Paaris ja paaritu funktsioon

1) *Paaris funktsioon*

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse paarisfunktsiooniks , kui iga x korral funktsiooni määramispiirkonnast kehtib võrdus:

$$f(-x) = f(x)$$

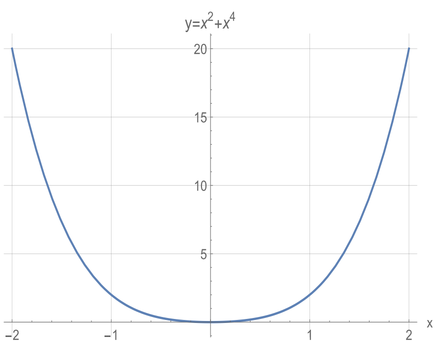
Example 1: Kas antud funktsioon f(x)= $3x^2 - 5x^4$ on paaris või paaritu?

$f(-x) = 3(-x)^2 - 5(-x)^4 = 3x^2 - 5x^4$

f(-x) = f(x) tegemist on paaris funktsiooniga.

Paaris funktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.

Joonis 1: Paaris funktsioon $y = x^4 + x^2$



2) *Paaritu funktsioon*

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse paarituks funktsiooniks, kui iga x korral funktsiooni määramispiirkonnast kehtib võrdus:

$$f(-x) = -f(x)$$

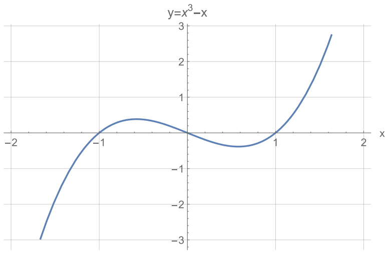
.

Näide 2: Kas antud funktsioon f(x)= $4x^3 + 7x$ on paaris või paaritu?

$f(-x) = 4(-x)^3 + 7(-x) = \underbrace{-4x^3 - 7x}_{\text{Ei ole paaris}} = \underbrace{-(4x^3 + 7x)}_{\text{paaritu}}$

Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes

Joonis 2: Paaritu funktsioon $y= x^3 - x$



3) Ei paaris ega paaritu

Enamus funktsioone ei ole paaris ega ka paaritud.

Näide 3: Kas antud funktsioon $f(x) = 5x^2 + 3x + 5$ on paaris või paritu?

$f(-x) = 5(-x)^2 + 3 (- x) + 5 = 5x^2 - 3x + 5 = - (5x^2 + 3x - 5)$

$f(-x) \neq f(x) \Longrightarrow 5x^2 + 3x + 5 \neq 5x^2 - 3x + 5 \Longrightarrow$ Pole paaris

$f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow - (5x^2 + 3x - 5) \neq - (5x^2 + 3x + 5) \Longrightarrow$ Pole paaritu

Antud funktsioon ei ole paaris ega ka paaritu.

Tööleht

Ülesanne 1

Kas antud funktsioon on paaris või paaritu?

1) $y = x^2 + 5x$; 2) $y = -x^2 + 2$; 3) $y = x^2 + 2x - 3$;

4) $y = 5x - 2$; 5) $y = x^4 + 2x^2$; 6) $y = x^2 - 5x + 3$;

7) $y = x + \frac{1}{x}$; 8) $y = \frac{2x^2}{3x^2+x}$; 9) $y = \frac{3}{x^2-5}$;

10) $y = x^4 + x^2 - 3x$; 11) $y = x^3 + x^3$; 12) $y = 3x^4 + x^2 + 4$

Ülesaane 2

Kas antud funktsioon on paaris või paaritu?

$a)$ $y = 5x$; e) $y = 5x^2$; $i)$ $y = 5x - 1$; $m)$ $y = \frac{3}{x}$;

$b)\ y = 5x^2 + 1$;	$f)\ y = 6x$;	$j)\ y = 6x^2 + 4$;	$n)\ y = 6x + 1$;
c) $y = 2x^3$;	$g)\ y = 5x^2 + 1$;	$k)\ y = x^2 - 2x + 3$;	$o)\ y = 3x^4$;
d) $y = 7x^2 + x$;	$h)\ y = 3x^4 + x^2 + 4$;	$l)\ y = x^3 - 5x - 3$;	$p)\ y = x + \frac{1}{x}$.

Kodutöö

1. $y = 2x^2 - 3x + 6$
2. $y = x^2 + 3x + 1$
3. $y = 3x^2 + 5x - 4$
4. $y = x^2 + x + 2$
5. $y = 3x^2 - 7x - 6$

3. Piirväärtus

Lõplik piirväärtus

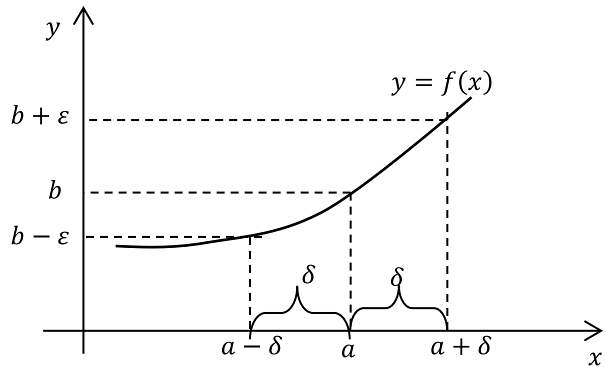
Definitsioon 1: Olgu funktsioon $y=f(x)$ määratud punkti a mingis ümbruses või selle ümbruse mõnedes punktides. Funktsioon $y=f(x)$ läheneb piirväärtusele b $(y\to b)$ argumendi x lähenemisel väärtusele a $(x\to a)$, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu ε korral leidub niisugune positiivne arv δ, et iga $x\neq a$ korral, mis rahuldab võrratust $|x-a|<\delta$, kehtib võrratus

$$|f(x)-b|<\varepsilon .$$

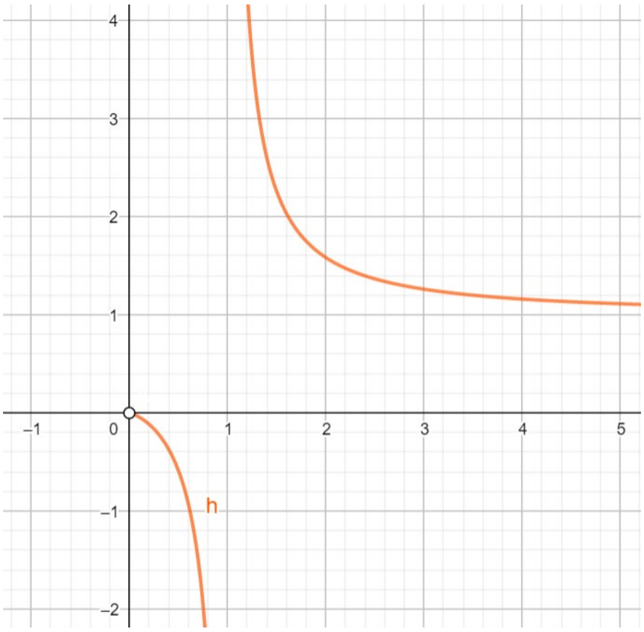
Kirjutatakse $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ehk $f(x)\to b$, kui $x\to a$.

Teisiti öeldes arv b on funktsiooni $y=f(x)$ piirväärtuseks kohal a, kui funktsiooni $y=f(x)$ väärtused tulevad arvule b kuitahes lähedale, kui aga argumendi väärtused on arvule a küllalt lähedal.

Graafiliselt: et võrratusest $|x-a|<\delta$ järeldub võrratus $|f(x)-b|<\varepsilon$, siis kõigi punktide x puhul, mis ei ole punktist a kaugemal kui δ, asetsevad funktsiooni $y=f(x)$ graafiku punktid M riba sees, mille laius on 2ε, kusjuures riba on piiratud sirgetega $y=b-\varepsilon$ ja $y=b+\varepsilon$.



Näide 1: Funktsioon $f(x) = \ln(x+1)/\ln(x)$ pole defineeritud $x<0$. Funktsioon on esitatud graafikuga.



Kuna a = 0, siis x läheneb nullile ja funktsiooni väärtus läheneb y = 0 siis saaame kirjutada

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}=0$$

Definitsioon 2: a) Kui funktsioon $f(x)$ läheneb piirväärtusele b_1 argumendi x lähenemisel mingile arvule a nii, et x omandab ainult arvust a väiksemaid väärtusi, siis kirjutatakse $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$ ja arvu b_1 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ vasakpoolseks piirväärtuseks punktis a.

b) Kui x omandab ainult arvust a suuremaid väärtusi, siis kirjutatakse $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ ja arvu b_2 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ parempoolseks piirväärtuseks punktis a.

Saab tõestada, et kui eksisteerib nii vasak- kui ka parempoolne piirväärtus punktis a ja need on võrdsed, s.o. $b_1=b_2=b$, siis b ongi piirväärtus, mis vastab eespool antud piirväärtuse definitsioonile. Ümberpöördult, kui eksisteerib funktsiooni piirväärtus b punktis a, siis on punktis a olemas nii vasak- kui ka parempoolne piirväärtus ja need on võrdsed.

Märkus: Funktsiooni piirväärtuse olemasoluks $x\to a$ korral ei ole nõutav, et funktsioon oleks määratud punktis $x=a$. Piirväärtuse leidmisel vaadeldakse funktsiooni väärtusi punkti a ümbruses, punktist a erinevates punktides.

Definitsioon 3: Argumendi lähenemisel lõpmatusele funktsioon $f(x)$ läheneb piirväärtusele b, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu ε korral leidub selline positiivne arv N, et kõigi x väärtuste puhul, mis rahuldavad võrratust $|x|>N$, kehtib võrratus $|f(x)-b|<\varepsilon$.

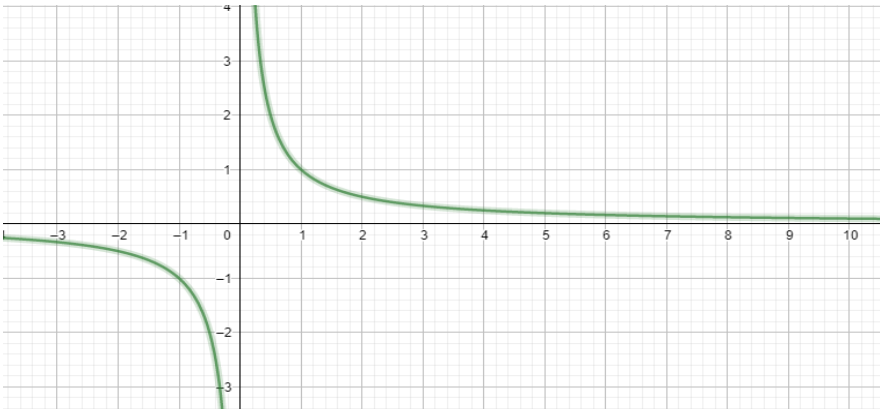
Lõpmatu piirväärtus

Definitsioon 4: Funktsioon $f(x)$ läheneb $x \to a$ puhul lõpmatusele ehk $f(x)$ on $x \to a$ puhul lõpmatult kasvav suurus, kui iga kuitahes suure positiivse arvu M korral leidub selline arv $\delta > 0$, et kõigi arvust a erinevate ja võrratust $|x-a| < \delta$ rahuldavate x väärtuste puhul kehtib võrratus $|f(x)| > M$.

Kirjutatakse $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ ehk $f(x) \to \infty$, kui $x \to a$.

Kui $f(x)$ läheneb $x \to a$ puhul lõpmatusele ja omandab seejuures ainult positiivseid või ainult negatiivseid väärtusi, siis kirjutatakse vastavalt $\lim_{x \to a} = +\infty$ või $\lim_{x \to a} = -\infty$.

Näide 2: Olgu antud funktsioon $f(x) = 1/x$



Kui x väärtus muutub suuremaks, siis funktsiooni väärtus läheneb nullile.

Tabel

x	$f(x)$
10	0,1
100	0,01
1000	0,001

Kui x väärtus väheneb, siis funktsiooni väärtus läheneb samuti nullile.

x	$f(x)$
−10	−0,1
−100	−0,01
−1000	−0,001

Siit saame järeldada, et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Märkus: Funktsioon $y = f(x)$ ei tarvitse $x \to a$ või $x \to \infty$ korral läheneda mingile lõplikule piirväärtusele ega lõpmatusele.

Piirväärtuse omadused

Teoreem 1: Kahe, kolme ja üldiselt lõpliku hulga muutuvate suuruste algebralise summa piirväärtus võrdub nende muutuvate suuruste piirväärtuste algebralise summaga:

$$\lim(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k .$$

Teoreem 2: Kahe, kolme ja üldiselt lõpliku hulga muutuvate suuruste korrutise piirväärtus võrdub nende muutuvate suuruste piirväärtuste korrutisega:

$$\lim(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_k .$$

Järeldus: Konstantse teguri võib tuua piirväärtuse märgi ette:

$$\lim(cu) = c \cdot \lim u .$$

Teoreem 3: Kahe muutuva suuruse jagatise piirväärtus võrdub nende muutuvate suuruste piirväärtuste jagatisega, kui jagaja piirväärtus erineb nullist:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \text{ kui } \lim v \neq 0 .$$

Teoreem 4: Kui $x \to a$ (või $x \to \infty$) ja seejuures kolme funktsiooni $u = u(x), z = z(x), v = v(x)$ vastavad väärtused rahuldavad võrratusi $u \le z \le v$ ning $u(x)$ ja $v(x)$ lähenevad ühele ja samale piirväärtusele b, siis ka $z(x)$ läheneb piirväärtusele b.

Teoreem 5: Kui $x \to a$ (või $x \to \infty$) korral funktsioon *y* omandab ainult mittenegatiivseid väärtusi $y \ge 0$ ja läheneb piirväärtusele b, siis b on mittenegatiivne arv: $b \ge 0$.
Analoogselt, $y \le 0$ korral $\lim y \le 0$.

Teoreem 6: Kui $x \to a$ (või $x \to \infty$) ja seejuures kahe piirväärtusele läheneva funktsiooni $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ vastavad väärtused rahuldavad võrratust $v \ge u$, siis ka $\lim v \ge \lim u$.

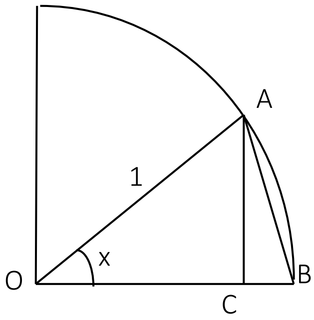
Teoreem 7: Kui muutuja v on kasvav, s.t. tema iga järgnev väärtus on eelnevast suurem, ja kui ta on tõkestatud, s.t. $v < M$, siis sel muutuval suurusel on olemas piirväärtus $\lim v = a$, kusjuures $a \le M$.

Analoogne väide on kehtiv ka kahaneva tõkestatud muutuja kohta.

Näide 3

Näitame, et $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = o$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Kui $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, siis $\sin x < x$ (vt. joonist).



Joonisel $OA = 1$, $\quad AC = \sin x$, $\quad \overset{\frown}{AB} = x$.

Järelikult ka $\sin \dfrac{x}{2} < \dfrac{x}{2}$.

Saame, et

$$2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x .$$

Kasutame valemit $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ ning saame, et

$$1 - \cos x < x \text{ ehk } \cos x > 1 - x .$$

Et $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ tõttu $\sin x > 0$, $\quad \cos x < 1$, siis

$$0 < \sin x < x , \quad 1 - x < \cos x < 1 .$$

Kuid $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ ja $\lim\limits_{x\to 0} (1 - x) = 1$.

Teoreemi 5.4 põhjal võime seega kirjutada

$$\lim_{x\to 0+} \sin x = 0 , \quad \lim_{x\to 0+} \cos x = 1 .$$

Silmas pidades, et $\sin x$ on paaritu funktsioon ja $\cos x$ paarisfunktsioon, saame

$$\lim_{x\to 0-} \sin x = 0 , \quad \lim_{x\to 0-} \cos x = 1 .$$

Ühepoolsete piirväärtuste võrdsusest aga järeldub kahepoolse piirväärtuse olemasolu ja võrdsus vastavate ühepoolsete piirväärtustega. Seega valemid $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = o$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ on põhjendatud.

Ülesanded

Arvutada piirväärtused

1. $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - 2)$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x^3}$

Klassikalised piirväärtused

Esimene klassikaline piirväärtus

Definitsion 1: Esimene klassikaline piirväärtus on $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

Teoreem 1: Kui $x \to a$ (või $x \to \infty$) ja seejuures kolme funktsiooni $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ vastavad väärtused rahuldavad võrratusi $u \le z \le v$ ning $u(x)$ ja $v(x)$ lähenevad ühele ja samale piirväärtusele b, siis ka $z(x)$ läheneb piirväärtusele b.

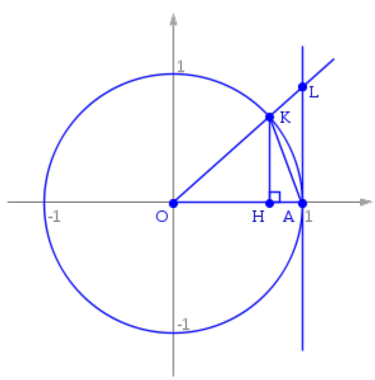
Theorem 2: Esimene klassikaline piirväärtus võrdub 1.

Tõestus:

Ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}.$$

Tõestame, et need on võrdsed. Oletame, et $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Näitame see nurk ka ühikringi $(R = 1)$peal.



Punkt K on punk, kus ristuvad kiir algusega O ja ühik ringjoon. Punkt L punkt kus ristuvad kiir algusega punktis O ja ühikringjoone puutuja punktis $(1; 0)$. Punkt H — punkti K projektsioon OX telje Näeme, et:

$$S_{\Delta OKA} < S_{sectOKA} < S_{\Delta OAL} \qquad (1)$$

(kus $S_{sectOKA}$ — sektori OKA pindala).

$$S_{\Delta OKA} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |KH| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2};$$

$$S_{sectOKA} = \frac{1}{2}R^2 x = \frac{x}{2};$$

$$S_{\Delta OAL} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |LA| = \frac{\tan x}{2};$$

(ΔOAL järeldub, et $|LA| = \tan x$)

Arvestades leitud tulemusi, kirjutame valemi (1) kujul

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}.$$

Korrutame võrratus 2-ga. Saame

$$\sin x < x < \tan x.$$

Kui $x \to 0+$, siis $\sin x > 0, x > 0, \tan x > 0$. Seega

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}.$$

Korrutame $\sin x$-ga

$$\frac{\sin x}{\tan x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Leiame parempoolsed piirväärtused:

$$\lim_{x\to 0+} \cos x \le \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$1 \le \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Leiame vasakpoolne piirväärtus:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \begin{bmatrix} muutuja\ vahetus \\ u = -x \\ x = -u \\ u \to 0+ \\ x \to 0- \end{bmatrix} = \lim_{u\to 0+} \frac{\sin(-u)}{-u} = \lim_{u\to 0+} \frac{-\sin u}{-u} = \lim_{u\to 0+} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Parem ja vasakpoolsed piirväärtused eksisteerivad, need on samaväärsed ja 1-ga võrdsed. Siit järeldub, et piirväärtus on 1-ga võrdne.

Näide 1: Arvutada piirväärtus $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{5x}$.

Lahendus:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{7 \sin 7x}{5\cdot 7x} = \frac{7}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{5}.$$

Näide 2: Arvuta $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{\tan 11x}$.

Lahenduskäik:

Kirjutame $\frac{\sin 6x}{\tan 11x} = \frac{\sin 6x}{\frac{\sin 11x}{\cos 11x}} = \frac{\cos 11x \cdot \sin 6x}{\sin 11x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\tan 11x} = \frac{6}{11}\lim_{x\to 0}\cos 11x \cdot \frac{11x}{\sin 11x}\cdot\frac{\sin 6x}{6x} = \frac{6}{11}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 11x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{11x}{\sin 11x} = \frac{6}{11}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{6}{11}$$

Järeldused

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$
2) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1$
4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Ülesanded:

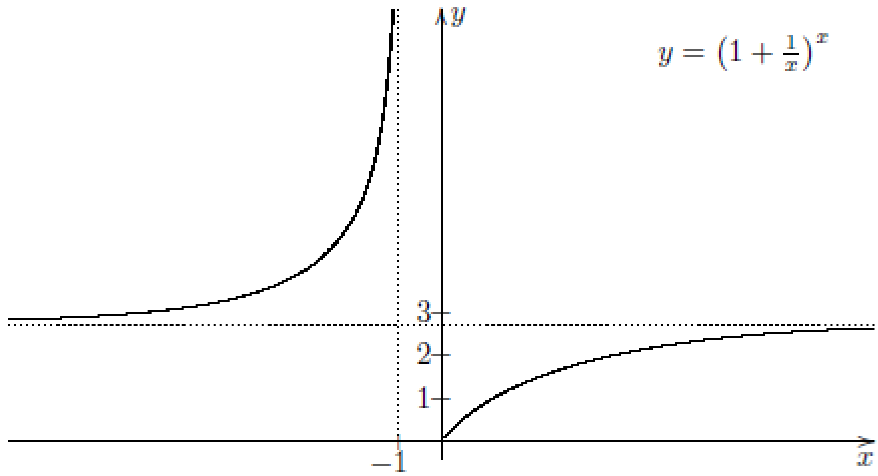
1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + \sin 3x}{2x}$
2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - \sin x}{3x}$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$
4) $\lim_{x\to 0}\frac{10x - 3\sin x}{x}$
5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

Teine klassikaline piirväärtus

Definitsioon 2: Teine klassikaline piirväärtus $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Teoreem 4: Teine klassikaline piirväärtus on e.

Tõestus: Vaatleme järgmist funktsiooni: f(x) $=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Selle funktsiooni loomulik määramispiirkond on X= (- ∞;-1)∪(0;∞). Graafik on järgmine



Jooniselt näeme, et $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 0$. Peale selle, kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$, läheneb funktsioon $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ teatud arvule, mis asub 2 ja 3 vahel. Tegemist on irratsionaalarvuga e:

$$e = 2.71828\ldots$$

Seega

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$