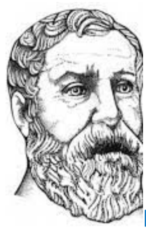
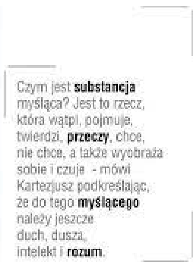
LICZBY ZESPOLONE

OPIS SZCZEGÓŁOWY: Liczby zespolone są to liczby będące rozszerzeniem zbioru liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$ o jednostkę urojoną i , to znaczy o pierwiastek wielomianu $x^2 + 1.$ Liczby zespolone rozszerzają koncepcję jednowymiarowej osi liczbowej do dwuwymiarowej płaszczyzny zespolonej, przy czym oś OX oznacza liczby rzeczywiste, a oś OY – liczby urojone. Liczba zespolona postaci $a + bi$ może być określona za pomocą punktu o współrzędnych (a, b) leżącego na płaszczyźnie zespolonej. Liczby zespolone pozbawione części rzeczywistej, a zatem leżące bez pośrednio na osi OY płaszczyzny zespolonej, nazywane są liczbami urojonymi, zaś liczby pozbawione części urojonej, a więc leżące bezpośrednio na osi OX, to liczby rzeczywiste. Zbiór liczb zespolonych zawiera zatem w sobie zbiór liczb rzeczywistych, rozszerzony w celu umożliwienia rozwiązywania takich problemów, które nie posiadają rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych. Poza matematyką liczby zespolone znajdują zastosowanie także w innych dziedzinach nauki, jak fizyka, chemia, biologia, ekonomia, elektrotechnika i statystyka.

Najwcześniejsze odniesienia do liczb zespolonych pojawiają się już w pracach Herona z Aleksandrii z I wieku n.e., jednak dopiero w XVI idea liczb zespolonych oraz związanych z nimi pierwiastków kwadratowych liczb ujemnych stała się naprawdę istotna. Okazało się bowiem, że poprzez dopuszczenie takich pierwiastków można w bardzo łatwy sposób wyprowadzać ogólne wzory do rozwiązywania równań trzeciego i czwartego stopnia. Było to dość zaskakujące dla matematyków, zwłaszcza że w tamtym czasie nie akceptowano w pełni nawet liczb ujemnych. Sam termin liczby urojone łac. *imaginaris* zawdzięczamy z kolei Kartezjuszowi, który chciał zaakcentować ich absurdalność, odróżniając je od dobrze znanych liczb rzeczywistych łac. *realis*. Co ciekawe, liczby zespolone zostały powszechnie uznane oraz odarte z mistyki znacznie później. Ich definicję – mówiącą o tym, że składają się z części rzeczywistej i urojonej – wprowadził dopiero w 1832 roku niemiecki matematyk C.F. Gauss.



Heron Z Aleksandrii

Kartezjusz

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union


Karl Frriedrich Gauss – Książę Matematyków

CEL: Opanowanie podstaw teorii liczb zespolonych.

Zdobyte umiejętności:

1. Liczby zespolone: sprzężenie, moduł, argument główny, postać trygonometryczna.
2. Działania na liczbach zespolonych.
3. Wzór Moivre'a
4. Pierwiastki z liczby zespolonej
5. Postać wykładnicza liczby zespolonej

Wymagania wstępne: Znajomość analizy matematycznej I, II oraz III.

Zastosowania liczb zespolonych w rzeczywistych problemach: Nie jest łatwo wyobrazić sobie skuteczne wykorzystanie liczb zespolonych na co dzień. Do czego służą nam zatem liczby zespolone w życiu? Są one niezastąpione w takich dziedzinach jak automatyka i robotyka, optyka, telekomunikacja, chemia czy też medycyna. W elektrotechnice przydają się do opisu obwodów elektrycznych prądu przemiennego, wyrażając jego moc czynną oraz bierną. Dodatkowo znacznie ułatwiają obliczanie prądów zwarciowych, co w praktyce przekłada się na płynną i nieprzerwaną dystrybucję prądu np. do mieszkań. Innym zastosowaniem liczb zespolonych jest obróbka sygnałów cyfrowych dotyczących nie tylko dźwięku, ale również obrazu. Pomagają one w optymalnej kompresji grafik, eliminacji szumów bądź podbijaniu określonych częstotliwości w konkretnej ścieżce dźwiękowej, a dodatkowo są kluczowe przy tworzeniu efektów filmowych (fraktale- powszechnei znaczące w kompresji obrazu, tworzeniu grafiki komputerowej, a co za tym idzie efektów filmowych). Wszędzie tam, gdzie występują drgania harmoniczne, liczby zespolone są jak znalazł. Przy pomocy liczb zespolonych opisuje się doskonale fale mające kształt sinusoidy jak np fale elektromagnetyczne, co ma niebagatelne znaczenie np. w telekomunikacji. Zatem widzimy, że każdym razem, gdy używamy telefonu, korzystamy z Internetu, albo oglądamy telewizję, film w kinie czy słuchamy radia – pamiętajmy, że przyczyniają się do tego liczby zespolone.

Spis treści:

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

1. LICZBY ZESPOLONE.

1.1. Wprowadzenie do liczb zespolonych.

Liczby zespolone są rozszerzeniem liczb rzeczywistych R. Zbiór liczb zespolonych oznaczamy symbolem **C** (ang. *complex number*).

W zbiorze liczb rzeczywistych nie można wyciągać pierwiastków z liczb ujemnych.
W zbiorze liczb zespolonych można wyciągać pierwiastki z liczb ujemnych.
Pierwiastek (parzystego stopnia) z liczby ujemnej jest tzw. **liczbą urojoną** i zapisujemy go za pomocą jednostki urojonej i. Liczbę i definiujemy tak:

$$\boldsymbol{i^2 = -1}.$$

PRZYKŁADY.

1. Jeżeli $x \in R$, to równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązań.
   Jeżeli $x \in C$, to równanie $x^2 = -1$ ma dwa rozwiązania: $x^2 = -1 \Rightarrow x = i \lor x = -i$

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie $x^2 = -9$

Rozwiązanie

$$x^2 = -9 \Rightarrow x = 3i \lor x = -3i$$

ponieważ:

$$(3i)^2 = 9 \cdot i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

oraz

$$(-3i)^2 = 9 \cdot i^2 = 9 \cdot (-1) = -9.$$

1.2. Postać algebraiczna liczby zespolonej.

Liczbę zespoloną zapisujemy tak:

$$\boldsymbol{a + bi},$$

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

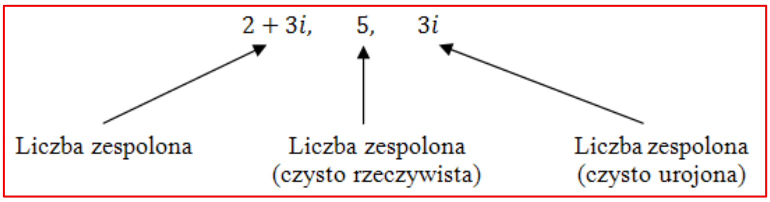
gdzie: $a, b \in R$ przy czym a - część rzeczywista liczby zespolonej, $\boldsymbol{a = Rez}$;

b - część urojona liczby zespolonej, $\boldsymbol{b = Imz}$;

$\boldsymbol{i}$ - jednostka urojona.

Liczba zespolona może składać się tylko z części rzeczywistej lub tylko z części urojonej.

W szczególności każda liczba rzeczywista jest liczbą zespoloną.



Rys.1.1.

Liczbę zespoloną $a + bi$ można równoważnie jako uporządkowaną parę:

$$(a, b)$$

PRZYKŁADY.

3. a) Przykłady liczb zespolonych z częścią rzeczywistą i urojoną:

$5+i, \quad 3+9i, \quad \frac{1}{2}-2i, \quad -\sqrt{2}+10i, \quad \pi-\sqrt{3}i$

b) Przykłady liczb zespolonych tylko z częścią rzeczywistą: $2, \ -3\,, \ \sqrt{3}, \ \frac{2}{3} - \ \sqrt{5}\,, \ \pi$

c) Przykłady liczb zespolonych tylko z częścią urojoną: $i, \ 2i, \ -4i, \ \frac{2}{3}i\,, \ \frac{\sqrt{3}}{4}i\,, \ (1-\sqrt{2})i.$

Uwaga

- Jeżeli liczba zespolona nie ma części rzeczywistej, to mówimy, że jej część rzeczywista jest równa zero.
- Jeżeli liczba zespolona nie ma części urojonej, to mówimy, że jej część urojona jest równa zero.

Aby określić dowolną liczbę zespoloną, wystarczy podać jej część rzeczywistą (a) i urojoną (b).

4. a) Liczba zespolona o części rzeczywistej 7 i urojonej 13, to liczba: $7 + 13i$.

b) Liczba zespolona o części rzeczywistej −1 i urojonej 2, to liczba: $-1 + 2i$.

c) Liczba zespolona o części rzeczywistej 3 i urojonej −1, to liczba: $3 - i$.

d) Liczba zespolona o części rzeczywistej 0 i urojonej −4, to liczba: $-4i$.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

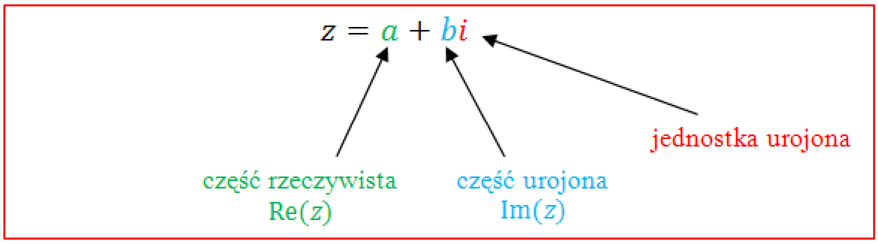
Ważne!

Część urojona liczby zespolonej, to jedynie współczynnik liczbowy stojący przy i (bez i).

Liczby zespolone często oznacza się symbolem $\boldsymbol{z}$, np.: $z = 7 + 13i$.

To jest umowne oznaczenie, podobnie jak np. liczby naturalne oznaczamy często literą $\boldsymbol{n}$.

Przyjmijmy, że mamy daną liczbę zespoloną $z = a + bi$. Wówczas:



Rys.1.2.

5.

- $Re(2+i) = 2$
- $Im(2+i) = 1$

Uwaga: Część rzeczywista każdej liczby rzeczywistej jest równa tej liczbie, część urojona liczby rzeczywistej jest równa zero:

- $Re(-5) = -5$
- $Im(-5) = 0$.

Część rzeczywista każdej liczby czysto urojonej jest równa zero.

- $Re(-2i) = 0$
- $Im(-2i) = -2$

6.

- $Re(x - y + 2xi) = x - y$
- $Im(x - y + 2xi) = 2x$.

1.3. Równość dwóch liczb zespolonych

Dwie liczby zespolone $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i urojone są sobie równe:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{Re(z_1) = x_1 = x_2 = Re(z_2)\,, \quad Im(z_1) = y_1 = y_2 = Im(z_2)\}\,.$$

PRZYKŁADY.

7. Przykład liczb zespolonych, które nie są sobie równe

$$2 + 5i \neq 5 + 2i\,,$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

ponieważ ich części rzeczywiste i urojone nie są równe.

Równość liczb zespolonych wykorzystywana jest przy rozwiązywaniu równań zespolonych

8.

$$z^2 = i \Leftrightarrow (x+iy)^2 = i \Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 = i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \wedge 2xy = 1\,.$$

$$\begin{cases}(x-y)(x+y) = 0 \\ 2xy = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \vee x = -y \\ 2y^2 = 1 \vee -2y^2 = 1\end{cases} \quad x, y \in R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y^2 = -\frac{1}{2} \ sprz., bo\ y \in R$$

Ostatecznie liczby spełniające równanie $z^2 = i$ są postaci:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{lub} \ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. DZIAŁANIA NA LICZBACH ZESPOLONYCH.

2.1. Dodawanie (odejmowanie) liczb zespolonych

Liczby zespolone dodajemy (odejmujemy) poprzez **dodanie (odjęcie)** osobno części rzeczywistych i urojonych, podobnie jak przy dodawaniu (odejmowaniu) wielomianów:

Jeżeli $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, to

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

PRZYKŁADY.

9.

$a)\ (4-3i) + (2i-6) = (4-6) + i(-3+2) = -2 - i.$
$b)\ (3-2i) - (2-6i) = (3-2) + i(-2-(-6)) = 1 + 4i.$
$c)\ 2 + i + 3 - i\sqrt{3} = (2+3) + i(1-\sqrt{3}) = 5 + i(1-\sqrt{3}).$
$d)\ \left(\frac{1}{2} + i\right) - \left(1 - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ - *do sprawdzenia jako ćwiczenie.*

Zauważ, że

- część rzeczywista sumy (różnicy) liczb zespolonych jest sumą (różnicą) części rzeczywistych:

$$Re(z_1 \pm z_2) = x_1 \pm x_2$$

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

- część urojona sumy (różnicy) liczb zespolonych jest sumą (różnicą) urojonych:

$$Im(z_1 \pm z_2) = y_1 \pm y_2$$

2.2. Mnożenie liczb zespolonych

Liczby zespolone mnożymy podobnie jak wykonuje się mnożenie wielomianów:

Jeżeli $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$, to

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

PRZYKŁADY.

10.

$i(2 + i) = 2i + i^2 = -1 + 2i$.

$(3 - i\sqrt{2})(-1 - i) = -3 - \sqrt{2} + i(-3 + \sqrt{2})$.

Zauważ, że

część rzeczywista iloczynu liczb zespolonych jest postaci:

$$Re(z_1 \cdot z_2) = x_1x_2 - y_1y_2 \ ,$$

natomiast część urojona iloczynu jest postaci:

$$Im(z_1 \cdot z_2) = x_1y_2 + y_1x_2 \ .$$

2.3. Dzielenie liczb zespolonych

Dzielenie liczb zespolonych wykonuje się podobnie jak przy usuwaniu niewymierności z mianownika w przypadku wyrażeń algebraicznych. Bardzo przydaje się tu następujący wzór skróconego mnożenia $(x + yi)(x - yi) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$.

Jeżeli $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$, to

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(-x_1y_2 + y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{-x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

PRZYKŁADY.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

11.

a) $\frac{1}{i}=\frac{1}{i}\cdot\frac{(-i)}{(-i)}=\frac{-i}{1}=-i.$

b) $\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i}{1+1}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-i\,\frac{1}{2}.$

c) $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$

Zauważ, że

część rzeczywista ilorazu liczb zespolonych jest postaci:

$$Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ ,$$

a część urojona jest postaci

$$Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{-x_1y_2+y_1x_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

3. SPRZĘŻENIE LICZBY ZESPOLONEJ

Sprzężenie liczby zespolonej $z=x+yi$ oznaczamy symbolem $\bar{\boldsymbol{z}}$,

$$\bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{iy}\ .$$

PRZYKŁADY.

12.

a) $\overline{1+i}=1-i.$
b) $\overline{5-2i}=5+2i.$
c) $\overline{(-i)}=i.$
d) $\overline{2}=2.$

Zauważ, że
Część rzeczywista sprzężenia $\bar{z}$ jest taka sama jak część rzeczywista liczby z , natomiast część urojona sprzężenia $\bar{z}$ jest liczbą przeciwną do części urojonej liczby z:

$$Re(\bar{z})=Re(z)$$

$$Im(\bar{z})=-Im(z)\ .$$

Własności sprzężeń:

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

1. Sprzężenie sumy/różnicy liczb zespolonych jest sumą/różnicą sprzężeń: $\overline{\boldsymbol{z_1} \pm \boldsymbol{z_2}} = \overline{\boldsymbol{z_1}} \pm \overline{\boldsymbol{z_2}}$.

2. Sprzężenie iloczynu liczb zespolonych jest iloczynem sprzężeń: $\overline{\boldsymbol{z_1} \cdot \boldsymbol{z_2}} = \overline{\boldsymbol{z_1}} \cdot \overline{\boldsymbol{z_2}}$.

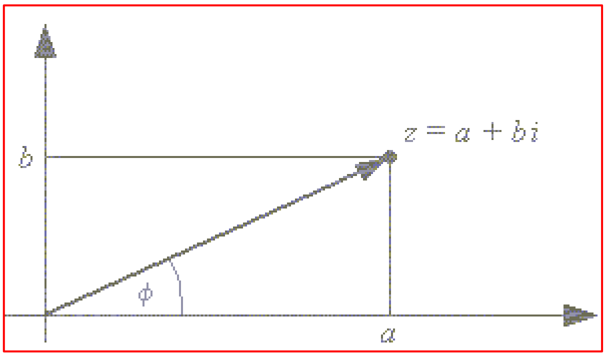
3. Sprzężenie ilorazu liczb zespolonych jest ilorazem sprzężeń: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

4. MODUŁ LICZBY ZESPOLONEJ

Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$ oznaczamy symbolem $|\boldsymbol{z}|$

$$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}.$$

Moduł liczby zespolonej z jest liczbą rzeczywistą nieujemną ($|z| \geq 0$) , co więcej interpretuje się jako odległość tej liczby od początku układu współrzędnych - Rys. 4.1.



Rys.4.1.

PRZYKŁADY.
13.

a) $|1| = |1 + 0i| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.

b) $|-2i| = |0 - 2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

c) $|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Własności modułu liczby zespolonej:

1. Moduł każdej liczby zespolonej jest liczbą rzeczywistą nieujemną: $|\boldsymbol{z}| \geq \boldsymbol{0}$.
2. Moduł liczby z jest równy modułowi jej sprzężenia i liczby przeciwnej: $|\boldsymbol{z}| = |\overline{\boldsymbol{z}}| = |-\boldsymbol{z}|$
3. Kwadrat modułu liczby z jest równy iloczynowi liczby z i jej sprzężenia $\bar{z}$:

$$|\boldsymbol{z}|^2 = \boldsymbol{z} \cdot \overline{\boldsymbol{z}}$$

4. Moduł iloczynu liczb zespolonych jest iloczynem modułów: $|\boldsymbol{z_1} \cdot \boldsymbol{z_2}| = |\boldsymbol{z_1}| \cdot |\boldsymbol{z_2}|$.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

5. Moduł ilorazu liczb zespolonych jest ilorazem modułów: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

6. Moduł potęgi liczby zespolonej jest równy potędze modułu: $|z^n| = |z|^n$.

5. PŁASZCZYZNA ZESPOLONA

Każdej liczbie zespolonej $z = a + bi$ odpowiada na płaszczyźnie punkt o współrzędnych (a, b) lub wektor , zaczepiony w początku układu współrzędnych - Rys.3. Oś odciętych nazywa się osią rzeczywistą, a os rzędnych - osią urojoną.
Liczba $\boldsymbol{i}$ jest położona na osi urojonej w odległości 1 od punku przecięcia. Wyraża ją para $(0,1)$.
Liczba zespolona $z = a + bi$ przedstawiona przez wektor, łączy pojęcie wielkości z pojęciem kierunku.

6. ARGUMENT LICZBY ZESPOLONEJ

Znając moduł liczby zespolonej, możemy liczbę zespoloną opisać nie tylko za pomocą punktu - ale także za pomocą wektora o początku w punkcie $(0,0)$ i końcu w punkcie o współrzędnych liczby zespolonej- Rys.3.
Dla pewnych punktów odległość od początku układu współrzędnych płaszczyzny zespolonej będzie taka sama, ponieważ w przypadku płaszczyzny zespolonej wodząc wektorem o znanej długości zakreślimy okrąg o promieniu $r = |z|$. Z własności trójkąta prostokątnego oraz definicji sinusa i cosinusa kąta cosinusów można wyznaczyć kąt φ pomiędzy wektorem oraz osią rzeczywistą.
Argument liczby zespolonej $\boldsymbol{\varphi}$ jest **miarą kąta skierowanego** między wektorem reprezentującym liczbę zespoloną $z = a + bi$ na płaszczyźnie zespolonej a osią rzeczywistą.

Argumentem liczby zespolonej $z = a + bi \neq 0$ nazywamy każdą liczbę rzeczywistą φ spełniającą dwa warunki:

$$\boldsymbol{cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \quad , \quad sin\varphi = \frac{b}{|z|}} .$$

Argument φ liczby zespolonej z oznacza się $\boldsymbol{\varphi = arg\, z.}$

Pierwszym ramieniem kąta skierowanego jest dodatnia półoś rzeczywista, drugie ramię jest wyznaczone przez wektor *Oz*. Każda liczba zespolona ma nieskończenie wiele argumentów, ponieważ funkcje sinus i cosinus są funkcjami okresowymi. Innymi słowy wodząc wektorem po okręgu, możemy wykonać wiele obrotów, dlatego wprowadzono argument główny liczby zespolonej, który mieści się w przedziale od $0°$ do $360°$ (od 0 do 2π).

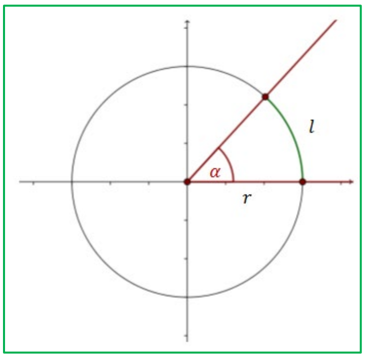
Miara łukowa kąta:

- Jednostką podstawową jest 1 radian.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

- Kąt pełny (360 °) ma 2π radianów.

Narysujmy okrąg o dowolnym promieniu r i zaznaczmy w nim kąt środkowy α. Kąt α wycina w okręgu łuk o długości l



Miarą łukową kąta α nazywamy stosunek długości łuku l do długości promienia r.

Miara łukowa kąta nie zależy od długości promienia, ponieważ długość łuku jest proporcjonalna do długości promienia.
Dla okręgu o promieniu $r = 1$ miara łukowa kąta jest równa długości wyznaczonego łuku!

Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy tę spośród liczb $arg\, z$, która spełnia nierówność $0 \leq arg\, z < 2\pi$. *(możemy się spotkać również z warunkiem $-\pi \leq arg\, z \leq \pi$. Oba założenia są równoważne, ponieważ argument liczby zespolonej zatacza okrąg, czyli 360° lub 2π)*

6.1. Własności argumentu liczby zespolonej

Twierdzenie *Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2*

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

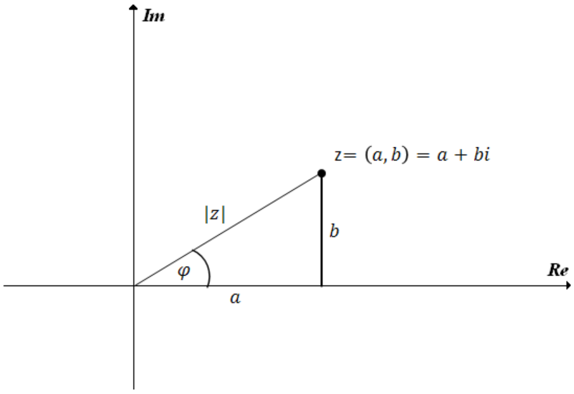
$$\arg \frac{1}{z} = -\arg z$$

$$\arg z^k = k \arg z \quad k \in C.$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7. POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA LICZBY ZESPOLONEJ

Przypomnijmy przedstawienie liczby zespolonej na płaszczyźnie



Rys. 7.1. Przedstawienie liczby trygonometrycznej na płaszczyźnie zespolonej.

Na Rys. 7.1. zaznaczono liczbę zespoloną $z = a + bi$ oraz argument liczby zespolonej -kąt φ.
Z trójkąta prostokątnego możemy wyliczyć:

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}\ ,\quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \tag{1}$$

gdzie $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ jest modułem liczby zespolonej i jest interpretowane jako odległość liczby zespolonej $z = a + bi$ od początku układu współrzędnych.

Miarę kąta φ wyrażamy zazwyczaj w radianach (nie w stopniach). Liczbę φ nazywamy *argumentem liczby* z oraz $\varphi = arg z$.

Ze wzorów (1) wyznaczamy :

$a = |z|\cos\varphi, \quad b = |z|\sin\varphi.$

Zatem możemy zapisać, że

$z = a + bi = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi\,).$

Wzór, który otrzymaliśmy

$$\boldsymbol{z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi\,)} \tag{2}$$

nazywamy **postacią trygonometryczną liczby zespolonej.**

PRZYKŁADY.

14.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

a) Dla liczby zespolonej $z = \sqrt{3} + i$ wyznacz moduł, argument oraz postać trygonometryczną.

Obliczamy moduł $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$

$\sin\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ obie funkcje są dodatnie, zatem $\varphi \in I$ ćwiartki oraz $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Zatem

$$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

b) Dla liczby zespolonej $z = 1$ wyznacz moduł, argument oraz postać trygonometryczną.

Obliczamy moduł $|z| = \sqrt{(1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$

$\sin\varphi = \frac{0}{1} = 0$, $\cos\varphi = \frac{1}{1} = 1$, zatem oraz $\varphi = 0$.

Wtedy

$$z = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$

c) Dla liczby zespolonej $z = i$ wyznacz moduł, argument oraz postać trygonometryczną

Obliczamy moduł $|z| = \sqrt{(0)^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1.$

$\sin\varphi = \frac{1}{1} = 1$, $\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0$, zatem oraz $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Wtedy

$$z = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

d) Dla liczby zespolonej $z = 1 - i$ wyznacz moduł, argument oraz postać trygonometryczną

Obliczamy moduł $|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sinus jest ujemny, cosinus jest dodatni, zatem kąt

$\varphi \in IV$ ćwiartki i $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$. Ze wzorów redukcyjnych

$\cos\varphi = \cos\frac{7}{4}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$ oraz $\sin\varphi = \sin\frac{7}{4}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$, bo

sinus jest ujemny w IV ćwiartce.

Zatem

$$1 - i = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

e) Dla liczby zespolonej $z = 1 - \sqrt{3}i$ wyznacz moduł, argument oraz postać trygonometryczną.

Obliczamy moduł $|z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} =, \ \cos\varphi = \frac{1}{2},$ sinus jest ujemny, cosinus jest dodatni, zatem kąt

$\varphi \in IV$ ćwiartki i $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$. Ze wzorów redukcyjnych

$\cos\varphi = \cos\frac{5}{3}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ oraz $\sin\varphi = \sin\frac{5}{3}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$,
bo sinus jest ujemny w IV ćwiartce.
Zatem

$$z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

f) Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczbę

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad 0 < \alpha < 2\pi$$

$$|z| = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{2(1-\cos\alpha)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

Uwaga: tożsamości trygonometryczne

$1 - \cos\alpha = 1 - \cos 2\cdot\frac{1}{2}\alpha = 1 - ((\cos\frac{1}{2}\alpha)^2 - \left(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2\right) = 2(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2 \quad =>$

$\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2\cdot 2(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2} = 2\sin\frac{1}{2}\alpha).$

$$\cos\varphi = \frac{rez}{z} = \frac{1-\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{imz}{z} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

stąd

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2k\pi$$

$$1 - \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Uwaga

Dwie liczby zespolone różne od zera są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe moduły i ich argumenty różnią się o całkowitą wielokrotność 2π : $z_1 = z_2 <=> |z_1| = |z_2|$ $\arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi, \ k \in I, \ I -$ zbiór liczb całkowitych (ang. Integer -liczba całkowita)

Wiemy już, że możemy przedstawić jedną liczbę zespoloną na trzy różne sposoby:

- w postaci ogólnej $z = a + bi$,

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

- jako punkt (a, b) na płaszczyźnie,
- w postaci trygonometrycznej $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$.

Zaletą postaci trygonometrycznej jest to, że umożliwia w łatwy sposób podnoszenie liczb zespolonych do dużych potęg. Więcej na ten temat powiemy przy okazji potęgowania i pierwiastkowania liczb zespolonych .

8. POTĘGOWANIE LICZB ZESPOLONYCH.

Liczby zespolone $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in \boldsymbol{C}$, z argumentami odpowiednio: φ_1,φ_2 Możemy zapisać w postaci

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2);$$

Obliczymy teraz iloczyn tych liczb zapisanych w postaci trygonometrycznej:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \ |z_1||z_2| \ (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Ostatnia równość wynika ze wzorów trygonometrycznych na cosinus sumy kątów oraz na sinus sumy kątów.

Powyższy rachunek pokazuje, że przy mnożeniu dwóch liczb zespolonych $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in \boldsymbol{C}$ otrzymujemy liczbę zespoloną, której:

- moduł jest iloczynem modułów liczb $\boldsymbol{z_1}$oraz $\boldsymbol{z_2}$
- argument jest sumą argumentów liczb $\boldsymbol{z_1}$ oraz $\boldsymbol{z_2}$.

Wynika stąd następujący wzór:

Wzór de Moivre'a:

Dla dowolnej liczby $z \in C$ zachodzi następujący wzór:

$$(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{3}$$

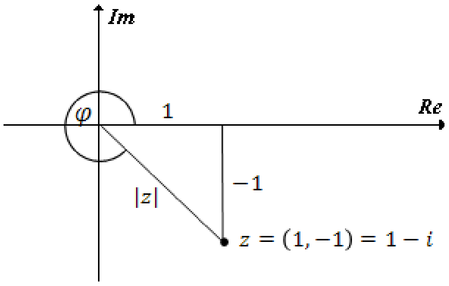
Przy pomocy tego wzoru można szybko podnosić liczby zespolone do dowolnie dużych potęg.

PRZYKŁADY.

15. Dana jest liczba $z = 1 - i$. Oblicz $z.^{100}$

Rozwiązanie:
Zacznijmy od zapisania liczby zespolonej $z = 1 - i$ w postaci trygonometrycznej.
Zaznaczmy ją w układzie współrzędnych:

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union



Obliczamy moduł:

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

oraz

$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Obliczamy argument φ. φ leży w IV ćwiartce układu współrzędnych, zatem: $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

(Argument można było również odczytać z układu współrzędnych. Widać, że $\varphi = 3 \cdot 90° + 45° = 315°$).

Zapiszmy teraz liczbę $z = 1 - i$ w postaci trygonometrycznej: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczamy

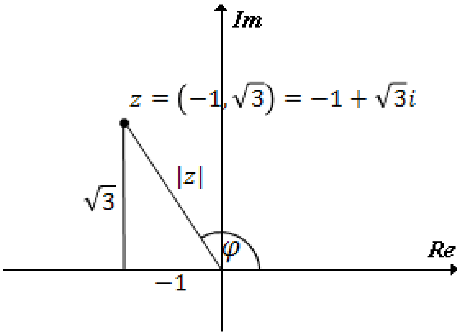
$$z^{100} = \left(\sqrt{2}\right)^{100}\left(\cos 100 \cdot \frac{7}{4}\pi + i\sin 100 \cdot \frac{7}{4}\pi\right) = 2^{50}(\cos 175\pi + i\sin 175\pi) =$$
$$= 2^{50}(\cos(174\pi + \pi) + i\sin(174\pi + \pi)) = 2^{50}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) =$$
$$= 2^{50}(-1 + 0 \cdot i) = -2^{50}.$$

16. Dana jest liczba $z = -1 + \sqrt{3}i$. Oblicz z^{67}.

Rozwiązanie:

Zaznaczamy liczbę $z = -1 + \sqrt{3}i$ w układzie współrzędnych:

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Teraz obliczamy moduł:

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

oraz

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}$$

Obliczamy argument φ : φ leży w II ćwiartce układu współrzędnych, zatem: $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.
(Argument można było również odczytać z układu współrzędnych.
Widać, że $\varphi = 90° + 30° = 120°$).
Zapiszmy teraz liczbę $z = -1 + \sqrt{3}i$ w postaci trygonometrycznej:

$$z = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

Stosując wzór de Moivre'a obliczamy, że:

$$z^{67} = |z|^{67}(\cos 67\varphi + i\sin 67\varphi) = 2^{67}\left(\cos\left(67\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(67\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{67}\left(\cos\frac{134\pi}{3} + i\sin\frac{134\pi}{3}\right) = 2^{67}\left(\cos\left(44\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(44\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right) =$$

$$= 2^{67}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2^{67}\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{66} + 2^{66}\sqrt{3}\,i$$

Uwaga: $134 : 3 = 44\frac{2}{3} = 44 + \frac{2}{3}$

9. PIERWIASTKOWANIE LICZB ZESPOLONYCH.

TWIERDZENIE *Niech* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *będzie liczbą zespoloną różną od zera.*

Wówczas ***pierwiastkami stopnia n*** *z liczby* ***z*** *są liczby:*

$$\boldsymbol{\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \qquad (4)$$

A zatem widzimy, że wyciągając pierwiastek ***n-tego stopnia*** *z liczby zespolonej, zawsze otrzymamy* ***n*** *rozwiązań.*

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

PRZYKŁADY.

17. Obliczyć $\sqrt[4]{-1}$

Rozwiązanie:

Sprowadzamy liczbę -1 do postaci trygonometrycznej, czyli

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Wzór na pierwiastki 4-tego stopnia: (wzór (4)) podstawiamy kolejno $k = 0, 1, 2, 3.$

1. Dla $k = 0$ mamy:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\right)$

2. Dla $k = 1$ mamy:

$$\omega_1 = \cos\frac{\pi+2\cdot1\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\cdot1\cdot\pi}{4} = \cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi$$
$$= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Dla $k = 2$ mamy:

$$\omega_2 = \cos\frac{\pi+2\cdot2\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\cdot2\cdot\pi}{4} = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi$$
$$= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Dla $k = 3$ mamy:

$$\omega_3 = \cos\frac{\pi+2\cdot3\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\cdot3\cdot\pi}{4} = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi$$
$$= \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Otrzymaliśmy cztery pierwiastki:

$$w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

18. Oblicz $\sqrt[3]{2-2i}$

Rozwiązanie:

Sprowadzamy liczbę $2-2i$ do postaci trygonometrycznej :

$$2-2i = 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

Wzór na pierwiastki 3-ego stopnia: (4)

Zauważmy, że $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

Podstawiamy kolejno $k = 0, 1, 2.$

1. Dla $k = 0$ mamy:

$$\omega_0 = \cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{3} = \cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\frac{5\pi}{12} + i\, sin\frac{5\pi}{12}$$

Zostawiamy rozwiązanie w takiej postaci, gdyż obliczenie $\cos\frac{5\pi}{12}$ oraz $\sin\frac{5\pi}{12}$ wymaga tablic.

2. Dla $k = 1$ mamy:

$$\omega_1 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{3}) = \sqrt{2}\,(\cos\frac{15}{12}\pi + i\sin\frac{15}{12}\pi)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4} - i\, sin\frac{\pi}{4})$$
$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i.$$

3. Dla $k = 2$ mamy:

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$\omega_2 = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\cdot 2\cdot \pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\cdot 2\cdot \pi}{3}) = \sqrt{2}\,(\cos\frac{23}{12}\pi + i\sin\frac{23}{12}\pi)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} - i\,sin\frac{\pi}{12})$$

Otrzymaliśmy trzy pierwiastki:

$$w_0 = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right),$$

$$w_1 = -1 - i,$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{12}\pi - i\sin\frac{1}{12}\pi\right).$$

10. POSTAĆ WYKŁADNICZA LICZBY ZESPOLONEJ.

Postać wykładnicza liczby zespolonej zapisuje się następująco:

$$\boldsymbol{z = |z|e^{i\varphi}}, \tag{5}$$

gdzie:
$|z|$ - jest **modułem** liczby zespolonej,
$\boldsymbol{\varphi}$ - jest argumentem liczby zespolonej,
$\boldsymbol{e}$ - jest liczbą Eulera,

$$e^{i\varphi} = (cos\varphi + isin\varphi).$$

Uwaga

Liczbę Eulera (zwaną również pod nazwą liczby Nepera) oznaczamy krótko literą e.

Wartość tej liczby można określić w przybliżeniu:

$$e = 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots$$

Liczbę e można definiować na wiele różnych sposobów. Najczęściej spotykana jest definicja wykorzystująca następującą granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Równie często definiuje się liczbę e jako sumę szeregu:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

PRZYKŁADY.

19. $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
   Postać wykładnicza:
   $z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

20. $z = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$
   Postać wykładnicza:
   $z = 1 = e^{0i}.$

21. Dla liczby zespolonej $z = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$
   Postać wykładnicza:
   $z = 1 = e^{\frac{\pi}{2}i}.$

22. $z = 2 - 2i \quad |z| = 2\sqrt{2} \;, \quad \varphi = \frac{7}{4}\pi$
   Postać wykładnicza:
   $z = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{7}{4}\pi i}.$

11. ZADANIA.

1. Następujące liczby przedstawić w postaci trygonometrycznej:
   a) -3i
   b) $\sqrt{3} - i$
   c) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
   d) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
   e) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2. Skorzystać ze wzoru de Moivre'a i podnieść następujące liczy do potęgi:
   a) $(2 + 2i)^{35}$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

b) $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{12}$

c) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{31}$.

d) $(-1+i)^{19}$

e) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{47}$

f) $\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{34}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{17}}$

g) $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{2020}$

h) $\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}-i\right)^{24}$.

3. Wyznaczyć pierwiastki z liczb zespolonych:

a) $\sqrt[3]{-2+2i}$

b) $\sqrt[4]{16i}$

c) $\sqrt[5]{1}$

d) $\sqrt[3]{1-i}$.

e) $\sqrt[4]{(-1+i)^3}$

f) $\sqrt[3]{4+i4\sqrt{3}}$

g) $\sqrt[3]{8i}$

4. Rozwiąż równania

a) $z^3=i$

b) $z^4=-16$

c) $z^6=-1$

d) $z^4=i$.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union