2 KOMPLEKSIE SKAITĻI

KOPSAVILKUMS:
Kompleksie skaitļi tiek definēti kā skaitļu sistēmas paplašinājums. Vispirms tas tiek aplūkots kā trigonometriska izteiksme, kura satur iedomāto - imagināro vērtību – kvadrātsakni no -1. Tiek aplūkota kompleksā skaitļa ģeometriskās interpretācijas, kur komplekso skaitli var attēlot kā koordinātu plaknes punktu vai vektoru. Tiek skaidrots skaras starp dažādajām kompleksā skaitļa pieraksta formām. Nodaļā tiek aprakstītas aritmētiskās darbības ar kompleksajiem skaitļiem un doti atbilstoši piemēri. Noslēguma nodaļā doti uzdevumi patstāvīgajam darbam.

Mērķis :

Izprast kompleksos skaitļus un to dažādo pieraksta formu; iemācīties veikt aprēķinus ar kompleksajiem skaitļiem.

Priekšzināšanas:

Studentiem jāpārzina aritmētiskās darbības ar reāliem skaitļiem, jāzina trigonometriskās sakarības un trigonometrisko funkciju vērtības, jālieto Pitagora teorēma.

Mācību rezultāts:

1. Studenti izprot, kas ir kompleksie skaitļi
2. Prot attēlot kompleksos skaitļus kompleksajā plaknē
3. Prot pārveidot kompleksos skaitļus trigonometriskajā vai eksponent formā
4. Māk izpildīt aritmētiskās darbības ar kompleksajiem skaitļiem

Pielietojumi:

- signālu teorijā,
- kvantu mehānikā,
- elektrisko ķēžu aprēķinos,
- definējot kompleksā mainīgā funkcijas,
- ģeometrijā, piemēram, lai aprēķinātu fokusu koordinātes tādai trijstūrī ievilktai elipsei (Šteinera elipsei), kura trijstūra malām pieskaras to viduspunktos,
- plūsmu dinamikā, piemēram, lai izprastu ūdens straumes kustības.

Saturs:

KOMPLEKSIE SKAITĻI

1. Kompleksā skaitļa definīcija

Mēs protam atrisināt vienkāršus kvadrātvienādojumus. Piemēram, vienādojuma

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

saknes vienkārši var noteikt, izmantojot Vjeta teorēmu

$$x_1 = 2; \;\; x_2 = 3.$$

Sarežģītākā gadījumā var ņemt talkā diskriminantu un aprēķināt vienādojuma saknes, piemēram,

$$2x^2 - 13x - 45 = 0$$

Saknes

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 + 2 \cdot 4 \cdot 45}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm \sqrt{529}}{4} = \frac{13 \pm 23}{4} = \begin{cases} 9 \\ -2.5 \end{cases}$$

Tomēr var gadīties, ka diskriminanta aprēķins nenoved pie atrisinājuma:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Te diskriminants ir negatīvs, tāpēc vienādojumam reālu sakņu nav.

Pirmais zināmais matemātiķis, kurš aprēķinos lietojis kvadrātsakni no negatīva skaitļa, bija grieķu inženieris Herons no Aleksandrijas (dzīvojis mūsu ēras pirmajā gadsimtā). Savukārt nepieciešamība ieviest kompleksos skaitļus radās, lai varētu atrisināt kubiskos jeb trešās kārtas vienādojumus. Pirmais, kas aprakstīja kompleksos skaitļus formā $a + \sqrt{-b}$ bija Džerolomo Kardano (Gerolomo Cardano) savā algebras grāmatā Ars Magne (izdota 1545. gadā)[1]

[1] O.Merino (2006). A Short History of Complex Numbers. (skatīts 2022. janvārī: URL:ShortHistoryComplexNumbers2006.dvi)

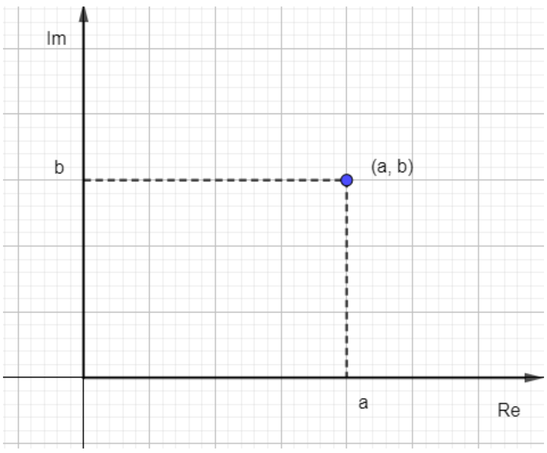
Par *komplekso skaitli* sauc algebrisku izteiksmi $\boldsymbol{z = a + bi}$, kur a un b ir reāli skaitļi, bet ar $\boldsymbol{i}$ apzīmē *imagināro vienību* (iedomāto skaitli) $i = \sqrt{-1}$, kur $i^2 = -1$.
Saka, ka skaitlis z ir dots algebriskā formā.

Skaitli a sauc par kompleksā skaitļa reālo daļu un to apzīmē $a = Re\, z$.
Izteiksmi bi sauc par kompleksā skaitļa imagināro daļu un to apzīmē $bi = Im\, z$. Skaitlis b ir imaginārās daļas koeficients.

Apzīmējumu $i = \sqrt{-1}$ ieviesa matemātiķis Leonards Eilers (1707-1783).

Visu komplekso skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{C}$.
Ir zināms, ka reālos skaitļus var attēlot kā atbilstošus punktus uz skaitļu ass. Arī kompleksos skaitļus var attēlot ģeometriski. To attēlošanai izmanto taisnleņķa koordinātu sistēmu. Kompleksā skaitļa koeficientus izmanto kā plaknes punkta koordinātes. Reālās daļas koeficientu atliek uz horizontālās ass, bet imaginārās daļas koeficientu atliek uz vertikālās ass. Tāpēc tās nosauc „reālā" ass un „vertikālā" ass. Plakni, kurā attēlo kompleksos skaitļus, sauc par komplekso skaitļu plakni.

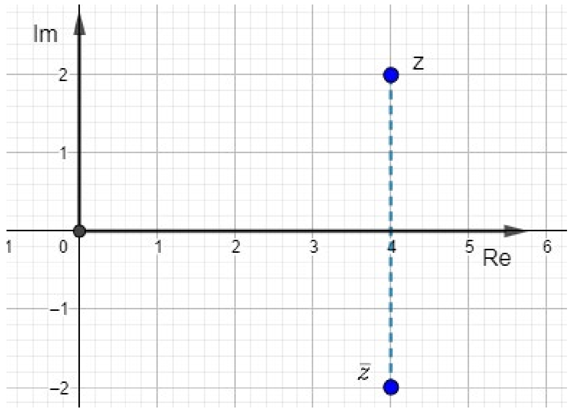
Ja dots kompleksais skaitlis $z = a + bi$, tad plaknē atliek punktu ar koordinātēm $z(a, b)$:



Attēls 1

Divi kompleksie skaitļi $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ ir *vienādi*, ja to reālās daļas koeficienti un imaginārās daļas koeficienti ir vienādi $a_1 = a_2$ un $b_1 = b_2$.

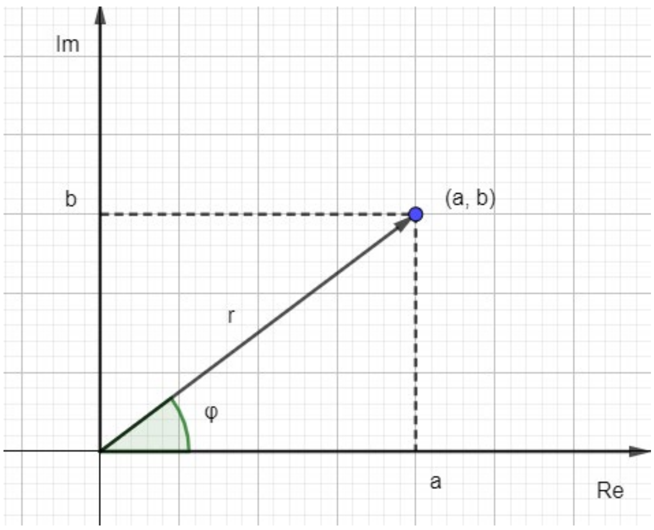
Par dotā kompleksā skaitļa $z = a + bi$ *kompleksi saistīto* skaitli sauc $\bar{z} = a - bi$. To ģeometriskais attēls ir simetrisks attiecībā pret reālo asi. Piemēram, attēlā 2 doti kompleksi saistītie skaitļi $z = 4 + 2i$ un $\bar{z} = 4 - 2i$.



Attēls 2

2. Kompleksā skaitļa trigonometriskā un eksponentā forma

Komplekso skaitli $z = a + bi$ kompleksajā plaknē var attēlot arī savādāk – kā radiusvektoru. To raksturo vektora garums un leņķis, ko rādiusvektors veido ar reālās ass pozitīvo virzienu (skat. attēlu 3).



Attēls 3

Par kompleksā skaitļa $z = a + bi$ *moduli* sauc tam atbilstošā rādisuvektora garumu. To pieraksta $|z|$; $mod\ z$ vai r.

Kompleksā skaitļa moduli aprēķina pēc Pitagora teorēmas $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Tas var būt jebkurš nenegatīvs reāls skaitlis.

Par kompleksā skaitļa $z = a + bi$ *argumentu* sauc leņķi, ko tam atbilstošais rādiusvektors veido ar reālo asi. To pieraksta $arg\ z$ vai φ.

Leņķi φ izsaka no formulas, izmantojot sakarības taisnleņķa trijstūrī:

$$tg\varphi = \frac{b}{a}$$

Ja leņķi mēra pretēji pulksteņa rādītājam, tad tas ir pozits. Ja to mēra pulksteņa rādītāja virzienā, tad negatīvs. Leņķiskās robežas tiek pieņemtas $\varphi \in [-\pi;\ \pi]$.
Izteiksmi

$$\boldsymbol{z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)}$$

sauc par *kompleksā skaitļa trigonometrisko formu*.

Izmantojot zināmo Eilera formulu $\boldsymbol{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}$, komplekso skaitli var pierakstīt īsāk. Kompleksā skaitļa *eksponentā forma* ir

$$\boldsymbol{z = re^{i\varphi}}$$

Jāievēro, ka eksponentajā formā arguments noteikti ir izteikts radiānos.

3. Pāreja no kompleksā skaitļa algebriskā pieraksta uz trigonometrisko

Ir dots kompleksais skaitlis algebriskajā formā $z = a + bi$. Lai pārveidotu šo pierakstu trigonometriskajā formā, nepieciešams aprēķināt skaitļa moduli un argumentu. Moduli aprēķina pēc formulas

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ar argumenta jeb atbilstošā leņķa noteikšanu ir nedaudz sarežģītāk. Kompleksajam skaitlim atbilstošais punkts kompleksajā plaknē var atrasties I, II, III vai IV kvadrantā. Ir pieņemts, ka I un II kvadrantā tiek noteikts pozitīvs leņķis (šaurs pirmajā un plats otrajā kvadrantā), bet III un IV kvadrantā leņķis ir negatīvs. Vispārīgākā veidā leņķi var noteikt pēc formulas

$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, \text{ja } a > 0 \\ arctg\dfrac{b}{a} + \pi, \text{ja } a < 0, b > 0 \\ arctg\dfrac{b}{a} - \pi, \text{ja } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Protams, nevar izslēgt speciālgadījumus, ja kāds no koeficientiem ir 0. Tad kompleksā skaitļa attēlojums atrodas uz atbilstošās koordinātu ass:

1) $z = a;\quad a > 0, \text{kompleksajā plaknē } (a, 0)$. Šo punktu atliek uz reālās ass tās pozitīvajā daļā. Leņķis $\varphi = 0$.
2) $z = a;\quad a < 0, \text{kompleksajā plaknē } (-a, 0)$. Šo punktu atliek uz reālās ass tās negatīvajā daļā. Leņķis $\varphi = 180°$.
3) $z = bi;\quad b > 0, \text{kompleksajā plaknē } (0, b)$. Šo punktu atliek uz imaginārās ass tās pozitīvajā daļā. Leņķis $\varphi = 90°$.
4) $z = bi;\quad b < 0, \text{kompleksajā plaknē } (0, -b)$. Šo punktu atliek uz imaginārās ass tās negatīvajā daļā. Leņķis $\varphi = -90°$.

PIEMĒRS 1: Pārveidot skaitli $z = 1 + \sqrt{3}i$ trigonometriskajā formā.

Atrisinājums:

Nosakām koeficientus $a = 1, b = \sqrt{3}$

Aprēķinām kompleksā skaitļa moduli

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

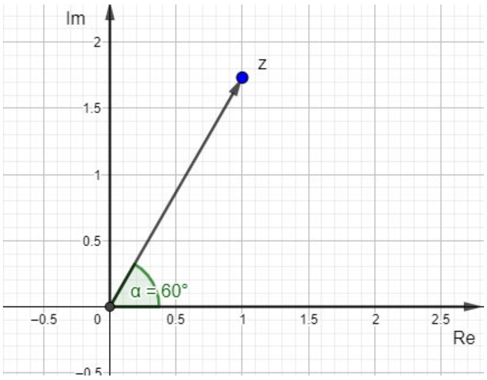
Aprēķinām leņķi

a > 0, tad $\varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

Kompleksā skaitļa trigonometriskā forma ir

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Konstruēsim komplekso skaitli un tam atbilstošo rādiusvektoru kompleksajā plaknē:



Attēls 4

PIEMĒRS 2: Pārveidot skaitli $z = -2 - 2i$ trigonometriskajā formā.

Atrisinājums:

Nosakām koeficientus $a = -2, \; b = -2$

Aprēķinām kompleksā skaitļa moduli

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Aprēķinām leņķi

$a < 0$ un $b < 0$, tad

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} - \pi = arctg1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

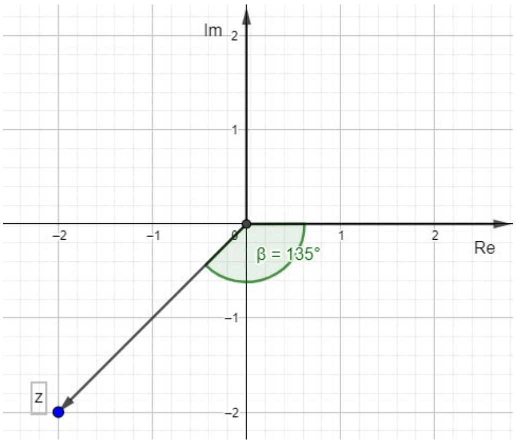
Kompleksā skaitļa trigonometriskā forma

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Dažkārt izmanto arī trigonometrisko funkciju pāra – nepāra īpašības, tad

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Konstruēsim komplekso skaitli un tam atbilstošo rādiusvektoru kompleksajā plaknē:



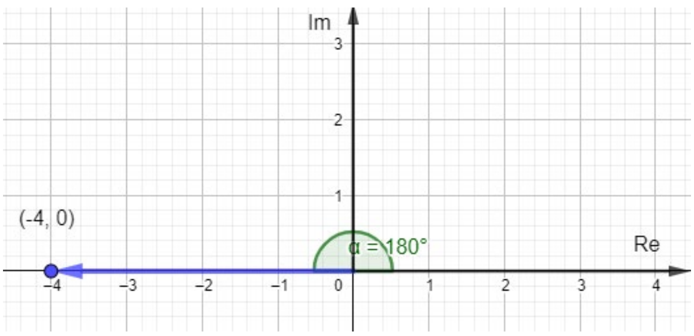
Attēls 5

PIEMĒRS 3: Pārveidot skaitli $z = -4$ trigonometriskajā formā un eksponentajā formā.

Atrisinājums:

Nosakām koeficientus $a = -4,\ b = 0$

Ja kāds no kompleksā skaitļa koeficientiem a vai b ir nulle, tad visu nepieciešamo informāciju var nolasīt kompleksajā plaknē. Vispirms atliekam dotajam skaitlim atbilstošo punktu (-4, 0) koordinātu plaknē (skat.attēlu 6):



Attēls 6

Kompleksā skaitļa modulis ir dotā rādiusvektora garums, tas ir, atbilstošā punkta attālums līdz centram

$$r = 4$$

Leņķis, kā redzam no attēla, ir

$$\varphi = \pi$$

Kompleksā skaitļa trigonometriskā forma ir

$$z = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Ja zinām kompleksā skaitļa moduli un argumentu, tad šo skaitli var pierakstīt arī eksponentajā formā

$$z = 4e^{\pi i}$$

4. Darbības ar kompleksajiem skaitļiem

Komplekso skaitļu saskaitīšana

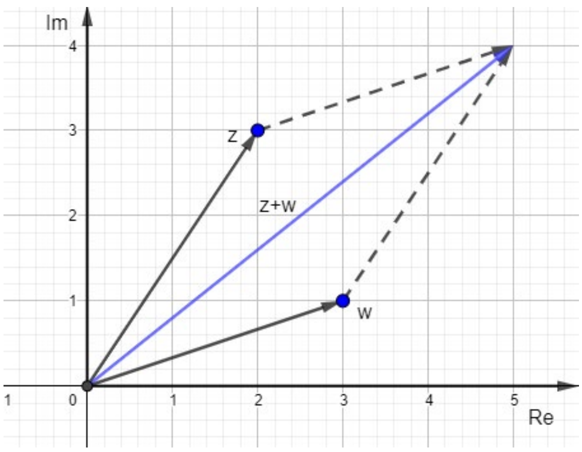
Divu komplekso skaitļu $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ *summa* ir komplekss skaitlis, ko aprēķina, atsevišķi saskaitot komplekso skaitļu reālās daļas un atsevišķi saskaitot to imaginārās daļas

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Piemēram,

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 + i) = (2 + 1) + (3 + 1)i = 3 + 4i$$

Ģeometriski komplekso skaitļu summu var attēlot kā vektoru summu



Attēls 7

Komplekso skaitļu atņemšana

Divu komplekso skaitļu $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ *starpība* ir komplekss skaitlis, ko aprēķina, atsevišķi atņemot komplekso skaitļu reālās daļas un atsevišķi atņemot to imaginārās daļas

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Piemēram,

$$z_1 - z_2 = (1 + 3i) - (1 - i) = (1 - 1) + (3 + 1)i = 4i$$

Komplekso skaitļu reizināšana

Divus kompleksos skaitļus $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ *reizina* algebriski, atverot iekavas un ievērojot, ka imaginārās vienības kvadrāts ir $i^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Piemēram,

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i)(11 + 3i) = (11 - 6) + (22 + 3)i = 5 + 25i$$

Ievērosim! Ja komplekso skaitli reizina ar tam kompleksi saistīto skaitli, tad, saskaņā ar kvadrātu starpības formulu, iegūst

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Komplekso skaitļu dalīšana

Divus kompleksos skaitļus $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ *dala* algebriski, vispirms racionālās daļas skaitītāju un saucēju pareizinot ar saucēja kompleksi saistīto skaitli

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 + b_2 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

Piemēram,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 8i}{2 + i} = \frac{1 + 8i}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{(2 + 8) + (16 - 1)i}{4 + 1} = \frac{10 + 15i}{5} = 2 + 3i$$

PIEMĒRS 4:

Darbības ar kompleksajiem skaitļiem

1) $(2 + 5i) + (3 - 9i) = 2 + 5i + 3 - 9i =$
$= (2 + 3i) + (5i - 9i) = 5 - 4i$

2) $(1 + 3i) - (7 - 2i) = 1 + 3i - 7 + 2i =$
$= (1 - 7) + (3i + 2i) = -6 + 5i$

3) $(1 - 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i - 6i - 8i2 = 3 + 4i - 6i + 8 = 11 - 2i$

4) $\frac{2 - 5i}{3 + i} = \frac{(2 - 5i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{6 - 2i - 15i + 5i^2}{9 - i^2} =$

$$= \frac{6 - 2i - 15i - 5}{9 + 1} = \frac{1 - 17i}{10}$$

5) $$\frac{1 + 4i}{5 - 2i} = \frac{(1 + 4i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{5 + 2i + 20i + 8i^2}{25 - 4i^2} =$$
$$= \frac{5 + 2i + 20i - 8}{25 + 4} = \frac{-3 + 22i}{29}$$

5. Darbības ar kompleksajiem skaitļiem trigonometriskajā formā

Komplekso skaitļu saskaitīšanu un atņemšanu ir ērtāk izpildīt, ja skaitļi doti algebriskā formā. Reizināšanu un dalīšanu var izpildīt arī trigonometriskā formā dotiem skaitļiem.
Ir doti divi kompleksie skaitļi trigonometriskā formā

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ un } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Reizinājumu var iegūt algebriski, kā arī izmantojot trigonometrijas formulas

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1 cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Komentārs. Abām iekavām te tika pielietotas trigonometrisko funkciju argumentu saskaitīšanas teorēmas

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha + \beta) \text{ un}$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha = \sin(\alpha + \beta)$$

Reizinot divus kompleksos skaitļus, moduļus sareizina un argumentus saskaita

$$\boldsymbol{z_1 z_2 = r_1 r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 + \varphi_2)]}$$

PIEMĒRS 5:

Aprēķināt $z_1 z_2$, ja $z_1 = 4(\cos 30° + i\sin 30°)$ un $z_2 = 2(\cos 60° + i\sin 60°)$.

Atrisinājums

$$z_1 z_2 = 4(\cos 30° + i\sin 30°) \cdot 2(\cos 60° + i\sin 60°) =$$
$$= 4 \cdot 2[\cos(30° + 60°) + i\sin(30° + 60°)] = 8(\cos 90° + i\sin 90°)$$

Komplekso skaitļu *dalījuma* formulu var iegūt līdzīgā veidā[2]

$$\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \frac{\boldsymbol{r_1}}{\boldsymbol{r_2}}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Lai izpildītu komplekso skaitļu dalījumu, moduļus dala, bet argumentus atņem.

PIEMĒRS 6: Aprēķināt dalījumu $\frac{z_1}{z_2}$, ja

$$z_1 = 10(\cos 58° + i\sin 58°) \text{ un } z_2 = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$$

Atrisinājums

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10(\cos 58° + i\sin 58°)}{2(\cos 30° + i\sin 30°)} =$$
$$= 5[\cos(58° - 30°) + i\sin(58° - 30°)] = 5(\cos 28° + i\sin 28°)$$

Kompleksa skaitļa *kāpināšanu naturālā pakāpē n* var izteikt, pamatojoties uz komplekso skaitļu reizinājuma formulu

$$\boldsymbol{z^n = r^n[\cos(\varphi n) + i\sin(\varphi n)]}$$

Lai kāpinātu, moduli kāpina pakāpē n (n reizes reizina pašu ar sevi), bet argumentu $\boldsymbol{\varphi}$ reizina ar n (n reizes saskaita pašu ar sevi). Šo formulu sauc arī par *de Muavra formulu*.

PIEMĒRS 6: Aprēķināt kompleksā skaitļa $z = 2(\cos 12° + i\sin 12°)$ pakāpi z^{12}.

Atrisinājums

$$z^{12} = 2^{12}(\cos(12° \cdot 12) + i\sin(12° \cdot 12)) =$$
$$= 4096(\cos 144° + i\sin 144°)$$

6. Uzdevumi

Uzdevums 1

Izpildīt darbības algebriskajā formā un attēlot dotos skaitļus, kā arī rezultātu kompleksajā plaknē

$a)\ (3 + 5i) + (4 + 6i)$ $\qquad b)\ (-4 + 6i) - (-7 + 5i)$

$c)\ (-0{,}2 - 1{,}1i) + (-0{,}8 - 1{,}9i)$ $\qquad d)\ \left(1\frac{3}{4} - 2{,}5i\right) - \left(\frac{1}{3} - 0{,}5i\right)$

Uzdevums 2

Izpildīt darbības algebriskajā pierakstā

$a)\ (1 + i) + (2 - 3i) - (3 + 4i)$ $\qquad b)\ (0{,}4 - 4{,}2i) - (1{,}5 + 0{,}6i) + 3{,}3i$

[2] Formulas izvedums ir nodarbības pielikumā

$c)\ \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\,i\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\,i\right)-\left(\frac{3}{4}\frac{5}{6}\,i\right)$ $\quad d)\ [0,(3)+1{,}1(6)i]-[0{,}1(3)-0,(2)i]$

Uzdevums 3

Izpildīt reizināšanu algebriskajā pierakstā

$a)\ (3+2i)(4-5i)$ $\quad b)\ (5-6i)(1-3i)$ $\quad c)\ (1-i)(1+i)$

$d)\ (1-i)(3+4i)$ $\quad e)\ (-5i-4)(3-i)$ $\quad f)\ (2-2i)(4i+5)$

Uzdevums 4

Izpildīt reizināšanu algebriskajā pierakstā

$a)\ \left(1+2\sqrt{3}\,i\right)\left(2-3\sqrt{3}\,i\right)$ $\quad b)\ 2i(1-\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)$

$c)\ (6-7i)(5+5)(3-5i)$ $\quad d)\ 2i(7+10i)(2-4i)$

$e)\ (2-3i)(-1-i)(3+4i)$ $\quad f)\ (5+4i)(-2-i)(5-4i)(-2+1)$

Uzdevums 5

Atrast komplekso skaitļu dalījumu algebriskajā pierakstā

$a)\ \frac{1}{1+i}$ $\quad b)\ \frac{3+i}{3-i}$ $\quad c)\ \frac{2i-3}{1-3i}$ $\quad d)\ \frac{3-5i}{2+3i}$

$e)\ \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$ $\quad f)\ \frac{1+\sqrt{15}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$ $\quad g)\ \frac{\sqrt{6}-i}{\sqrt{6}-2i}$ $\quad h)\ \frac{1+2i}{1+\sqrt{2}i}$

Uzdevums 6

Dotos kompleksos skaitļus pārveidot trigonometriskajā formā. Argumentus izteikt radiānos

$a)\ 1$ $\quad b)\ 3i$ $\quad c)\ -2i$ $\quad d)\ -i$

$e)\ 6i$ $\quad f)\ -2$ $\quad g)\ i$ $\quad h)\ -5i$

Uzdevums 7

Dotos kompleksos skaitļus pārveidot trigonometriskajā formā un eksponentajā formā. Argumentus izteikt gan grādos, gan radiānos

$a)\ 3+i$ $\quad b)\ -3-i$ $\quad c)\ 6+6i$ $\quad d)\ 6-6i$

$e)\ -6+8i$ $\quad f)\ 2{,}7-3{,}2i$ $\quad g)\ 1{,}8+0{,}52i$ $\quad h)\ 2{,}7-1{,}32i$

Uzdevums 8

Izpildīt doto komplekso skaitļu z un w reizinājumu trigonometriskajā formā

a) $z = 4(\cos 70° + i\sin 70°)$ $\quad w = 2(\cos 40° + i\sin 40°)$

b) $z = 8(\cos 80° + i\sin 20°)$ $\quad w = 4(\cos 80° + i\sin 20°)$

c) $z = 14(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ $\quad w = 7(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

d) $z = 15(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ $\quad w = 5(\cos(-60°) + i\sin(-60°))$

Uzdevums 9

Izpildīt doto komplekso skaitļu z un w reizinājumu, vispirms šos skaitļus izsakot trigonometriskajā formā

a) $z = 4 + 4i;$ $\quad w = 1 - i$

b) $z = -2 + 2\sqrt{3}i;$ $\quad w = 5$

c) $z = -\sqrt{3} + i;$ $\quad w = -2 - 2i$

d) $z = -3 - 3\sqrt{3}i;$ $\quad w = -2i$

Uzdevums 10

Izpildīt doto komplekso skaitļu z un w dalījumu, vispirms šos skaitļus izsakot trigonometriskajā formā

a) $z = -4\sqrt{3} + 4i;$ $\quad w = 2 - 2i$

b) $z = 5i;$ $\quad w = 15 + 15\sqrt{3}i$

c) $z = 2\sqrt{3} + 2i;$ $\quad w = -1 + i$

Uzdevums 11

Aprēķināt kompleksā skaitļa norādīto pakāpi trigonometriskajā formā

a) $z = 2\sqrt{3} - 2i;$ $\quad n = 5$

b) $z = 6i;$ $\quad n = 12$

c) $z = -\sqrt{3} - i;$ $\quad n = 7$

7. Pielikums – komplekso skaitļu dalījuma formulas izvedums

Doti kompleksie skaitļi $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ un $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Izteiksim skaitļu dalījumu un piereizināsim to ar saucējam kompleksi saistīto skaitli

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \cdot \frac{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

/Komentārs. Saucējā ir Pitagora teorēmas trigonometriskā forma $\cos^2\alpha + \sin^2\beta = 1$/

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)}{1} =$$

/Komentārs. Skaitītājā var pielietot trigonometrisko funkciju argumentu summas teorēmas

$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$ un

$\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha = \sin(\alpha - \beta)$/

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

8. Interesanti

Apskatīsim uzdevumu:

> Sadali skaitli 10 divos saskaitāmajos tā, lai to reizinājums ir 40.

Pirmā doma, kas ienāk prātā – tas nav iespējams!
Protams, ka reālo skaitļu kopā šādus divus saskaitāmos atrast nevar.
Šo uzdevumu algebras grāmatā Ars Magna publicējis Džerolāmo Kardāno (Gerolamo Cardano).
Atrisinājums ir visai oriģināls.

Īsumā:

Sadalīsim skaitli 10 divos saskaitāmajos 5 un 5. Sareizināsim tos un rezultātu atņemsim no skaitļa 40, tas ir, $40 - 25 = 15$. Tātad šis skaitlis ir kāda skaitļa kvadrāts. Ja to pieskaita un atņem no 5, tad iegūst divus skaitļus, kuru summa ir 10. Izmantojot kvadrātu starpības formulu

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Ir jābūt, ka skaitlis b^2 ir negatīvs, tad, lai iegūtu summu, aprēķinām

$$40 = 25 + 15 = 25 - (-15) = (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15})$$

Divi meklētie skaitļi ir $5 + \sqrt{-15}$ un $5 - \sqrt{-15}$.