijednost i na desnoj strani dijagrama Slika 1.4, d doseže svoju maksimalnu vrijednost I_m. Daljnja rotacija vektora $\underline{OA}$ dovodi do smanjenja projekcije OA *osi* $y\sin\omega t$ (slika 1.4, e , vremenski trenuci t_4 i t_5) do postizanja nulte vrijednosti u trenutku $t_6 = T/2$, tj. pod kutom $\omega t_6 = \pi$. Sinusni val je opet jednak nuli. Nakon toga y -projekcija $\underline{OA}$ i trenutna struja i dobivaju negativne vrijednosti (vremenski trenuci t_7 , t_8 , t_9) i zatim se vraćaju u početni položaj u trenutku $t_3 = T$ dajući kut $\omega t = 2\pi$.

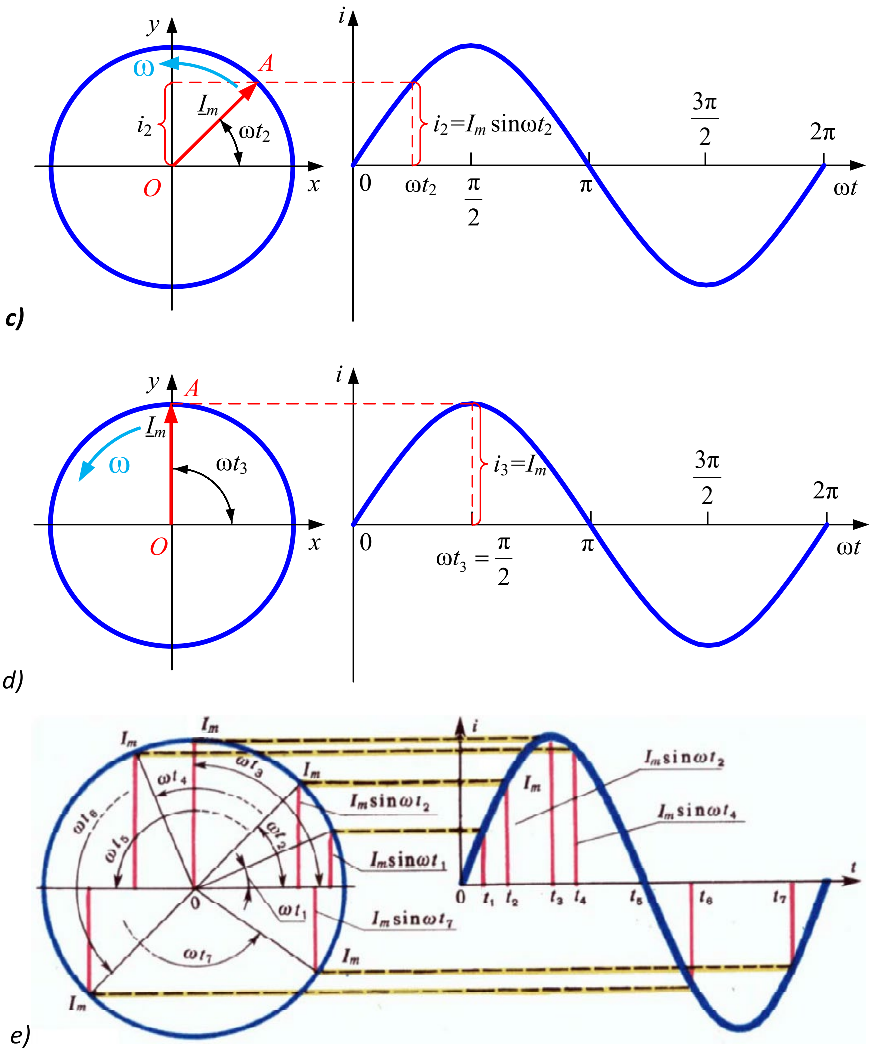
Stoga nam puni ciklus rotacije fazora $\underline{OA}$ daje puni period sinusnog vala. To znači da je fazor $\underline{I}_m = I_m e^{j\omega t}$ točno opisuje ponašanje sinusoidne struje i . Uskoro može biti prisutan matematičkom operacijom koja izdvaja imaginarni dio kompleksnog broja



a)



b)



Slika 1.4. Prikaz sinusnog vala s fazorom (rotirajući vektor).

$$\mathrm{Im}\,[\,I_m e^{j\omega t}\,] = \mathrm{Im}\,[\,I_m \cos\omega t + jI_m \sin\omega t\,,] = I_m \sin\omega t = i\,.$$

$$\mathrm{Im}\,[\,I_m e^{j\omega t}\,] = \mathrm{Im}\,[\,I_m \cos\omega t + jI_m \sin\omega t\,,] = I_m \sin\omega t = i\,.$$

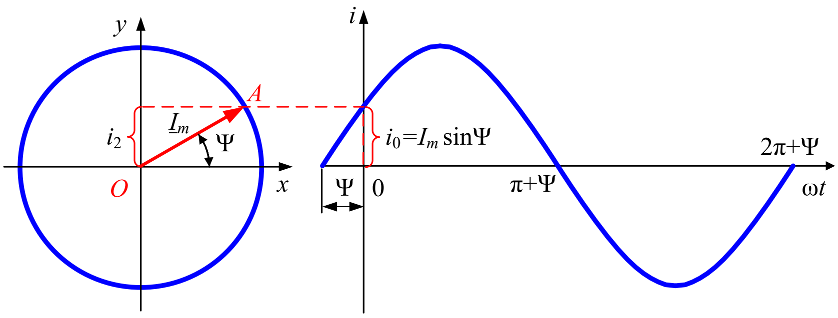
Ako je vektor <u>OA</u> pod kutom Ψ u trenutku $t_0 = 0$ s (slika 1.5) tada njegova početna vrijednost nije jednaka nuli $i_0 = I_m \sin(\omega t_0 + \Psi) = I_m \sin\Psi$ (budući da je $\omega t_0 = 0°$). Uobičajeni izraz za sinusni valni oblik je sljedeći

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi),$$

gdje je Ψ početna faza.

Odgovarajući fazor u složenom obliku u ovom slučaju izgleda kao

$$\underline{I}_m = I_m e^{j(\omega t + \Psi)} = I_m \cos(\omega t + \Psi) + jI_m \sin(\omega t + \Psi).$$



Slika 1.5. Sinusni val s početnom fazom Ψ.

Stoga se svaka izmjenična struja sinusoidnog valnog oblika može opisati s fazorom koji se rotira s kutnom brzinom koja je jednaka kutnoj frekvenciji sinusnog vala. Te se oznake fazora razlikuju u različitim udžbenicima i mogu biti, na primjer, $\underline{I}_m, \overline{I}_m, \vec{I}_m, \dot{I}_m$. U elektrotehnici postoji tradicionalan način da se kompleksni vektor predstavi svojom amplitudom i početnom fazom imajući na umu da se rotira s kutnom frekvencijom ω

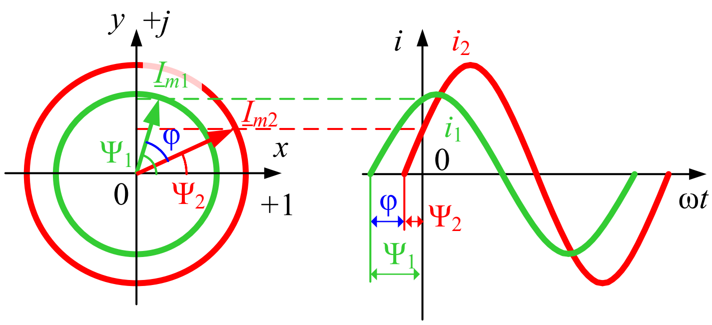
$$\underline{I}_m = I_m e^{j\Psi} = I_m \angle\Psi \,.$$

Na primjer , oznaka $\underline{I}_m = 5\angle 30^\circ$ A znači da je struja amplitude 5 A pomaknuta za 30° u odnosu na *y* -os.

Zbrajanje fazora

Fazori na složenoj ravnini nazivaju se **vektorski ili fazorski dijagram** . Postoje dvije sinusne struje i_1 i i_2 s desne strane na slici 1.6. Njihovi su fazori prikazani na lijevoj strani. Os *y* kompleksne ravnine naziva se imaginarna os i ima oznaku “+ *j* ”, dok se *x* -os naziva realnom i označava kao “+1”.

Sinusni valovi i_1 i i_2 imaju različite početne kutove, tj. njihove kompleksne amplitude mogu se izraziti kao



Slika 1.6. Dvije struje predstavljene kao fazori.

$$\underline{I}_{m1} = I_{m1}\angle\Psi_1 \text{ i } \underline{I}_{m2} = I_{m2}\angle\Psi_2 .$$

Struja i_1 vodi struju i_2 i između njih postoji fazni pomak $\phi = \Psi_1 - \Psi_2$. Taj fazni pomak se vidi i iz njihovog vektorskog dijagrama, tj. to je kut između fazora $\underline{I}_{m1}$ i $\underline{I}_{m2}$.

Istražimo kako se mogu koristiti fazori u električnim proračunima. Između tri grane nalazi se čvor sa strujama i_1, i_2 i i_3 (slika 1.7, *a*). Na primjer, struje i_1 i i_2 teku kroz dva odvojena kabela do nekih opterećenja, a i_1 je struja glavne brodske sabirnice. Poznate su struje i_1 i i_2, a nepoznata je struja i_3. Prema Kirchhoffovom zakonu te su struje čvorova međusobno povezane u bilo kojem trenutku

$$i_3 = i_1 + i_2 .$$

Umjesto izračunavanja zbroja $i_1 + i_2$ u svakom trenutku, fazori $\underline{I}_{m1}$ i $\underline{I}_{m2}$ se mogu zbrajati jedan drugom kako bi se dobio rezultantni fazor $\underline{I}_{m3}$ (slika 1.7, *b*)

$$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} .$$

Projekcije kompleksne amplitude $\underline{I}_{m3}$ na osi *x* (realna os +1) i *y* (imaginarna os + *j*) mogu se pronaći pomoću trigonometrijskih funkcija

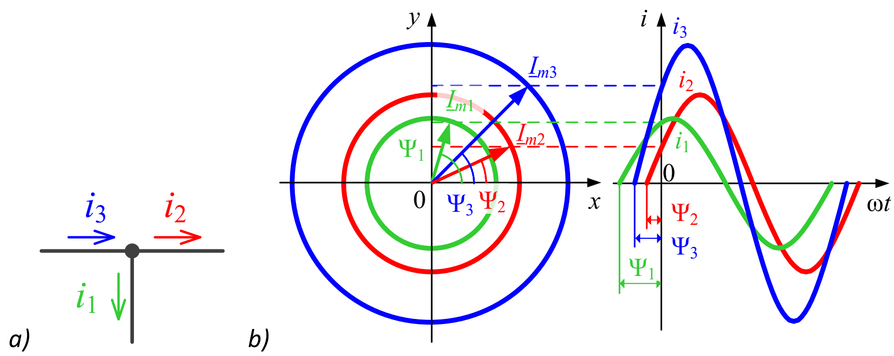
$$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = I_{m1}\cos(\omega t + \Psi_1) + I_{m2}\cos(\omega t + \Psi_2) + j\{\cos(\omega t + \Psi_1) + I_{m2}\cos(\omega t + \Psi_2)\} = I_{m3}\angle\Psi_3 ,$$

gdje se amplituda struje i_3 nalazi pomoću Pitagorinog teorema

$$I_{m3} = \sqrt{\{I_{m1}\cos(\omega t + \Psi_1) + I_{m2}\cos(\omega t + \Psi_2)\}^2 + \{I_{m1}\sin(\omega t + \Psi_1) + I_{m2}\sin(\omega t + \Psi_2)\}^2}$$

a fazni kut – pomoću neke inverzne trigonometrijske funkcije, npr

$$\Psi_3 = \tan^{-1}\left(\frac{I_{m1}\sin(\omega t + \Psi_1) + I_{m2}\sin(\omega t + \Psi_2)}{I_{m1}\cos(\omega t + \Psi_1) + I_{m2}\cos(\omega t + \Psi_2)}\right).$$



Slika 1.7. Nalaženje zbroja struja i_1 i i_2.

Treba napomenuti da se u praktičnim električnim proračunima fazori obično ne izražavaju korištenjem amplituda parametara električnog stanja , ali s njihovim efektivnim (rms) vrijednostima.

Pasivne komponente izmjeničnih krugova

Ako usporedimo AC krugove s istosmjernim krugovima, ne postoje samo otporne pasivne komponente koje modeliraju razgovor električne energije u bilo koju drugu vrstu energije, npr. toplinu, mehanički posao, kemijsku energiju i tako dalje. AC krugovi također sadrže induktivnu reaktanciju koja pohranjuje magnetsku energiju i kapacitivnu reaktanciju koja pohranjuje električnu energiju. Pohranjivanje električne ili magnetske energije uzrokuje vremenske odgode između sinusnih valova trenutnih struja i napona i odgovarajući fazni pomak između strujnih i naponskih fazora. To dovodi do potrebe za korištenjem složenih vrijednosti i odgovarajućih matematičkih alata u električnim proračunima.

2.9.2 Otpornost

Na otpor *R* primijeni sinusoidni napon *u* tada se odmah pojavljuje sinusni val struje *i* bez ikakvog vremenskog odgoda (slika 1.8, *c*) čija se vrijednost može pronaći pomoću Ohm'ijevog zakona

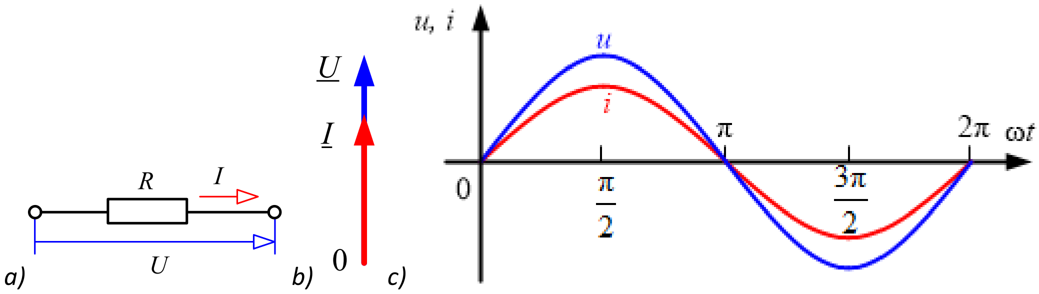
$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin \omega t}{R} = I_m \sin \omega t \, .$$

Stoga nema faznog pomaka između njihovih vektora (slika 1.8, *b*) i Ohmov zakon se može prepisati putem amplituda

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

ili, podijeljeno s $\sqrt{2}$, preko efektivnih vrijednosti kao u DC krugovima

$$I = \frac{U}{R} \, .$$



Slika 1.8. Izmjenični krug s otporom *R* : *a* – dijagram, *b* – fazori, *c* – trenutni valni oblici.

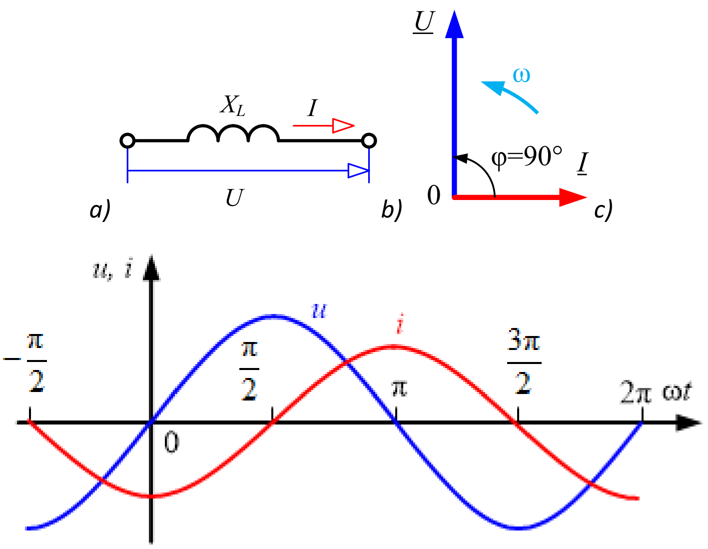
2.9.3 Induktivna reaktancija

Sposobnost izmjenične struje da pohranjuje energiju magnetskog polja oko vodiča karakterizira njezina induktivnost L i induktivna reaktancija $X_L = \omega L = 2\pi f$. Kao rezultat toga, struja zaostaje za naponom za kut $\frac{\pi}{2}$ ili 90° (slika 1.9). Ovo zaostajanje može se kratko i jasno prikazati pomoću složenih vrijednosti. Ako bi napon u trebao biti s fazom od 0° onda se Ohmov zakon za efektivne kompleksne vrijednosti može zapisati ovako

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{jX_L} = -j\frac{U}{X_L} = Ie^{-j90^\circ},$$

gdje je $-j = e^{-j90^\circ}$ operator koji pomiče kompleksnu struju $\underline{I}$ natrag u odnosu na $\underline{U}$ za 90° ili $\frac{\pi}{2}$

.



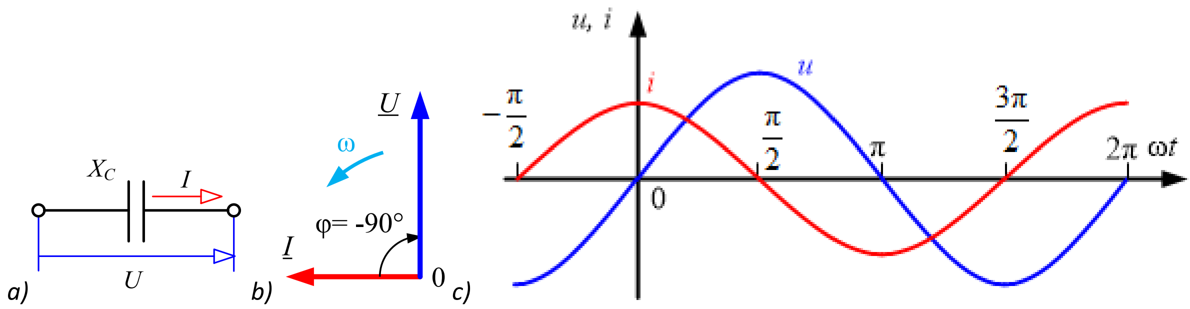
Slika 1.9. Izmjenični krug s induktivnom reaktancijom X_L : *a* – dijagram, *b* – fazori, *c* – trenutni valni oblici.

2.9.4 Kapacitivna reaktancija

Sposobnost izmjenične struje da pohranjuje energiju električnog polja oko vodiča karakterizira njezin kapacitet *C* i kapacitivna reaktancija $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$. Kao rezultat toga, struja *i* vodi napon *u* za kut $\frac{\pi}{2}$ ili 90° (slika 1.10). Taj se fazni pomak može jasno prikazati pomoću složenih vrijednosti. Ako bi napon *u* trebao biti s fazom od 0° onda se Ohmov zakon za efektivne kompleksne vrijednosti može zapisati na sljedeći način

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{-jX_C} = j\frac{\underline{U}}{X_C} = I e^{j90^\circ},$$

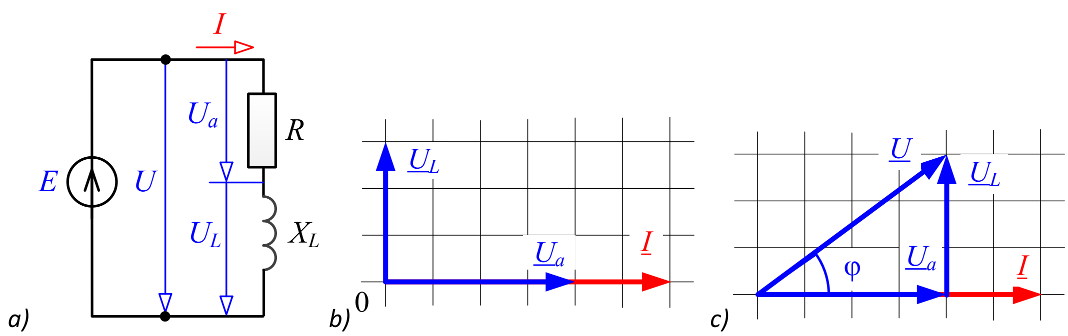
gdje je $j = e^{j90^\circ}$ operator koji pomiče kompleksnu struju $\underline{I}$ u odnosu na $\underline{U}$ naprijed za 90° ili $\frac{\pi}{2}$.



Slika 1.10. AC krug s kapacitivnom reaktancijom X_C: *a* – dijagram, *b* – fazori, *c* – trenutni valni oblici.

2.9.5 Impedancija

Praktična opterećenja na brodu I u lukama (elektromotori, rasvjetne instalacije, itd.) obično se mogu modelirati nizom kombinacije otpora *R* i induktivne reaktancije X_L (slika 1.11, *a*).



Slika 1.11. *RL* krug: *a* – dijagram, *b* – fazori struje i padova napona na komponentama, *c* – ulazni napon kao zbroj padova napona na komponentama.

Na slici 1.7 nema faznog pomaka između struje i pada napona na otporu *R.* Dakle, pad napona $\underline{U}_a$ je u fazi sa strujom $\underline{I}$ (Slika 1.11, *b*) . Sa slike 1.8, pad napona preko induktivne reaktancije $\underline{U}_L$ vodi struju $\underline{I}$ (Slika 1.11, *b*) .

Prema Kirchhoffovom drugom zakonu, ulazni napon $\underline{U}$ može se naći kao

$$\underline{U} = \underline{U}_a + \underline{U}_L .$$

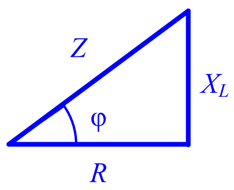
Ako je faza strujnog fazora $\underline{I}$ jednaka 0° tada se naponi mogu prikazati na sljedeći način:

a) Otporni pad napona $\underline{U}_a = \underline{I} \cdot R = IR\, e^{j0^\circ} = U_a\, e^{j0^\circ}$,

b) Induktivni pad napona $\underline{U}_L = \underline{I} \cdot jX_L = IX_L\, e^{j90^\circ} = U_L\, e^{j90^\circ}$,

c) Ulazni napon $\underline{U} = \underline{I}(R + jX_L) = \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot jX_L = U_a\, e^{j0^\circ} + U_L\, e^{j90^\circ} = U\, e^{j\phi}$.

Pogledajmo pobliže zadnji izraz. Zbroj $R + jX_L$ naziva se impedancija $\underline{Z} = Z\, e^{j\phi}$, koji je kompleksan broj s veličinom $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ i argumentom ili fazom $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right)$. Bolje se vidi iz takozvanog trokuta impedancije kojeg čine otpor, reaktancija i impedancija (slika 1.12).



Slika 1.12. Trokut impedancije.

Stoga je Ohmov zakon u najčešćem obliku sljedeći

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} = IZ\, e^{j\phi} = U\, e^{j\phi} .$$

To znači da faza impedancije ϕ definira fazni pomak između napona na terminalu *u* i struje *i* .

Primjer

Kao što je prikazano na slici 1.11, *a* , postoje otpornik otpora $R = 4\ \Omega$, prigušnica s induktivnom reaktancijom $X_L = 3\ \Omega$ i strujom $I = 1$ A.

Pronađite impedanciju $\underline{Z}$, napone na otporu $\underline{U}_a$, reaktancija $\underline{U}_L$ i napon na terminalu $\underline{U}$.

Riješenje:

Impedancija se može naći na sljedeći način : $\underline{Z} = R + jX_L = 4 + j\,3\ \Omega$.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Prema Pitagorinom teoremu veličina impedancije $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\,\Omega$.

Njegov argument $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.9°$.

Dakle, kompleksna vrijednost impedancije $\underline{Z} = Z\,e^{j\phi} = 5\,e^{j\,36,9°}\,\Omega$.

Naponi se mogu pronaći pomoću Ohmovog zakona u složenom obliku.

Napon na otporniku $\underline{U}_a = \underline{I}\cdot R = IR\,e^{j\,0°} = 1\cdot 4\,e^{j\,0°} = 4e^{j\,0°} = 4$ V.

Napon na reaktanciji $\underline{U}_L = \underline{I}\cdot jX_L = IX_L\,e^{j\,90°} = 1\cdot 3e^{j\,90°} = 3e^{j\,90°}$ V.

Priključni ili ulazni napon $\underline{U}_L = \underline{I}\cdot \underline{Z} = IZ\,e^{j\phi} = 1\cdot 5e^{j\,36,9°} = 5e^{j\,36,9°}$ V.