

Kompleksarvud

1) Imaginaarühik

Arvu, mille ruut on -1 , nimetatakse imaginaarühikuks ja tähistatakse sümboliga i .

2) Kompleksarvu definitsioon

Kompleksarvuks z nimetatakse avaldist $z = a + bi$, kus a ja b on reaalarvud ja i on imaginaarühik. Arvu a nimetatakse kompleksarvu reaalosaks ja teist liidetavat bi aga tema imaginaarosaks.

Tähistatakse $a = \operatorname{Re} z$, $bi = \operatorname{Im} z$

Arvu b nimetatakse kompleksarvu imaginaarosa kordajaks.

Kui $a = 0$, siis arvu $0 + bi = bi$ nimetatakse puhtimaginaararvuks;

Kui $b = 0$, siis saadakse reaalarv: $a + 0 \cdot i = a$.

Arvu 0 komplekskuju on $0 + 0i$

3) Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul

$$1) (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

$$2) (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$$

$$3) (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

NÄIDE 1:

$$1) (2 + 5i) + (3 - 9i) = 2 + 5i + 3 - 9i = (2 + 3) + (5i - 9i) = 5 - 4i$$

$$2) (1 + 3i) - (7 - 2i) = 1 + 3i - 7 + 2i = (1 - 7) + (3i + 2i) = -6 + 5i$$

$$3) (1 - 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i - 6i - 8i^2 = 3 + 4i - 6i + 8 = 11 - 2i$$

4) Kaaskompleksarv ja kompleksarvude jagamine

Olgu antud kompleksarv $z = a + bi$, kusjuures $z \neq 0$. Leiame selle pöördkompleksarvu z^{-1} .

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

ehk lühemalt $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$, kus \bar{z} on kompleksarvu kaaskompleksarv.



Jagamistehe kirjutatakse murruna ning murdu laiendatakse nimetaja kaaskompleksarvuga:

$$\begin{aligned} \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \end{aligned}$$

$$c^2 + d^2 \neq 0$$

NÄIDE 2:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{2-5i}{3+i} &= \frac{(2-5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i-15i+5i^2}{9-i^2} = \frac{6-2i-15i-5}{9+1} = \frac{1-17i}{10} \\ 2) \quad \frac{1+4i}{5-2i} &= \frac{(1+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{5+2i+20i+8i^2}{25-4i^2} = \frac{5+2i+20i-8}{25+4} = \frac{-3+22i}{29} \end{aligned}$$

5) Kompleksarvu trigonomeetiline kuju

Kompleksarvu $z = a + bi$ mooduliks ehk absoluutväärtuseks nimetatakse suurust

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Suurus ϕ on avaldatav a ja b kaudu valemiga

$$\varphi = \begin{cases} 2\pi - \arctan \left| \frac{b}{a} \right|, & \text{kui } a > 0, b < 0 \\ \arctan \left| \frac{b}{a} \right|, & \text{kui } a > 0, b \geq 0 \\ \pi - \arctan \frac{b}{a}, & \text{kui } a < 0, b > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a}, & \text{kui } a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{kui } b > 0, a = 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{kui } b < 0, a = 0 \end{cases}$$

NÄIDE 3: Leida arvu trigonomeetiline kuju $z = 1 + \sqrt{3}i$.

$$a=1, b=\sqrt{3}$$

$$1) \quad r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$2) \quad a > 0, b > 0, \varphi = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| = \arctan \left| \frac{\sqrt{3}}{1} \right| = \frac{\pi}{3}$$

$$3) \quad z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

6) Kompleksarvude korrutamise trigonomeetrilisel kujul

Olgu kompleksarvud antud trigonomeetrilisel kujul:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ ja } z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \text{ kus } z_1 \neq 0 \text{ ja } z_2 \neq 0.$$

$$\text{Seega } z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

NÄIDE 4: Leida $z_1 z_2$, if $z_1 = 4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ and $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \cdot 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ &= 4 \cdot 2 [\cos(30^\circ + 60^\circ) + i \sin(30^\circ + 60^\circ)] = 8(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) \end{aligned}$$

7) Quotient of Two Complex Numbers in Polar Form

Olgu kompleksarvud antud trigonomeetrilisel kujul:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ ja } z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \text{ kus } z_1 \neq 0 \text{ ja } z_2 \neq 0.$$

$$\text{Seega, } \frac{z_1}{z_2} \text{ is } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

NÄIDE 5: Find $\frac{z_1}{z_2}$, if $z_1 = 10(\cos 58^\circ + i \sin 58^\circ)$ and $z_2 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{10(\cos 58^\circ + i \sin 58^\circ)}{2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)} = 5[\cos(58^\circ - 30^\circ) + i \sin(58^\circ - 30^\circ)] \\ &= 5(\cos 28^\circ + i \sin 28^\circ) \end{aligned}$$

Ülesanded

Ülesanne 1

Lihtsusta avaldised

$$a) (3 + 5i) + (4 + 6i)$$

$$b) (-4 + 6i) - (-7 + 5i)$$

$$c) (-0,2 - 1,1i) + (-0,8 - 1,9i)$$

$$d) \left(1\frac{3}{4} - 2,5i\right) - \left(\frac{1}{3} - 0,5i\right)$$

Ülesanne 2

Lihtsusta avaldised

$$a) (1 + i) + (2 - 3i) - (3 + 4i)$$

$$b) (0,4 - 4,2i) - (1,5 + 0,6i) + 3,3i$$

$$c) \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}i\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}i\right)$$

$$d) [0, (3) + 1,1(6)i] - [0,1(3) - 0, (2)i]$$



Ülesanne 3

Korruta

$$\begin{array}{lll} a) (3 + 2i)(4 - 5i) & b) (5 - 6i)(1 - 3i) & c) (1 - i)(1 + i) \\ d) (1 - i)(3 + 4i) & e) (-5i - 4)(3 - i) & f) (2 - 2i)(4i + 5) \end{array}$$

Ülesanne 4

Korruta

$$\begin{array}{ll} a) (1 + 2\sqrt{3}i)(2 - 3\sqrt{3}i) & b) 2i(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) \\ c) (6 - 7i)(5 + 5)(3 - 5i) & d) 2i(7 + 10i)(2 - 4i) \\ e) (2 - 3i)(-1 - i)(3 + 4i) & f) (5 + 4i)(-2 - i)(5 - 4i)(-2 + 1) \end{array}$$

Ülesanne 5

Leia jagatised

$$\begin{array}{llll} a) \frac{1}{1+i} & b) \frac{3+i}{3-i} & c) \frac{2i-3}{1-3i} & d) \frac{3-5i}{2+3i} \\ e) \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} & f) \frac{1+\sqrt{15}i}{1-\sqrt{3}i} & g) \frac{\sqrt{6}-i}{\sqrt{6}-2i} & h) \frac{1+2i}{1+\sqrt{2}i} \end{array}$$

Ülesanne 6

Teisenda kompleksarv trigonomeetrilisele kujule.

$$a) 1 \quad b) 3i \quad c) -2i \quad d) -i \quad e) 6i \quad f) -2 \quad g) i \quad h) -5i$$

Ülesanne 7

Teisenda kompleksarv trigonomeetrilisele kujule.

$$\begin{array}{llll} a) 3 + i & b) -3 - i & c) 6 + 6i & d) 6 - 6i \\ e) -6 + 8i & f) 2,7 - 3,2i & g) 1,8 + 0,52i & h) 2,7 - 1,32i \end{array}$$

Ülesanne 8

Leia kompleksarvude korrutis zw ja jagatis z/w .

$$\begin{array}{ll} a) z = 4(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ) & w = 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \\ b) z = 8(\cos 80^\circ + i \sin 20^\circ) & w = 4(\cos 80^\circ + i \sin 20^\circ) \end{array}$$



c) $z = 14(\cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2)$ $w = 7(\cos 5\pi/4 + i\sin 5\pi/4)$

d) $z = 15(\cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3)$ $w = 5[(\cos (-60^\circ) + i\sin(-60^\circ))]$

