3 MATRICE I DETERMINANTE

SAŽETAK:

U ovom poglavlju uvodi se pojam matrice. Najprije se definiraju neke operacije s matricama, a zatim determinanta kvadratne matrice i inverzna matrica regularne matrice. Nakon toga je pokazano kako se rješavaju matrične jednadžbe te kako se sustav linearnih jednadžbi može rješavati pomoću matrica. Svaka tema je detaljno obrađena, a uz nekoliko riješenih primjera, sadrži i zadatke za vježbu. Na kraju poglavlja je kviz za provjeru znanja.

Za provjeru dobivenih rješenja ili brže računanje (ukoliko se ne traži postupak rješavanja zadatka) mogu poslužiti dodatne aplikacije u MATLAB-u, Excelu i Geogebri.

Cilj:

Naučiti odrediti determinantu, inverznu matricu i kako riješiti sustav linearnih jednadžbi pomoću matrica.

Prethodna znanja iz matematike:

Student treba znati osnovne računske operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) s realnim brojevima.

Ishodi učenja:

1. Znati kako i kada su definirane računske operacije s matricama.
2. Odrediti determinantu koristeći osnovna svojstva determinante.
3. Odrediti inverznu matricu primjenom Gauss-Jordanove metode.
4. Riješiti linearni sustav pomoću matrica.

Primjena:

- u geometriji
- u obradi digitalne fotografije
- model preferencija potrošača
- kodiranje i dekodiranje poruka u kriptografiji
- analiza ekonomskog sustava
- regresijski pravac s najmanjim kvadratnim odstupanjem od zadanog skupa podataka
- problem transporta i distribucije
- problem trgovačkog putnika

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

SADRŽAJ

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

3.1 Matrica

Pravokutna tablica brojeva koji su raspoređeni u m redaka i n stupaca zove se matrica tipa (dimenzije) $m\times n$. Svaku matricu ćemo označavati velikim slovom, a brojeve (njene elemente) ćemo smještati unutar uglatih zagrada. Ako su svi elementi matrice realni brojevi, kazat ćemo da je takva matrica realna. Ako je bar jedan element kompleksan broj, onda govorimo o kompleksnoj matrici. Element matrice označavat ćemo odgovarajućim malim slovom sa 2 indeksa pri čemu prvi indeks označava redni broj retka u kojem se nalazi element, a drugi indeks označava redni broj stupca u kojem se nalazi element.

Npr.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ je realna matrica tipa 2×3 čiji su elementi

$a_{11}=1,\quad a_{12}=4,\quad a_{13}=7,$

$a_{21}=3,\quad a_{22}=-1,\quad a_{23}=-5.$

Primjeri nekih posebnih tipova matrica

- nul-matrica je matrica čiji su svi elementi jednaki nuli; takvu matricu označavat ćemo s O;

tako je npr. $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nul-matrica tipa 4×2;

- kvadratna matrica je svaka matrica koja ima isti broj redaka i stupaca; ako kvadratna matrica ima 2 retka i 2 stupca, onda kratko kažemo da je to (kvadratna) matrica drugog reda;

npr. kažemo da je

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

matrica trećeg reda ili matrica reda 3;

elementi $a_{11},\ a_{22},\dots,a_{nn}$ čine glavnu dijagonalu (kvadratne) matrice reda n;

tako u prethodnom primjeru elementi $1,\ 6,\ -3$ čine glavnu dijagonalu matrice A;

- jedinična matrica je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici, dok su svi ostali elementi jednaki nuli; takvu matricu označavat ćemo s I_n, gdje je n red te matrice;

tako je npr. $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jedinična matrica četvrtog reda;

- gornjetrokutasta matrica je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli;

- donjetrokutasta matrica je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Primijetimo da je svaka jedinična matrica ujedno i gornjetrokutasta i donjetrokutasta matrica.

Transponiranu matricu A^T matrice A dobivamo tako da retke matrice A zamijenimo njenim stupcima (i obratno).

Prvi stupac u matrici A će postati prvi redak u matrici A^T, drugi stupac u matrici A će postati drugi redak u matrici A^T, itd.

Npr. za $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ je $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix}$.

Kažemo da su matrice A i B jednake i pišemo $A = B$ ako su istog tipa i ako na istim pozicijama imaju jednake elemente.

3.1.1 Primjeri riješenih zadataka

Odredite tip zadane matrice i traženi element:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$; a_{14}

Rješenje: A ima 1 redak i 4 stupca pa je A tipa 1×4; $a_{14} = 0$.

2. $C=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 8 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, c_{31}

Rješenje: C ima 4 retka i 1 stupac pa je C tipa 4×1; $c_{31}=-2.$

3. $B=\begin{bmatrix} x & y & w & e \\ z & 0 & 3 & t+1 \end{bmatrix}$; b_{23}

Rješenje: B je tipa 2×4; $b_{23}=3.$

4. $D=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$; d_{1r} $\left(\text{za svaki } r\in\{1,2,\ldots,n\}\right)$

Rješenje: D je tipa $1\times n$; $d_{1r}=u_r$

5. Nađite x, y, z i w ako vrijedi

$$\begin{bmatrix} x+y & x+z \\ y+z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

Matrice $A=\begin{bmatrix} x+y & x+z \\ y+z & w \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ su jednake samo ako na istim pozicijama imaju jednake elemente. Dakle, mora biti

$$\begin{aligned} x+y&=3 \\ x+z&=4 \\ y+z&=5 \\ w&=4. \end{aligned}$$

Zbrajanjem prvih triju jednadžbi dobiva se

$$\begin{aligned} 2x+2y+2z&=3+4+5 \\ 2(x+y+z)&=12 \\ x+y+z&=6, \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} x&=6-(y+z)=6-5=1, \\ y&=6-(x+z)=6-4=2, \\ z&=6-(x+y)=6-3=3. \end{aligned}$$

Dakle, $x=1,\ y=2,\ z=3,\ w=4.$

3.2 Aritmetika matrica

3.2.1 Zbrajanje matrica

Zbrajati se mogu samo matrice istog tipa.

Ako su A i B matrice tipa $m\times n$, onda je i $C=A+B$ tipa $m\times n$. Element c_{ij} matrice C određujemo po formuli

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Dakle, zbrajaju se elementi na istim pozicijama.

Primjer 1

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 7\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix};$$

$$C=A+B=\begin{bmatrix}2+1 & 3+3 & 7+4\\ 1+2 & 0+(-1) & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 11\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

3.2.2 Množenje matrice s brojem

Matrica se množi brojem tako da se svaki element matrice pomnoži tim brojem.

Primjer 2

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 7\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \lambda=\frac{1}{2};$$

$$D=\lambda A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 3 & 7\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\cdot 2 & \frac{1}{2}\cdot 3 & \frac{1}{2}\cdot 7\\ \frac{1}{2}\cdot 1 & \frac{1}{2}\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Definiramo još

$$-A=(-1)\cdot A.$$

3.2.3 Oduzimanje matrica

Oduzimati se mogu samo matrice istog tipa.

$E = A - B = A + (-B) = A + (-1) \cdot B.$

Primjer 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$E = A - B = A + (-1) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 3+(-3) & 7+(-4) \\ 1+(-2) & 0+1 & 1+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-3 & 7-4 \\ 1-2 & 0-(-1) & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2.4 Množenje matrica

Množiti se mogu samo tzv. ulančane matrice.

Umnožak $F = A \cdot B$ matrica A i B postoji samo ako je broj redaka matrice B jednak broju stupaca matrice A. Za takve matrice A i B kažemo da su ulančane.

Ako je A matrica tipa $m \times n$ i B matrica tipa $n \times k$, onda je $F = A \cdot B$ matrica tipa $m \times k$ i vrijedi

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Primjer 4

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$F = A \cdot B = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 13 & 20 \\ 12 & 23 & 3 & 28 \\ -8 & 13 & -19 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$f_{12} = \sum_{l=1}^{2} a_{1l} b_{l2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} = 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 11;$$
$$f_{23} = \sum_{l=1}^{2} a_{2l} b_{l3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} = 7 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = 3;$$
$$f_{31} = \sum_{l=1}^{2} a_{3l} b_{l1} = a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} = 1 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 = -8;$$

Primjer 5

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \left[3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot(-3) \right] = [-4];$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ -9 & -12 & -15 \end{bmatrix};$$

Dva najvažnija svojstva množenja matrica:

a) Množenje matrica je asocijativno, tj. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ čim su svi produkti definirani.

b) Množenje matrica općenito nije komutativno, tj. ako postoje produkti $A\cdot B$ i $B\cdot A$ matrica A i B, onda $A\cdot B$ ne mora biti (i najčešće nije) jednako $B\cdot A$.

Može se čak dogoditi da jedan od tih produkata postoji, a drugi ne. U primjeru 3 ne postoji produkt $B\cdot A$. U primjeru 4 postoje oba produkta koji su očito različiti jer smo dobili matrice različitog tipa.

Matrični polinom

Ako je A bilo koja kvadratna matrica reda n i $P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$ polinom stupnja m, onda definiramo $P_m(A)$ sa

$$P_m(A) = a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + a_2 \cdot A^2 + \cdots + a_m \cdot A^m,$$

gdje je

$$\begin{aligned} A_0 &= I_n, \\ A^1 &= A, \\ A^2 &= A\cdot A, \\ A^3 &= A^2 \cdot A \overset{\text{a)}}{=} A\cdot A^2, \\ &\vdots \\ A^m &= A^{m-1}\cdot A \overset{\text{a)}}{=} A\cdot A^{m-1}. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $P_m(A)$ također kvadratna matrica, i to istog reda kao matrica A.

Primjer 6

Ako je $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ i $P_3(x)=3x^3+2x^2+2x+3$, odredimo $P_3(A)$.

Rješenje:

$$P_3(A)=3A^3+2A^2+2A+3I_2,$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$P_3(A)=3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=4I_2.$$

Primjer 7

Zadan je polinom $P_3(x)=x^3-x^2-2x$ i matrica $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Dokažite da je $P_3(A)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$P_3(A)=A^3-A^2-2A,$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -6 & -2\\ -4 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

$$P_3(A)=\begin{bmatrix}5 & -6 & -2\\ -4 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Primjer 8

Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0.25 & 1\\ 0 & -0.5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Izračunajte:

a) $A+B$ b) $A-C$ c) $A+B-C$ d) $12B$
e) $2A-C$ f) $2A+0.5C$ g) $2A^T$ h) A^T+3C^T.

Rješenje:

a) $A+B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.25 & 1\\ 0 & -0.5\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+0.25 & 1+1\\ -1+0 & 0+(-0.5)\\ 1+1 & -2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25 & 2\\ -1 & -0.5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

b) $A-C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-(-1) & 1-1\\ -1-(-1) & 0-(-1)\\ 1-1 & -2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

c) $A+B-C=(A+B)-C=\begin{bmatrix}0.25 & 2\\ -1 & -0.5\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.25 & 1\\ 0 & 0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

d) $12B=12\begin{bmatrix}0.25 & 1\\ 0 & -0.5\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\cdot 0.25 & 12\cdot 1\\ 12\cdot 0 & 12\cdot(-0.5)\\ 12\cdot 1 & 12\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 12\\ 0 & -6\\ 12 & 36\end{bmatrix}$

e) $2A-C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix}$

f) $2A+0.5C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.5 & 0.5\\ -0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5 & 2.5\\ -2.5 & -0.5\\ 2.5 & -3.5\end{bmatrix}$

g) $2A^T=2\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}$

h) $A^T+3C^T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 4\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$.

Primjer 9

Odredite matricu $F=AB$ ako

a) $A=\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 5 & 2\\ -1 & 8 & 1\end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 8 & 0\end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$.

Rješenje:

a) Matrica F nije definirana (tj. ne postoji) jer broj redaka matrice B nije jednak broju stupaca matrice A. Naime, matrica B ima 1 redak, a matrica A 2 stupca.

b) $F=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13}\end{bmatrix}$, tj. F je matrica tipa 1×3 jer je A matrica tipa 1×4, a B matrica tipa 4×3;

$$f_{11}=\sum_{l=1}^{4} a_{1l}b_{l1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}=-1\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot(-1)=0,$$

$$f_{12}=\sum_{l=1}^{4} a_{1l}b_{l2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}=-1\cdot 2+1\cdot(-1)+2\cdot 5+3\cdot 8=31,$$

$$f_{13}=\sum_{l=1}^{4} a_{1l}b_{l3}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}+a_{14}b_{43}=-1\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot 1=7.$$

Dakle, $F=\begin{bmatrix}0 & 31 & 7\end{bmatrix}$.

c) $F=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\end{bmatrix}$, tj. F je matrica tipa 2×3 jer je A matrica tipa 2×3, a B matrica tipa 3×3;

$$f_{11}=\sum_{l=1}^{3}a_{1l}b_{l1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 4=4,$$

$$f_{12}=\sum_{l=1}^{3}a_{1l}b_{l2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 8=9,$$

$$f_{13}=\sum_{l=1}^{3}a_{1l}b_{l3}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}=1\cdot(-1)+0\cdot 1+1\cdot 0=-1,$$

$$f_{21}=\sum_{l=1}^{3}a_{2l}b_{l1}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=-1\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 4=9,$$

$$f_{22}=\sum_{l=1}^{3}a_{2l}b_{l2}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}=-1\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 8=15,$$

$$f_{23}=\sum_{l=1}^{3}a_{2l}b_{l3}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}=-1\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 0=2.$$

Dakle, $F=\begin{bmatrix}4 & 9 & -1\\ 9 & 15 & 2\end{bmatrix}$.

d) $F=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33}\end{bmatrix}$. Naime, A i B su matrice (istog) tipa 3×3;

npr.

$$f_{12}=\sum_{l=1}^{3}a_{1l}b_{l2}=1\cdot(-1)+0\cdot 1+1\cdot 4=3,$$

$$f_{23}=\sum_{l=1}^{3}a_{2l}b_{l3}=2\cdot 4+(-2)\cdot 0+1\cdot 1=9,$$

$$f_{31}=\sum_{l=1}^{3}a_{3l}b_{l1}=0\cdot 1+0\cdot 1+(-1)\cdot 0=0.$$

Slično se odrede preostali elementi matrice F. Dobiva se

$$F=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 9\\ 0 & -4 & -1\end{bmatrix}.$$

3.3 Determinanta kvadratne matrice

Neka je $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ kvadratna matrica reda n.

Toj matrici može se pridružiti broj kojeg označavamo s $\det A$ ili $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

i nazivamo ga ***determinantom*** matrice A.

Ako je $A=[a_{11}]$, onda je $\det A = a_{11}$.

Ako je $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, onda je $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Determinanta matrice reda $n \geq 3$

Minora elementa a_{ij} kvadratne matrice A je determinanta matrice koju dobijemo iz matrice A brisanjem njenog $i-$tog retka i $j-$ tog stupca. Dakle, to je broj kojeg označavamo s M_{ij}.

Tako je za $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

$$M_{11}=-4,\ M_{12}=2,\ M_{21}=1,\ M_{22}=3.$$

Za $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ je

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=56,\ M_{12}=\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}=40,\ M_{13}=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=2,\ M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=-4,\ldots$$

Algebarski komplement ili kofaktor elementa a_{ij} kvadratne matrice A označavamo s A_{ij}. To je broj definiran formulom:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Za $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ je

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 56,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -40,\ M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 4, \ldots$$

Laplaceov razvoj determinante

Za kvadratnu matricu $A = \left[a_{ij}\right]$ reda $n \geq 2$ vrijede formule

$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ (Laplaceov razvoj determinante po $i-$tom retku)

$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ (Laplaceov razvoj determinante po $j-$tom stupcu).

Primjer 10

Odredimo $\det A$ Laplaceovim razvojem po:

a) prvom retku,

b) drugom stupcu

matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Rješenje: $n = 3$;

a) $\det A = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3 \cdot 56 - 1 \cdot 40 + 2 \cdot 2 = 132$;

b)

$$\det A=\sum_{k=1}^{3}a_{k2}A_{k2}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&0\\4&8\end{vmatrix}+7\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&2\\4&8\end{vmatrix}+6\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&2\\5&0\end{vmatrix}=-40+112+60=132.$$

Svojstva determinante:

Neka su A i B kvadratne matrice. Tada vrijedi:

1) Ako neki redak (stupac) matrice A sadrži samo nule, onda je $\det A=0.$

2) Ako matrica A ima 2 proporcionalna retka (stupca), onda je $\det A=0.$

3) Ako je neki redak (stupac) matrice A linearna kombinacija preostalih redaka (stupaca) matrice $A,$ onda je $\det A=0.$

4) Determinanta jedinične matrice jednaka je 1.

5) Ako je A trokutasta ili dijagonalna matrica, onda je njena determinanta jednaka umnošku elemenata njene glavne dijagonale.

6) Ako nekom retku (stupcu) matrice A dodamo elemente nekog drugog retka (stupca) matrice A pomnožene nekim brojem, $\det A$ se ne mijenja.

7) Zamjenom mjesta dvaju redaka (stupaca) matrice $A,$ $\det A$ mijenja predznak.

8) Ako elemente nekog retka (stupca) matrice A pomnožimo brojem $\lambda,$ dobivamo kvadratnu matricu C s determinantom

$$\det C=\lambda\cdot\det A.$$

9) $\det A=\det A^T.$

10) $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B.$

Primjer 11

Koristeći svojstva determinante izračunajmo $\det A,$ ako je $A=\begin{bmatrix}5&4&5&4\\1&2&1&4\\2&3&5&4\\0&2&1&1\end{bmatrix}.$

Rješenje:

Prvi način (Laplaceovim razvojem po prvom stupcu):

$$\det A=\begin{vmatrix}5&4&5&4\\1&2&1&4\\2&3&5&4\\0&2&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}R_1-5R_2\\ \\R_3-2R_2\\ \\\end{matrix}\overset{6)}{=}\begin{vmatrix}0&-6&0&-16\\1&2&1&4\\0&-1&3&-4\\0&2&1&1\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{4}a_{k1}A_{k1}=a_{21}A_{21}=$$

$$=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-6&0&-16\\-1&3&-4\\2&1&1\end{vmatrix}R_2-3R_3\overset{6)}{=}-\begin{vmatrix}-6&0&-16\\-7&0&-7\\2&1&1\end{vmatrix}=-\sum_{k=1}^{3}a_{k2}A_{k2}=-a_{32}A_{32}=$$

$$=-1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-6&-16\\-7&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&-16\\-7&-7\end{vmatrix}\overset{8)}{=}-7\begin{vmatrix}-6&-16\\1&1\end{vmatrix}\overset{8)}{=}14\begin{vmatrix}3&8\\1&1\end{vmatrix}=14(3-8)=-70.$$

Drugi način (Laplaceovim razvojem po četvrtom retku):

$$\det A=\begin{vmatrix}5&4&5&4\\1&2&1&4\\2&3&5&4\\0&2&1&1\end{vmatrix}\overset{6)}{=}\begin{vmatrix}5&-6&5&-1\\1&0&1&3\\2&-7&5&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{4}a_{4k}A_{4k}=a_{43}A_{43}=1\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}5&-6&-1\\1&0&3\\2&-7&-1\end{vmatrix}\overset{6)}{=}$$

$$\overset{6)}{=}-\begin{vmatrix}5&-6&-16\\1&0&0\\2&-7&-7\end{vmatrix}=-\sum_{k=1}^{3}a_{2k}A_{2k}=-a_{21}A_{21}=-1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-6&-16\\-7&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&-16\\-7&-7\end{vmatrix}=-70.$$

3.4 Inverzna matrica

Neka je A kvadratna matrica reda n. Kažemo da je A regularna matrica ako je $\det A\neq 0$.

Matrica A je singularna ako je $\det A=0$.

Samo regularne matrice imaju inverznu matricu.

Za regularnu matricu A reda n postoji jedinstvena matrica B takva da je

$$A\cdot B=B\cdot A=I_n,$$

gdje je I_n jedinična matrica reda n. Matrica B je također regularna matrica reda n, označavamo je s A^{-1} i nazivamo ***inverznom*** matricom matrice A.

Određivanje inverzne matrice računanjem determinanti

Inverzna matrica A^{-1} regularne matrice A reda n može se odrediti po formuli

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gdje je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij} matrice A.

Ta formula se obično primjenjuje samo za male n $(n=2 \text{ i } n=3)$ jer je za određivanje A^{-1} potrebno izračunati čak n^2 determinanti matrica reda $n-1$.

Primjer 12

Odredimo inverznu matricu matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ računanjem determinanti.

Rješenje:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}=\frac{1}{1\cdot 4-3\cdot 2}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\cdot 4 & (-1)^{2+1}\cdot 2 \\ (-1)^{1+2}\cdot 3 & (-1)^{2+2}\cdot 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Primjer 13

Istom metodom nađimo inverznu matricu matrice $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix};$$

$$\det A = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot 1=1,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\cdot(-1)=1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(1+1)=2,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\cdot 0=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)=-2,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\cdot 2=-2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot 0=0,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=-1\cdot 0=0,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)=-2$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.4.1 Određivanje inverzne matrice Gauss-Jordanovom metodom

Elementarne transformacije (na recima, odnosno stupcima) matrice su:

a) zamjena mjesta bilo koja dva retka (stupca),

b) množenje bilo kojeg retka (stupca) brojem različitim od nule,

c) dodavanje bilo kojeg retka (stupca) nekom drugom retku (stupcu).

Ako je A regularna matrica reda $n>3$, A^{-1} često tražimo Gauss-Jordanovom metodom:

1) formiramo matricu $\overline{A}=\left[A|I_n\right]$ tipa $n\times 2n$,

2) elementarnim transformacijama isključivo na recima, matricu $\overline{A}$ transformiramo u matricu $\left[I_n|B\right]$.

Tada je $A^{-1}=B$.

Primjer 1: Treba naći inverznu matricu matrice $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

$$\overline{A}=\left[A|I_4\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1-R_2\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&-1&0&1&-1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1+R_3\\R_2-R_3\\ \\ \\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&1&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1&-1&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1-R_4\\R_2+R_4\\R_3-R_4\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&1&-1\\0&1&0&0&0&1&-1&1\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]=\left[I_4|B\right]\Rightarrow A^{-1}=B=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Primjer 14

Nađimo inverznu matricu matrice $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ primjenom

Gauss-Jordanove metode.

$$\overline{A}=\left[A\middle|I_4\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}5&4&5&4&1&0&0&0\\1&2&1&4&0&1&0&0\\2&3&5&4&0&0&1&0\\0&2&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}R_2\\R_1\\ \\ \\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&1&4&0&1&0&0\\5&4&5&4&1&0&0&0\\2&3&5&4&0&0&1&0\\0&2&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\R_2-5R_1\\R_3-2R_1\\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&1&4&0&1&0&0\\0&-6&0&-16&1&-5&0&0\\0&-1&3&-4&0&-2&1&0\\0&2&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\R_3\\R_2\\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&1&4&0&1&0&0\\0&-1&3&-4&0&-2&1&0\\0&-6&0&-16&1&-5&0&0\\0&2&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\-R_2\\-R_3\\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&1&4&0&1&0&0\\0&1&-3&4&0&2&-1&0\\0&6&0&16&-1&5&0&0\\0&2&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1-2R_2\\ \\R_3-6R_2\\R_4-2R_2\end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&7&-4&0&-3&2&0\\0&1&-3&4&0&2&-1&0\\0&0&18&-8&-1&-7&6&0\\0&0&7&-7&0&-4&2&1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\2R_3\\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&7&-4&0&-3&2&0\\0&1&-3&4&0&2&-1&0\\0&0&36&-16&-2&-14&12&0\\0&0&7&-7&0&-4&2&1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\R_3-5R_4\\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&7&-4&0&-3&2&0\\0&1&-3&4&0&2&-1&0\\0&0&1&19&-2&6&2&-5\\0&0&7&-7&0&-4&2&1\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1-7R_3\\R_2+3R_3\\ \\R_4-7R_3\end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-137&14&-45&-12&35\\0&1&0&61&-6&20&5&-15\\0&0&1&19&-2&6&2&-5\\0&0&0&-140&14&-46&-12&36\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\-R_4/140\end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-137&14&-45&-12&35\\0&1&0&61&-6&20&5&-15\\0&0&1&19&-2&6&2&-5\\0&0&0&1&-7/70&23/70&6/70&-18/70\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1+137R_4\\R_2-61R_4\\R_3-19R_4\\ \end{array}\sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 21/70 & 1/70 & -18/70 & -16/70 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7/70 & -3/70 & -16/70 & 48/70 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/70 & -17/70 & 26/70 & -8/70 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/70 & 23/70 & 6/70 & -18/70 \end{array}\right] = \left[I_4 \middle| B\right]$$

pa je

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 21/70 & 1/70 & -18/70 & -16/70 \\ 7/70 & -3/70 & -16/70 & 48/70 \\ -7/70 & -17/70 & 26/70 & -8/70 \\ -7/70 & 23/70 & 6/70 & -18/70 \end{bmatrix} = \frac{1}{-70}\begin{bmatrix} -21 & -1 & 18 & 16 \\ -7 & 3 & 16 & -48 \\ 7 & 17 & -26 & 8 \\ 7 & -23 & -6 & 18 \end{bmatrix}.$$

3.5 Matrične jednadžbe

- su jednadžbe u kojima se pojavljuju matrice pri čemu je bar jedna od njih nepoznata.

Da bismo riješili takvu jednadžbu trebamo naći sve matrice za koje vrijedi ta jednadžba.

Zanima nas kako riješiti jednadžbe

$AX = B$ i $YA = B$

u kojima su A i B poznate, a X i Y nepoznate matrice?

Pretpostavimo da je A regularna.

Tada postoji A^{-1} pa množenjem prve jednadžbe slijeva s A^{-1} dobivamo

$$A^{-1}\cdot / \, AX = B$$
$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B.$$

Množenjem druge jednadžbe zdesna s A^{-1} dobivamo

$$YA = B / \cdot A^{-1}$$
$$(YA)A^{-1} = BA^{-1}$$
$$Y(AA^{-1}) = BA^{-1}$$
$$YI = BA^{-1}$$
$$Y = BA^{-1}.$$

Primijetimo da općenito ne mora biti $X = Y$ jer množenje matrica općenito nije komutativno.

Primjer 15

Riješimo jednadžbu $AX - B = A^2X - I$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -85 & -100 \\ -186 & -215 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
&AX - B = A^2X - I\\
&AX - A^2X = B - I\\
&\left(A - A^2\right)^{-1} \cdot / \left(A - A^2\right)X = B - I\\
&IX = \left(A - A^2\right)^{-1}\left(B - I\right)\\
&X = \left(A - A^2\right)^{-1}\left(B - I\right)
\end{aligned}$$

ako je $A - A^2$ regularna matrica.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \qquad A - A^2 = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -12 & -18 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(A - A^2\right) = 12 \neq 0$$

$$B - I = \begin{bmatrix} -86 & -100 \\ -186 & -216 \end{bmatrix} \qquad \left(A - A^2\right)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -18 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$X = \left(A - A^2\right)^{-1}\left(B - I\right) = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -18 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -86 & -100 \\ -186 & -216 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 60 & 72 \\ 84 & 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Primjer 16

Riješimo jednadžbu $AX^{-1}B + C = AX^{-1}$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

Može se pokazati da za regularne ulančane matrice A i B vrijedi: $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$$\begin{aligned}
&A^{-1} \cdot / AX^{-1}B + C = AX^{-1}\\
&\underbrace{\left(A^{-1}A\right)}_{=I}X^{-1}B + A^{-1}C = \underbrace{\left(A^{-1}A\right)}_{=I}X^{-1}\\
&X \cdot / X^{-1}B + A^{-1}C = X^{-1}\\
&\underbrace{\left(XX^{-1}\right)}_{=I}B + X\left(A^{-1}C\right) = \underbrace{XX^{-1}}_{=I}\\
&B + X\left(A^{-1}C\right) = I\\
&X\left(A^{-1}C\right) = I - B / \cdot \left(A^{-1}C\right)^{-1}\\
&X = \left(I - B\right)\left(A^{-1}C\right)^{-1} = \left(I - B\right)C^{-1}A
\end{aligned}$$

ako je matrica X regularna. (Naime, lako je vidjeti da su matrice A i C regularne.)

$$I-B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X=(I-B)C^{-1}A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -6 & 7 & -14 \\ -4 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Jednadžbe oblika $AX+XB=C$ nije moguće riješiti pomoću inverzne matrice. Nepoznata matrica X se nalazi matrici A zdesna, a matrici B slijeva. Kako množenje matrica općenito nije komutativno, na lijevoj strani jednadžbe nije moguće izlučiti, kao zajednički faktor, matricu X. Naime,

$$AX+XB \neq AX+BX=(A+B)X,$$
$$AX+XB \neq XA+XB=X(A+B).$$

Nije teško vidjeti da jednadžba $AX+XB=C$ ima smisla samo ako su sve matrice koje se u njoj pojavljuju kvadratne. Dakle, znamo da je red matrice X jednak redu matrice A.

Kako riješiti takvu jednadžbu pokazat ćemo na sljedećem primjeru.

Primjer 17

Treba riješiti jednadžbu $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}X+X\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Znamo da je X matrica drugog reda, tj. $X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$. Matricu X s nepoznatim elementima uvrštavamo u zadanu jednadžbu pa dobivamo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x_{11}+x_{21} & 4x_{12}+x_{22} \\ -3x_{11}+2x_{21} & -3x_{12}+2x_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_{11}+5x_{12} & 3x_{11}+7x_{12} \\ x_{21}+5x_{22} & 3x_{21}+7x_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5x_{11}+5x_{12}+x_{21} & 3x_{11}+11x_{12}+x_{22} \\ -3x_{11}+3x_{21}+5x_{22} & -3x_{12}+3x_{21}+9x_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}.$$

Dvije matrice istog tipa mogu biti jednake samo ako su im elementi koji se nalaze na istim pozicijama u matricama jednaki. Dakle, mora biti

$$\begin{aligned}
5x_{11}+5x_{12}+x_{21}&=-4\\
3x_{11}+11x_{12}+x_{22}&=-1\\
-3x_{11}+3x_{21}+5x_{22}&=16\\
-3x_{12}+3x_{21}+9x_{22}&=21.
\end{aligned}$$

Dobili smo sustav linearnih jednadžbi kojeg lako rješavamo.

Iz 1. jednadžbe: $x_{21}=-4-5x_{11}-5x_{12}$.

Iz 2. jednadžbe: $x_{22}=-1-3x_{11}-11x_{12}$.

Uvrštavanjem u 3. i 4. jednadžbu, dobivamo:

$$\begin{aligned}
-3x_{11}+3\left(-4-5x_{11}-5x_{12}\right)+5\left(-1-3x_{11}-11x_{12}\right)&=16\\
-3x_{12}+3\left(-4-5x_{11}-5x_{12}\right)+9\left(-1-3x_{11}-11x_{12}\right)&=21
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
-33x_{11}-70x_{12}&=33\\
-42x_{11}-117x_{12}&=42
\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_{11}=-1,\ x_{12}=0$$

$$\begin{aligned}
x_{21}&=-4-5x_{11}-5x_{12}=-4-5\cdot(-1)-5\cdot 0=1\\
x_{22}&=-1-3x_{11}-11x_{12}=-1-3\cdot(-1)-11\cdot 0=2.
\end{aligned}$$

Prema tome, matrica $X=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ je (jedino) rješenje zadane jednadžbe.

Slično kao jednadžba u primjeru 3 rješavaju se jednadžbe oblika $AX=B$ i $YA=B$ s nepoznanicama X i Y u kojima matrica A nije regularna ili nije kvadratna.

3.6 Rang matrice

Jednostupčana matrica naziva se još i vektor stupac (ili kraće, vektor).

Jednoredna matrica naziva se još i vektor redak.

Npr. vektor

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

je vektor dimenzije 3 jer ima 3 komponente; to su 1, 4 i 7.

Vektor S je nul-vektor ako su mu sve komponente jednake nuli.

Analogno se definira nul-vektor redak.

Nul-vektor redak (stupac) ćemo označavati s O.

Nenul-vektor redak (stupac) je vektor redak (stupac) kojemu je bar jedna komponenta različita od nule.

Uzmemo li npr. matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, onda se ona može napisati u obliku

$A = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}$, gdje su $S_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ i $S_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektori stupci,

odnosno u obliku

$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$, gdje su $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $R_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $R_3 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ vektori reci.

Linearna kombinacija vektora istih dimenzija $S_1, S_2, \ldots, S_n$ je svaki

vektor S definiran formulom

$$S = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_n S_n,$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bilo koji realni brojevi.

Analogno se definira linearna kombinacija vektora redaka.

Primijetimo da iz $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ slijedi $S = O$.

Obrat ne mora vrijediti, tj. ako je $S = O$, onda ne mora nužno biti

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Kažemo da je skup vektora istih dimenzija $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ***linearno nezavisan***, odnosno da su vektori $S_1, S_2, \ldots, S_n$ linearno nezavisni,

ako iz $S = O$ nužno slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Kažemo da je skup vektora istih dimenzija $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ***linearno zavisan*** ako nije linearno nezavisan, tj. ako iz $S = O$ ne slijedi nužno da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, već da bar jedan od brojeva $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ može biti različit od nule.

Ako je $S = O$ i npr. $\alpha_1 \neq 0$, onda je

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_n S_n = O \Leftrightarrow \alpha_1 S_1 = -\alpha_2 S_2 - \ldots - \alpha_n S_n \Leftrightarrow S_1 = \beta_2 S_2 + \ldots + \beta_n S_n,$$

gdje su $\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}$ dobro definirani brojevi jer je $\alpha_1 \neq 0$.

Vidimo da smo vektor S_1 napisali u obliku linearne kombinacije vektora $S_2, \ldots, S_n$.

Zaključujemo da je skup vektora istih dimenzija $S_1, S_2, \ldots, S_n$ linearno zavisan ako i samo ako se bar jedan od tih vektora može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora tog skupa.

Teorem:

U svakoj matrici A maksimalan broj linearno nezavisnih (vektora) stupaca jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih (vektora) redaka. Taj broj nazivamo rangom matrice A i označavamo s $r(A)$.

Rang matrice se ne mijenja ako se na matrici izvode elementarne transformacije.

Za dvije matrice istog tipa A i B kažemo da su ekvivalentne i pišemo $A \sim B$ ako se jedna iz druge može dobiti primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija.
Dakle, ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Rang matrice A određujemo Gaussovom metodom – zadanu matricu pomoću elementarnih transformacija transformiramo u ekvivalentnu matricu kod koje su svi elementi ispod dijagonale određene elementima $a_{11}, a_{22}, \dots$ jednaki nuli.

Primijetimo da takvim postupkom kvadratne matrice transformiramo na gornjetrokutaste matrice.

Pri tome vodimo računa o sljedećem:

1) Ako je jedna komponenta nekog nenul-vektora retka jednaka nuli, a ista komponenta nekog drugog nenul-vektora retka različita od nule, onda su ta 2 vektora retka linearno nezavisna. Slično vrijedi i za vektore stupce.

2) Svaki nul-vektor redak smanjuje rang matrice za 1 što je očito jer je svaki skup vektora redaka koji sadrži nul-vektor redak linearno zavisan. Slično vrijedi i za vektore stupce.

Primjer 18

Odredimo rang matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix}\begin{array}{l} R_2 \\ R_1 \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ R_3+2R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 21 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ R_3-3R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A)=2.$$

$R_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $R_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $R_3=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix}$ su vektori reci dimenzije 4.

Nije teško vidjeti da je svaki od skupova $\{R_1,R_2\}$, $\{R_1,R_3\}$, $\{R_2,R_3\}$ linearno nezavisan.

Npr. R_1 i R_2 su linearno nezavisni jer je prva komponenta od R_1 broj 0, dok je prva komponenta od R_2 broj -1.
Provjerimo to koristeći definiciju linearne nezavisnosti. Treba pokazati da iz

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 = O$$

nužno slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 = O$$
$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 2\alpha_1 & 7\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_2 & 0 & 3\alpha_2 & 2\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & 7\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 7\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Dobili smo da je $r(A) = 2$ pa zaključujemo da je skup $\{R_1, R_2, R_3\}$ linearno zavisan

(jer bi u suprotnom rang matrice A bio 3, a ne 2). Provjerimo i to!

Po definiciji, treba pokazati da iz

$$\beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 + \beta_3 R_3 = O$$

ne slijedi nužno da je $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$

$$\beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 + \beta_3 R_3 = O$$
$$\beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -\beta_2 + 2\beta_3 & \beta_1 + 3\beta_3 & 2\beta_1 + 3\beta_2 & 7\beta_1 + 2\beta_2 + 17\beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\beta_2 + 2\beta_3 = 0 \\ \beta_1 + 3\beta_3 = 0 \\ 2\beta_1 + 3\beta_2 = 0 \\ 7\beta_1 + 2\beta_2 + 17\beta_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = -3\beta_3 \\ \beta_2 = 2\beta_3 \\ \beta_3 \text{ je bilo koji realni broj} \end{cases}.$$

Vidimo da za $\beta_3 = 0$ imamo $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$ Međutim, to nije jedina mogućnost.

Tako npr. $\beta_3 = 1 \Rightarrow \beta_1 = -3, \ \beta_2 = 2.$

Dakle, vrijedi:

$$-3R_1 + 2R_2 + R_3 = O \Leftrightarrow R_3 = 3R_1 - 2R_2$$

pa smo pokazali da se vektor redak R_3 može napisati u obliku linearne kombinacije vektora redaka R_1 i R_2.

Zadatak za bolje razumijevanje gradiva koje slijedi:

Pokažite da je za bilo koja tri realna broja k_1, k_2 i k_3 različita od nule i bilo koje $a, b, c \in \mathbb{R}$ gornjetrokutasta matrica $A = \begin{bmatrix} k_1 & a & b \\ 0 & k_2 & c \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ ima rang 3.

Rješenje:

$$R_1 = \begin{bmatrix} k_1 & a & b \end{bmatrix},\ R_2 = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & c \end{bmatrix},\ R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix};$$
$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 = O$$
$$\alpha_1 \begin{bmatrix} k_1 & a & b \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & k_2 & c \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & \alpha_1 a + \alpha_2 k_2 & \alpha_1 b + \alpha_2 c + \alpha_3 k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 k_1 = 0 \\ \alpha_1 a + \alpha_2 k_2 = 0 \\ \alpha_1 b + \alpha_2 c + \alpha_3 k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

To je tzv. donjetrokutasti sustav kojeg jednostavno rješavamo tako da iz prve jednadžbe odredimo α_1, pa onda iz druge α_2 i na kraju iz treće jednadžbe α_3.

Precizniji opis Gaussove metode

Pretpostavimo da treba odrediti rang matrice A tipa $m \times n$.

Ako je $a_{11} = 0$, onda pomoću elementarnih transformacija transformiramo matricu A u matricu A_1 u kojoj je $a_{11} \neq 0$. Ako takva matrica A_1 ne postoji, onda je A nulmatrica s rangom $r(A) = 0$. U suprotnom, tj. ako postoji takva matrica A_1, matricu A_1 pomoću elementarnih transformacija transformiramo u matricu A_1' u kojoj je $a_{21} = a_{31} = \ldots = a_{m1} = 0$. Ako je u matrici A_1' $a_{22} = 0$, onda pomoću elementarnih transformacija (ali ne na prvom retku ni prvom stupcu matrice A_1') transformiramo matricu A_1' u matricu A_2 u kojoj je $a_{22} \neq 0$. Ako takva matrica A_2 ne postoji, onda je $r(A) = r(A_1') = 1$. U suprotnom, matricu A_2 pomoću elementarnih transformacija (ali ne na prvom retku ni prvom stupcu matrice A_2) transformiramo u matricu

A_2' u kojoj je $a_{32} = a_{42} = \ldots = a_{m2} = 0$. Ako je u matrici A_2' $a_{33} = 0$, onda pomoću elementarnih transformacija (ali ne na prva dva retka ni prva dva stupca matrice A_2') transformiramo matricu A_2' u matricu A_3 u kojoj je $a_{33} \neq 0$. Ako takva matrica A_3 ne postoji, onda je $r(A) = r(A_2') = 2$. U suprotnom, matricu A_3 pomoću elementarnih transformacija (ali ne na prva dva retka ni prva dva stupca matrice A_3) transformiramo u matricu A_3' u kojoj je $a_{43} = a_{53} = \ldots = a_{m3} = 0$. Ako je u matrici A_3' $a_{44} = 0$, onda pomoću elementarnih transformacija (ali ne na prva tri retka ni prva tri stupca matrice A_3') transformiramo matricu A_3' u matricu A_4 u kojoj je $a_{44} \neq 0$. Ako takva matrica A_4 ne postoji, onda je $r(A) = r(A_3') = 3$. Itd.

Ponekad je zgodno na dijagonalu postavljati jedinice što se uvijek lako može postići, iako je pritom ponekad teško izbjeći računanje s razlomcima. Dakle, pomoću elementarnih transformacija na mjesto a_{11} postavimo jedinicu. Označimo elemente nove matrice isto kao i elemente matrice A. Zatim prvi redak redom pomnožimo s $-a_{21}$, $-a_{31}$, …, $-a_{m1}$ pa ga dodajemo na drugi redak, treći redak, …, $m-$ti redak. Tako dobivamo novu matricu (s istim oznakama elemenata kao u matrici A) u kojoj su svi elementi u prvom stupcu ispod elementa a_{11} jednaki nuli. Nakon toga, ni prvi redak ni prvi stupac više ne sudjeluju u elementarnim transformacijama. Onda na mjesto a_{22} postavimo jedinicu. Označimo elemente nove matrice isto kao i elemente matrice A. Zatim drugi redak redom pomnožimo s $-a_{32}$, $-a_{42}$, …, $-a_{m2}$ pa ga dodajemo na treći redak, četvrti redak, …, $m-$ ti redak. Tako dobivamo novu matricu (opet s istim oznakama elemenata kao u matrici A) u kojoj su svi elementi u prvom stupcu ispod elementa a_{11} i svi elementi u drugom stupcu ispod elementa a_{22} jednaki nuli. Nakon toga, ni prva dva retka ni prva dva stupca više ne sudjeluju u elementarnim transformacijama. Itd.

Na kraju postupka, ako A nije nulmatrica (svaka nulmatrica ima rang 0), dobivamo:

a) matricu $B = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_3 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{B_2} \end{array}\right]$, gdje je B_1 gornjetrokutasta matrica koja nema nijednu nulu na glavnoj dijagonali, a B_2 nulmatrica pa je $r(A) = r(B) = r(B_1) = \text{red od } B_1$,

ili

b) matricu $B=\begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix}$, gdje je B_1 gornjetrokutasta matrica koja nema nijednu nulu na glavnoj dijagonali, a B_2 nulmatrica pa je $r(A)=r(B)=r(B_1)=\text{red od } B_1=n$ (moguće samo kad je $m>n$),

ili

c) matricu $B=[B_1 \mid B_3]$, gdje je B_1 gornjetrokutasta matrica koja nema nijednu nulu na glavnoj dijagonali pa je $r(A)=r(B)=r(B_1)=\text{red od } B_1=m$ (moguće samo kad je $m<n$),

ili

d) gornjetrokutastu matricu B koja nema nijednu nulu na glavnoj dijagonali pa je $r(A)=r(B)=\text{red od } A=\text{red od } B=m=n$ (moguće samo kad je $m=n$).

Primijetimo da je u svakom slučaju $0\le r(A)\le \min\{m,n\}$.

Dakle, rang matrice A koja je ekvivalentna matrici B u jednom od prethodna 4 slučaja lako određujemo.

U riješenom primjeru dobili smo da je

$$A \sim \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=B} = \begin{bmatrix} B_1 \mid B_3 \\ \hline B_2 \end{bmatrix}, \text{ gdje je } B_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

pa je $r(A)=r(B)=r(B_1)=\text{red od } B_1=2$. (slučaj a)).

Tu je $A_1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix}$, $A_1'=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 21 \end{bmatrix}$.

Primjer 19

Odredimo rang matrice $A=\begin{bmatrix} 9 & 20 & 6 \\ 10 & 9 & -5 \\ 8 & 31 & 17 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$A=\begin{bmatrix}9&20&6\\10&9&-5\\8&31&17\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1-R_3\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&-11&-11\\10&9&-5\\8&31&17\end{bmatrix}\begin{matrix}\\R_2-10R_1\\R_3-8R_1\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&-11&-11\\0&119&105\\0&119&105\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\R_3-R_2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\underbrace{\begin{bmatrix}1&-11&-11\\0&119&105\\0&0&0\end{bmatrix}}_{=B}=\left[\begin{array}{c}B_1\mid B_3\\ \hline B_2\end{array}\right],$$

gdje je $B_1=\begin{bmatrix}1&-11\\0&119\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}-11\\105\end{bmatrix}$

pa je $r(A)=r(B)=r(B_1)=\text{red od } B_1=2.$

Primjer 20

Odredimo rang matrice $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&m&1\\1&m^2&m^2\end{bmatrix}$ u ovisnosti o realnom parametru m.

Rješenje:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&m&1\\1&m^2&m^2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\R_2-R_1\\R_3-R_1\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&m-1&0\\0&m^2-1&m^2-1\end{bmatrix};$$

$$m=1\Rightarrow A\sim\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{=B}=\left[\begin{array}{c}B_1\mid B_3\\ \hline B_2\end{array}\right],$$

gdje je $B_1=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$

pa je $r(A)=r(B)=r(B_1)=\text{red od } B_1=1.$

$$m \neq 1 \Rightarrow A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & (m-1)(m+1) & (m-1)(m+1) \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2/(m-1) \\ R_3/(m-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & m+1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3-(m+1)R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 \end{bmatrix};$$

$$m=-1 \Rightarrow A \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=B} = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_3 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{B_2} \end{array}\right],$$

gdje je $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

pa je $r(A) = r(B) = r(B_1) = \text{red od } B_1 = 2.$

$$m \notin \{-1,1\} \Rightarrow A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m+1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3/(m+1) \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=B} \overset{\text{d)}}{\Rightarrow} r(A) = r(B) = 3.$$

Dakle,

$$m = 1 \Rightarrow r(A) = 1,$$
$$m = -1 \Rightarrow r(A) = 2,$$
$$m \notin \{-1,1\} \Rightarrow r(A) = 3.$$

Primjer 21

Za koju vrijednost realnog parametra t je rang matrice $A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}$ jednak 3?

Rješenje:

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - tR_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 0 & 1-t^2 & 1-t & 1-t \\ 0 & 1-t & t-1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & t-1 \end{bmatrix};$$

$$t=1 \Rightarrow A \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=B} = \left[\frac{B_1 \mid B_3}{B_2}\right],$$

gdje je

$$B_1=[1],\ B_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pa je $r(A)=r(B)=r(B_1)=\text{red od } B_1=1.$

$$t \neq 1 \Rightarrow A \sim \begin{bmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 0 & (1-t)(1+t) & 1-t & 1-t \\ 0 & 1-t & -(1-t) & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & -(1-t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2/(1-t) \\ R_3/(1-t) \\ R_4/(1-t) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 0 & 1+t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_3 \\ R_2 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3-(1+t)R_2 \\ R_4-R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_4 \\ R_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+t & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4-(2+t)R_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+t \end{bmatrix};$$

$$t=-3 \Rightarrow A \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A)=3.$$

Dakle, za $t=-3$ je $r(A)=3$.

Primjer 22

dredimo rang matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

Rješenje:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2\\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1\\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5\\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ R_2-2R_1\\ R_3+2R_1\\ R_4-6R_1\\ R_5+R_1\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -9 & 14 & -6 & 1 & -5\\ 0 & 12 & -19 & 8 & -1 & 7\\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ R_3+3R_2\\ R_4-4R_2\\ R_5+R_2\end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ R_4+R_3\\ R_5-R_3\end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{=B} = \begin{bmatrix}B_1 \mid B_3\\ \hline B_2\end{bmatrix},$$

gdje je
$$B_1=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -5\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

pa je $r(A)=r(B)=r(B_1)=\text{red od } B_1=3.$

3.7 Sustavi linearnih algebarskih jednadžbi

Sustav od *m* linearnih algebarskih jednadžbi sa *n* nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (1)$$

može se napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$(2)$$

ili kraće

$$A \cdot X = B$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrica sustava; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ je **vektor nepoznanica**, a $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ **vektor slobodnih članova**.

Sustav (1) je **homogen** ako vrijedi $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0.$ Ako je bar jedan od skalara $b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ različit od nule, kažemo da je isti sustav **nehomogen**.

Svaki homogeni sustav ima bar trivijalno rješenje, tj. rješenje u kojemu je

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$

Kažemo da je rješenje X netrivijalno rješenje sustava, ako je bar jedna komponenta vektora X različita od nule.

Definiramo još i proširenu matricu sustava

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Kronecker-Capelliev teorem: Sustav (1) ima bar jedno rješenje ako i samo ako je rang matrice sustava $r(A)$ jednak rangu proširene matrice sustava $r(\tilde{A})$.

Sustav u kojemu vrijedi:

a) $m=n=r(A)=r(\tilde{A})$ $(\det A\neq 0)$ rješava se

I. Gaussovom metodom (Napomena 3),

II. pomoću inverzne matrice

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B,\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

III. Cramerovim pravilom

$$x_i=\frac{D(x_i)}{\det A},\qquad i=1,2,\dots,n,$$

gdje je $D(x_i)$ determinanta koja se iz $\det A$ dobiva tako da se njen $i-$ti stupac zamijeni sa stupcem slobodnih članova, tj.

$$D(x_i)=\left|\begin{array}{cccc:c:ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|.$$

b) $r(A)=r(\tilde{A})=r<n$ ima beskonačno mnogo rješenja i može se riješiti samo Gaussovom metodom (Napomena 3). Odabire se r linearno nezavisnih jednadžbi s r nepoznanica koje se izračunavaju u ovisnosti o $n-r$ preostalih nepoznanica (tzv. parametara).

Za takav sustav kažemo da je neodređen.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Napomena 1: Homogen sustav u kojem se broj jednadžbi podudara s brojem nepoznanica ima i netrivijalno rješenje ako i samo ako je $\det A = 0$.

Napomena 2: Ako primijenimo elementarne transformacije, ali isključivo na recima matrice $\tilde{A}$, dobivamo proširenu matricu sustava koji je ekvivalentan sustavu (1).

Lako se vidi da ekvivalentni sustavi imaju ista rješenja (ako rješenja postoje).

Napomena 3: Svaki sustav linearnih jednadžbi može se riješiti Gaussovom metodom eliminacije varijabli tako da sustav (1) svedemo na ekvivalentan sustav s gornje trokutastom matricom. Proširenje Gaussove metode je Gauss-Jordanova metoda gdje se matrica sustava svodi na jediničnu matricu iz koje izravno čitamo rješenja.

Napomena 4: Za sustav koji nema nijedno rješenje kažemo da nije suglasan ili da je nemoguć ili da je nekonzistentan. Sustav je nemoguć ako i samo ako je $r(A) \neq r(\tilde{A})$.

Tada ne postoji nijedan vektor X takav da je $A \cdot X = B$.

Primjer 23

Riješimo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

a) Cramerovim pravilom,

b) pomoću inverzne matrice,

c) Gaussovom metodom,

d) Gauss-Jordanovom metodom.

Rješenje: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right]$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$;

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$$

a)

$$D(x_1)=\begin{vmatrix}10&3&5\\3&7&4\\3&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&-1\\3&7&4\\3&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&-1\\0&5&2\\0&11&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&-1\\0&5&2\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&-1\\0&3&0\\0&1&1\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}=3\Rightarrow x_1=\frac{D(x_1)}{\det A}=3,$$

$$D(x_2)=\begin{vmatrix}2&10&5\\3&3&4\\1&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4&1\\0&-6&-2\\1&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4&1\\0&2&0\\1&3&2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4&1\\2&0\end{vmatrix}=-2$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{D(x_2)}{\det A}=-2,$$

$$D(x_3)=\begin{vmatrix}2&3&10\\3&7&3\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&4\\0&1&-6\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&4\\0&0&-2\\1&2&3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&4\\0&-2\end{vmatrix}=2$$

$$\Rightarrow x_3=\frac{D(x_3)}{\det A}=2;$$

b)

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}7&4\\2&2\end{vmatrix}=6,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3&5\\2&2\end{vmatrix}=4,\ A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3&5\\7&4\end{vmatrix}=-23,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}=-2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2&5\\3&4\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3&7\\1&2\end{vmatrix}=-1,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-1,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&7\end{vmatrix}=5,$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}6&4&-23\\-2&-1&7\\-1&-1&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\2\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=3,\ x_2=-2,\ x_3=2.$$

c)

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&5&10\\3&7&4&3\\1&2&2&3\end{array}\right]\begin{array}{l}R_3\\ \\ R_1\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&3\\3&7&4&3\\2&3&5&10\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ R_2-3R_1\\ R_3-2R_1\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&3\\0&1&-2&-6\\0&-1&1&4\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ R_3+R_2\end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&3\\0&1&-2&-6\\0&0&-1&-2\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=3\Rightarrow x_1=3-2x_2-2x_3=3+4-4=3\\ x_2-2x_3=-6\Rightarrow x_2=2x_3-6=-2\\ -x_3=-2\Rightarrow x_3=2\end{cases}$$

d)

$$\tilde{A}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&2&3\\0&1&-2&-6\\0&0&-1&-2\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1-2R_2\\ \\ -R_3\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&6&15\\0&1&-2&-6\\0&0&1&2\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1-6R_3\\ R_2+2R_3\\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_1=3,\ x_2=-2,\ x_3=2.$$

Primjer 24

Treba riješiti sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{ccccc}3x_1&+&4x_2&=&11\\4x_1&+&3x_2&=&10\end{array}$$

Cramerovim pravilom i pomoću inverzne matrice.

Rješenje: $A=\begin{bmatrix}3&4\\4&3\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}$

Pomoću Cramerovog pravila:

$$\det A=\begin{vmatrix}3&4\\4&3\end{vmatrix}=9-16=-7,$$

$$D(x_1)=\begin{vmatrix}11&4\\10&3\end{vmatrix}=33-40=-7\Rightarrow x_1=\frac{D(x_1)}{\det A}=1,$$

$$D(x_2)=\begin{vmatrix}3&11\\4&10\end{vmatrix}=30-44=-14\Rightarrow x_2=\frac{D(x_2)}{\det A}=2;$$

Pomoću inverzne matrice:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 3=3,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 4=-4,$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 4=-4,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 3=3$$
$$X=A^{-1}B=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & -4\\ -4 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}11\\ 10\end{bmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}33-40\\ -44+30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow x_1=1,\ x_2=2.$$

Primjer 25

Odredimo sva rješenja sustava

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 2\\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0\\ 7x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 4x_5 & = & 3\\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array}$$

Rješenje: Sustav je moguće riješiti samo Gaussovom metodom jer je $n>m\geq R(A)$.

$$\tilde{A}\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 3 & -3 & -3 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 7 & 5 & -5 & -5 & 4 & 3\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_4\\ \\ R_1\\ R_3 \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 4 & 3 & -3 & -3 & 3 & 2\\ 7 & 5 & -5 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ R_2-2R_1\\ R_3-4R_1\\ R_4-7R_1 \end{array}\sim$$
$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2\\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2\\ 0 & -2 & 2 & 2 & -10 & -4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ R_3-R_2\\ R_4-2R_2 \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow r(A)=r(\tilde{A})=2$$

pa sustav ima (bar jedno) rješenje.

Zadnja matrica, tj. matrica $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, je proširena matrica sustava koji ima ista rješenja kao i zadani sustav. Primijetimo da u tom sustavu zapravo imamo samo dvije jednadžbe. Naime, reci u kojima su sve nule, tj. zadnja 2 retka, predstavljaju jednadžbe koje vrijede za svaki izbor nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Dakle, promatramo samo prva 2 retka, odnosno dvije jednadžbe. S obzirom da imamo 5 nepoznanica, a dvije jednadžbe, 3 nepoznanice se mogu birati na bilo koji način (jer je 5-2=3), a preostale dvije se određuju pomoću izabrane 3. Nepoznanice koje možemo izabrati na bilo koji način nazivamo parametrima sustava i označavat ćemo ih na poseban način.

Prema tome,

broj parametara $= n - r(A) = 5 - 2 = 3;$

Neka su parametri nepoznanice x_3, x_4 i x_5. Uvodimo oznake:

$$x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta,\ x_5 = \gamma.$$

Sustav

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 5x_5 & = & -2 \end{array}$$

s pridruženom matricom $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ rješavamo počevši od kraja, tj. od druge jednadžbe.

2. jednadžba: $-x_2 + \alpha + \beta - 5\gamma = -2 \Leftrightarrow x_2 = 2 + \alpha + \beta - 5\gamma;$

1. jednadžba: $x_1 + 2 \cancel{+\alpha} \cancel{+\beta} - 5\gamma \cancel{-\alpha} \cancel{-\beta} + 2\gamma = 1 \Leftrightarrow x_1 = 3\gamma - 1.$

Sva rješenja sustava su sve uređene petorke $(3\gamma - 1, 2 + \alpha + \beta - 5\gamma, \alpha, \beta, \gamma)$, gdje su $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ proizvoljni parametri pa pišemo

$$X = \begin{bmatrix} 3\gamma - 1 \\ 2 + \alpha + \beta - 5\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Primjer 26

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 6x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 8x_4 & + & 9x_5 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

<u>Rješenje:</u>

Sustav u kojem **svaka** jednadžba na desnoj strani jednakosti ima nulu zove se homogeni sustav. Takav sustav očito uvijek ima rješenje (i to ono u kojem su sve nepoznanice jednake nuli). Takvo rješenje se naziva trivijalno rješenje. Međutim, to rješenje ne mora biti i jedino.

Kod određivanja ranga matrice homogenog sustava nije potrebno pisati nule na desnim stranama jer se one, pri elementarnim transformacijama, ionako ne mijenjaju.

$$A \sim \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 & 5 & 7 \\ 9 & 4 & -3 & 8 & 9 \\ 6 & 6 & -2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_4 \\ R_3 \\ R_1 \\ R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 6 & 6 & -2 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & -2 & 5 & 7 \\ 9 & 4 & -3 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - 3R_2 \\ R_4 - 4R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = 2;$$

broj parametara $= n - r(A) = 5 - 2 = 3;$

$x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta,\ x_5 = \gamma;$

2. jednadžba: $-2x_2 - \beta + 3\gamma = 0 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{3\gamma - \beta}{2};$

1. jednadžba: $3x_1 + 6\gamma - 2\beta - \alpha + 4\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{\alpha - 2\beta - 5\gamma}{3}.$

Sva rješenja sustava su sve uređene petorke $\left(\dfrac{\alpha - 2\beta - 5\gamma}{3}, \dfrac{3\gamma - \beta}{2}, \alpha, \beta, \gamma \right)$, gdje su $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ proizvoljni parametri.

Dakle,

$$X=\begin{bmatrix}\frac{\alpha-2\beta-5\gamma}{3}\\ \frac{3\gamma-\beta}{2}\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}.$$

Ne moramo uvijek uzeti za parametre nepoznanice $x_3,\ x_4$ i x_5.

Uzmemo li npr. da su parametri $x_1,\ x_2$ i x_5 : $x_1=u_1,\ x_2=u_2$ i $x_5=u_3,$

onda iz 2. jednadžbe dobivamo

$$-2u_2-x_4+3u_3=0\Leftrightarrow x_4=3u_3-2u_2$$

pa ćemo uvrštavanjem u 1. jednadžbu dobiti

$$3u_1+4u_2-x_3+4\left(3u_3-2u_2\right)-u_3=0\Leftrightarrow x_3=3u_1-4u_2+11u_3.$$

Prema tome, u tom slučaju imamo jednostavniji zapis rješenja:

$$X=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ 3u_1-4u_2+11u_3\\ 3u_3-2u_2\\ u_3\end{bmatrix}.$$

Naravno, ako je $r(A)=r(\tilde{A})=n,$ onda je $n-r(A)=0$ pa nijedna nepoznanica ne može biti parametar, tj. sustav ima jedinstveno rješenje.

Primjer 27

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 4y & + & z & = & 8\\ 6x & - & 3y & - & 2z & = & 21\\ -x & + & 3y & + & 7z & = & 4\end{array}$$

Rješenje:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & -2 & 21 \\ -1 & 3 & 7 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_3 \\ R_1 \\ R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 4 & -4 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & -2 & 21 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ R_2+4R_1 \\ R_3+6R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 8 & 29 & 24 \\ 0 & 15 & 40 & 45 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ 2R_2-R_3 \\ R_3/5 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 18 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 9 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ R_3-3R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -46 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow r(A)=r(\tilde{A})=n;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3.\ \text{jednadžba:} & z=0, \\ 2.\ \text{jednadžba:} & y=3, \\ 1.\ \text{jednadžba:} & -x+3y=4 \Rightarrow x=5. \end{cases}$$

Primjer 28

Zadan je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{ccccccccc} 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & px_3 & - & 1.5x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

gdje je $p \in \mathbb{R}$. Treba odrediti p za kojega je uređena četvorka $(-6,1,4,2)$ rješenje danog sustava. Možemo li izabrati p tako da sustav ima jedinstveno rješenje?

Rješenje:

$$A \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & p & -1.5 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} R_4 \\ \\ \\ R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & p & -1.5 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 2R_3 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 5 & -4 \\ 6 & 6 & 2p & -3 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ R_2-3R_1 \\ R_3-6R_1 \\ R_4-4R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -1 & 5 \\ 0 & -18 & 2p-12 & 15 \\ 0 & -18 & -3 & 15 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ R_3-3R_2 \\ R_4-3R_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2p-9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Imamo 2 slučaja.

1) $\quad 2p-9=0 \Leftrightarrow p=\dfrac{9}{2}; \quad r(A)=2;$

broj parametara $=n-r(A)=4-2=2;$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$$
$$-6x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$x_2 = \alpha,\ x_4 = \beta;$$
$$x_3 = -6\alpha + 5\beta;$$
$$x_1 + 4\alpha - 12\alpha + 10\beta - 3\beta = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8\alpha - 7\beta.$$

Rješenja sustava su sve uređene četvorke $(8\alpha - 7\beta, \alpha, -6\alpha + 5\beta, \beta)$, gdje su $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni parametri.

Uzmemo li da je $x_2 = \alpha = 1$ i $x_4 = \beta = 2,$ onda je

$$x_1 = 8\alpha - 7\beta = -6;$$
$$x_3 = -6\alpha + 5\beta = 5.$$

Prema tome, točka $(-6,1,4,2)$ je rješenje sustava za $p = \frac{9}{2}.$

2) $\quad 2p - 9 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq \frac{9}{2}; \quad r(A) = 3;$

broj parametara $= n - r(A) = 4 - 3 = 1;$

$$\text{3. jednadžba:} \quad \underbrace{(2p-9)}_{\neq 0} x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0;$$
$$x_2 = 5\alpha \overset{\text{iz 2. jedn.}}{\Rightarrow} x_4 = 6\alpha;$$
$$x_1 + 20\alpha - 18\alpha = 0 \overset{\text{iz 1. jedn.}}{\Leftrightarrow} x_1 = -2\alpha.$$

Primijetimo da nepoznanica x_3 u slučaju 2) ne može biti parametar (mora biti baš jednaka nuli da bi vrijedila 3. jednadžba).

Rješenja sustava su sve uređene četvorke $(-2\alpha, 5\alpha, 0, 6\alpha)$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljni parametar.

Vidimo da ne postoji $p \in \mathbb{R}$ za kojega sustav ima jedinstveno rješenje.

Primjer 29

Pokažimo da je sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ -5x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 5 \end{array}$$

nemoguć.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1/2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \\ R_4 + 5R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 12 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_4 + R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_4 - 3R_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow r(A) = 3 \neq 4 = r(\tilde{A}).$$

Zadnji redak u zadnjoj matrici koju smo dobili predstavlja jednadžbu koju nijedan izbor nepoznanica ne može zadovoljiti. Naime, za bilo koje $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ je

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0,$$

a $0 \neq -1$.

3.8 Neki primjeri primjene matrica

U geometriji i računalnoj grafici koristi se množenje matrica.

Primjer 1a: simetrija objekta s obzirom na pravac

Možemo odabrati koordinatne osi tako da je jednadžba tog pravca $x = 0$.

Točki A s koordinatama (x_A, y_A) je jednoznačno pridružen vektor $\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ pa možemo pisati

$A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$. Ako je $S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onda je

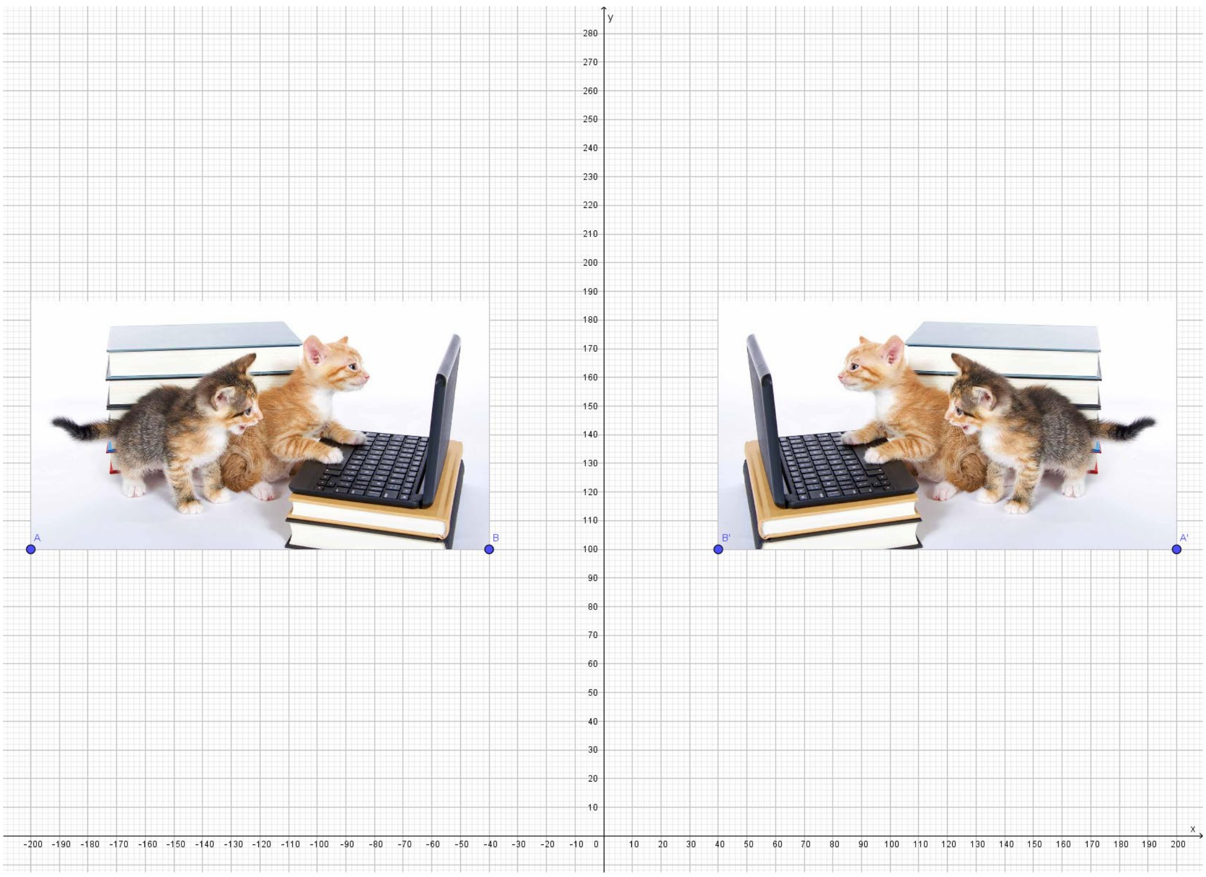
$$S_y \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_A \\ y_A \end{bmatrix}$$

pa kažemo da smo djelovanjem matrice S_y na točku A s koordinatama (x_A, y_A) dobili točku A' s koordinatama $(-x_A, y_A)$. Točka A' je simetrična točki A s obzirom na pravac $x=0$ pa se zato S_y naziva matricom simetrije (s obzirom na pravac $x=0$).

Djelovanjem matrice S_y na bilo koji objekt O u ravnini xy nastaje objekt O' koji je simetričan objektu O s obzirom na pravac $x=0$.

S_y djeluje na fotografiju (tj. na svaku točku fotografije) iznad dužine $\overline{AB}$.

Tako nastaje fotografija iznad dužine $\overline{A'B'}$.



Primjer 1b: rotacija objekta u pozitivnom smjeru za kut α oko točke

Možemo odabrati koordinatne osi tako da se one sijeku baš u točki $(0,0)$ oko koje se vrši rotacija. Neka je $A=\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$, gdje su r i φ polarne koordinate točke A.

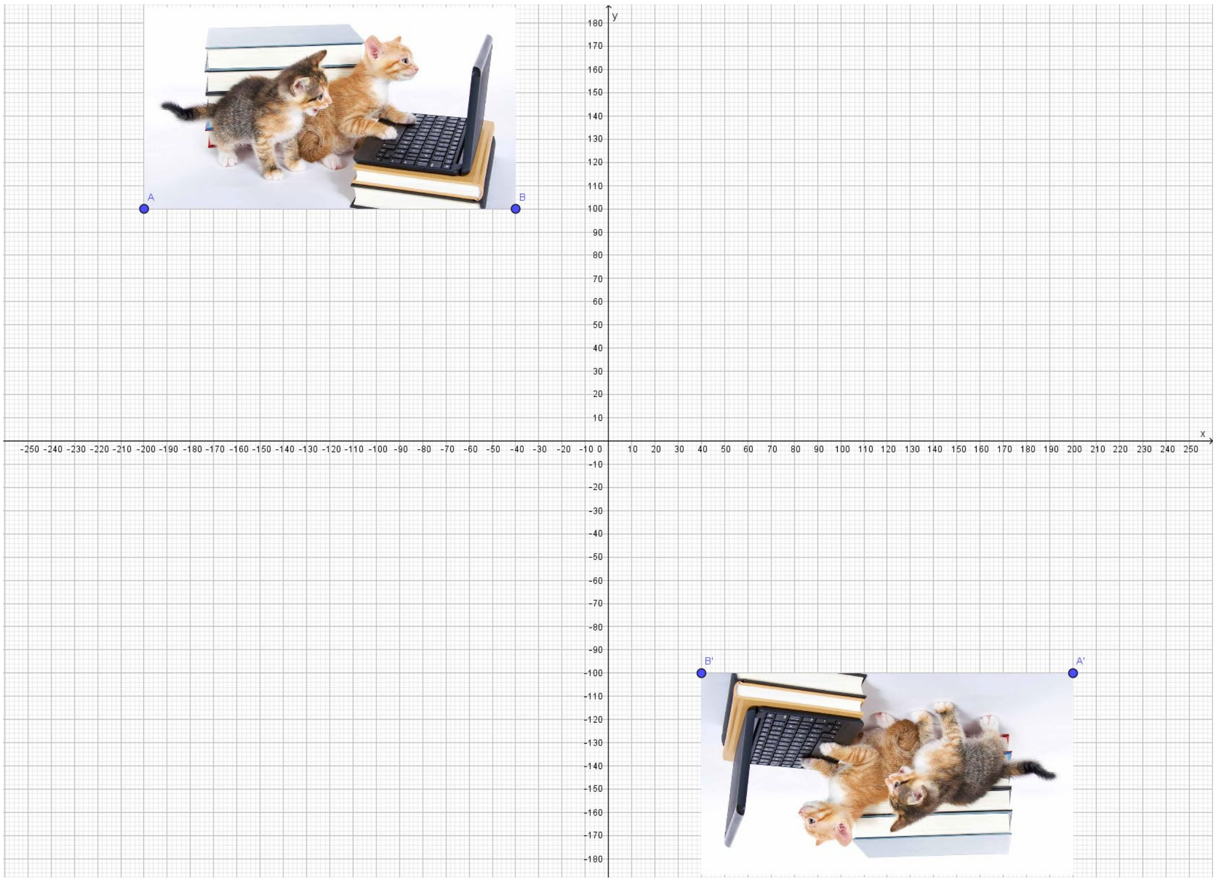
Ako je $R_\alpha=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, onda je

$$R_\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) \\ r(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\varphi) \\ r\sin(\alpha+\varphi) \end{bmatrix}$$

pa kažemo da smo djelovanjem matrice R_α na točku A s koordinatama $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ dobili točku A' s koordinatama $(r\cos(\alpha+\varphi), r\sin(\alpha+\varphi))$. Primijetimo da se točka A' dobiva rotacijom točke A u pozitivnom smjeru za kut α oko ishodišta. Stoga se R_α naziva matricom rotacije u pozitivnom smjeru za kut α.

Djelovanjem matrice R_α na bilo koji objekt O u ravnini xy dobiva se objekt O', a svaka točka objekta O' dobiva se rotacijom odgovarajuće točke objekta O u pozitivnom smjeru za kut α oko ishodišta.

$R_\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ rotira fotografiju (tj. svaku točku fotografije) iznad dužine $\overline{AB}$ u pozitivnom smjeru za kut $\pi = 180^\circ$ oko ishodišta. Tako nastaje slika ispod dužine $\overline{A'B'}$.



Slike na internetskim stranicama ili dobivene kamerom mobitela nazivamo digitalnim fotografijama. Takve slike nisu ništa drugo nego matrice. Pretpostavimo da smo u detaljima o jednoj takvoj slici otkrili da se radi o slici dimenzije 1200×640. Tada je ta slika matrica tipa 640×1200 čiji su elementi pikseli. Piksel je najmanji grafički element sastavljen od jedne jedine boje. Ako slika sadrži samo crnu i bijelu boju, onda je to matrica tipa 640×1200 čiji su elementi brojevi 0 i 1. Ti brojevi određuju boju svakog piksela: nula predstavlja crnu, a jedinica bijelu boju. Digitalne fotografije koje imaju samo dvije boje nazivamo binarnim slikama.

Ako je to crno-bijela slika, onda je to također matrica tipa 640×1200, ali njeni elementi su cijeli brojevi između 0 i 255. Nula je opet crna (boja minimalnog intenziteta), 255 je bijela (boja maksimalnog intenziteta), a brojevi 1-254 predstavljaju nijanse sive od najtamnije predstavljene brojem 1 do najsvjetlije predstavljene brojem 254.

Slike u boji nastaju preklapanjem (tj. zbrajanjem) triju matrica - crvene, zelene i plave.

Elementi, tj. pikseli, crvene matrice su uređene trojke $(c,0,0)$, gdje je c cijeli broj između 0 i 255. $(0,0,0)$ je crna, $(255,0,0)$ je crvena, a trojke $(c,0,0)$ kada c raste od 1 do 254 predstavljaju nijanse crvene od tamnije prema svjetlijoj boji.

Elementi zelene matrice su uređene trojke $(0,z,0)$, gdje je z cijeli broj između 0 i 255. $(0,0,0)$ je crna, $(0,255,0)$ je zelena, a trojke $(0,z,0)$ kada z raste od 1 do 254 predstavljaju nijanse zelene od tamnije prema svjetlijoj boji.

Elementi plave matrice su uređene trojke $(0,0,p)$, gdje je p cijeli broj između 0 i 255. $(0,0,0)$ je crna, $(0,0,255)$ je plava, a trojke $(0,0,p)$ kada p raste od 1 do 254 predstavljaju nijanse plave od tamnije prema svjetlijoj boji.

Takav sustav boja se naziva RGB sustav. U RGB sustavu moguće je prikazati $256^3=2^{24}=16777216$ različitih boja.

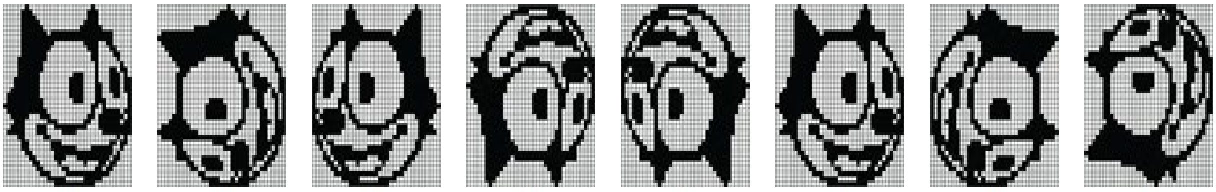
Bijela boja tog sustava je trojka $(255,255,255)=(255,0,0)+(0,255,0)+(0,0,255)$.

Nijanse sive prikazuju trojke oblika (a,a,a), gdje je a cijeli broj između 1 i 254.

Digitalna obrada slike i operacije s matricama

Kako se digitalne fotografije mogu prikazati pomoću matrica, postavlja se pitanje kako operacije na elementima matrice utječu na pripadnu fotografiju. Pokazat ćemo to na sljedećem primjeru.

Primjer 2:



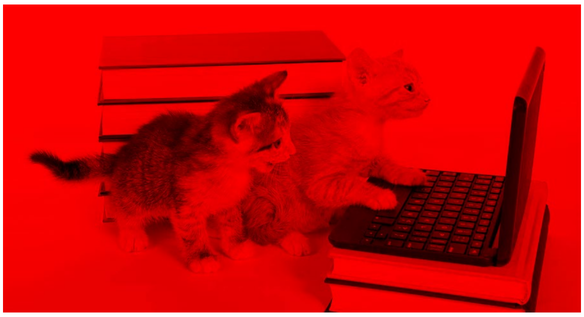
A B C D E F G H

Ako je $A=\left[a_{i,j}\right]$ zadana matrica (binarna slika) tipa 35×35, onda je:

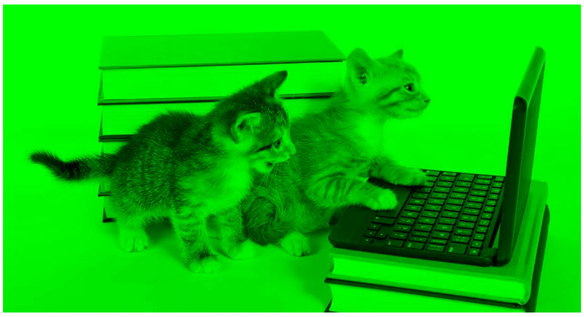
$B = \left[b_{i,j} \right] = \left[a_{j,i} \right] = A^T$, $C = \left[c_{i,j} \right] = \left[a_{i,35-j+1} \right]$, $D = \left[d_{i,j} \right] = \left[a_{35-i+1,j} \right]$,

$E = \left[e_{i,j} \right] = \left[a_{35-i+1,35-j+1} \right]$, $G = \left[g_{i,j} \right] = \left[a_{j,35-i+1} \right]$, $H = \left[h_{i,j} \right] = \left[a_{35-j+1,i} \right]$.

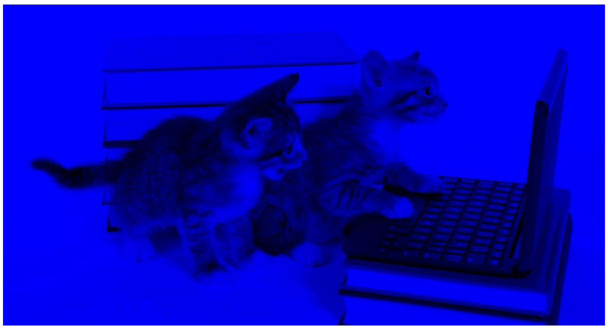
Primjer 3: Digitalna fotografija u boji koja nastaje zbrajanjem njene crvene, zelene i plave matrice



$+$



$+$



$=$

Kod programa napravljenog u MATLAB-u:

```
clear
X=imread('lokacija slike');
Y(:,:,1)=X; Y(:,:,2)=0; Y(:,:,3)=0;
R=Y;
imshow(R)
pause(5)
Y(:,:,1)=0; Y(:,:,2)=X; Y(:,:,3)=0;
G=Y;
imshow(G)
pause(5)
Y(:,:,1)=0; Y(:,:,2)=0; Y(:,:,3)=X;
B=Y;
imshow(B)
pause(5)
imshow(R+G+B)
```

Primjer 4:

Efekt prijelaza s jedne slike na drugu sliku često korišten u PowerPoint prezentacijama, slajdovima i dijaprojekcijama

Uzmimo dvije digitalne fotografije u boji iste dimenzije. Prvu fotografiju predstavlja matrica A, a drugu matrica Z u RGB sustavu. Za svaki broj $t \in [0,1]$ definiramo matricu

$$M(t) = (1-t)A + tZ.$$

Primijetimo da je $M(0) = A$ i $M(1) = Z$. Što je $t \in \langle 0,1 \rangle$ veći, to matrica $M(t)$ sve manje sliči matrici A, a sve više sliči matrici Z.

Kod programa napravljenog u MATLAB-u:

```
clear
set(gcf,'Visible','on')
A = imread('lokacija prve fotografije');
Z = imread('lokacija druge forografije');
for i=0:10
 t=0.1*i;
 M = (1-t)*A + t*Z;
 imshow(M)
 imwrite(M,strcat('lokacija fotografije M(t)',num2str(i),'.jpg'))
 pause(2)
end
```



Primjer 5: Primjena singularne dekompozicije matrice u aproksimaciji slike

Za matricu U reda n kažemo da je ortogonalna ako vrijedi: $U^T U = I_n$.

Neka je A bilo koja realna matrica tipa $m \times n$. Može se pokazati da se A može napisati u obliku umnoška triju matrica na sljedeći način:

$$A = USV^T,$$

gdje je U ortogonalna matrica reda m, V ortogonalna matrica reda n i $S = \left[s_{i,j} \right]$ tipa $m \times n$ za čije elemente vrijedi

$$s_{i,j} = 0 \text{ čim je } i \neq j,$$
$$s_{1,1} \geq s_{2,2} \geq \cdots \geq s_{k,k} \geq 0 \text{ uz oznaku } k = \min\{m, n\}.$$

Takav zapis matrice A naziva se singularna dekompozicija te matrice. Kratko kažemo i pišemo:

USV^T je SVD (singular value decomposition) matrice A.

Ako su stupci matrice U redom $u_1, u_2, \ldots, u_m$, a stupci matrice V redom $v_1, v_2, \ldots, v_n$, lako je provjeriti da vrijedi:

$$USV^T = \sum_{l=1}^{k} s_{l,l} u_l v_l^T.$$

Dakle,

$$A = \sum_{l=1}^{k} A_l,$$

gdje je $A_l = s_{l,l} u_l v_l^T$ matrica tipa $m \times n$ za svaki $l \in \{1, \ldots, k\}$.

Kako je $s_{1,1} \geq s_{2,2} \geq \cdots \geq s_{k,k} \geq 0,$ onda je očito $\lim\limits_{r \to k} \sum_{l=1}^{r} A_l = \sum_{l=1}^{k} A_l = A.$

Prema tome, što je r bliže $k,$ to je matrica $C = \sum_{l=1}^{r} A_l$ bolja aproksimacija matrice $A.$

Pretpostavimo da je svemirska sonda programirana da šalje laboratoriju na Zemlji velike količine crno-bijelih slika dimenzije $1000 \times 1000.$ Za svaku takvu sliku, sonda bi morala poslati $1000 \cdot 1000 = 1000000$ piksela (tj. 1000000 brojeva, po jedan broj za svaki piksel). Međutim, prije slanja računalo u sondi napravi SVD svake slike, tj. matrice $A.$ Nakon toga uzima prvih 40 stupaca matrice U ($40 \cdot 1000 = 40000$ brojeva), prvih 40 stupaca matrice V ($40 \cdot 1000 = 40000$ brojeva) i brojeve $s_{1,1},\ s_{2,2}, \ldots,\ s_{40,40}$ (40 brojeva), tj. sveukupno $40000 + 40000 + 40 = 80040$ brojeva, koje, umjesto elemenata matrice $A,$ šalje na Zemlju. Dakle, umjesto 1000000 brojeva po slici, sonda Zemlji šalje samo 80040 brojeva po slici. Na Zemlji se onda, za svaku sliku, određuje matrica $\sum_{l=1}^{40} A_l$ što je aproksimacija slike, tj. matrice $A.$ Tako će se moći brže dobiti svaka slika uz gubitak kvalitete.

Kod programa napravljenog u MATLAB-u (za crno-bijelu sliku uz $r = 40$):

```
clear
set(gcf,'Visible','on')
A=imread('lokacija slike');
%A=rgb2gray(A);
A=im2double(A);
[u,s,v]=svd(A);
C=zeros(size(A,1),size(A,2));
for i=1:size(A,1)
 for j=1:size(A,2)
  C(i,j)=0;
   for l=1:40
    C(i,j)=C(i,j)+s(l,l)*u(i,l)*v(j,l);
   end
 end
end
%C=255*ones(size(C,1),size(C,2)).*C;
%C=uint8(C);
imshow(C);
imwrite(C,'lokacija aproksimacije slike')
```

Crno-bijela slika dimenzije 1000×1000 $(k = 1000)$

Aproksimacija iste slike $(r = 40)$

Kod programa napravljenog u MATLAB-u (za sliku u boji uz $r = 50$):

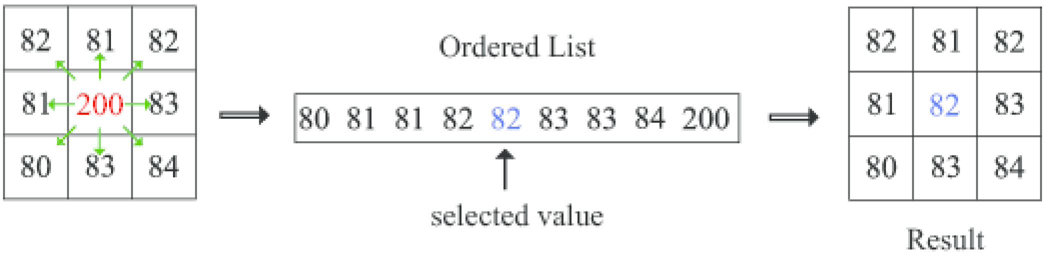
```
clear
set(gcf,'Visible','on')
A=imread('lokacija slike');
R=im2double(A(:,:,1));
[u1,s1,v1]=svd(R);
G=im2double(A(:,:,2));
[u2,s2,v2]=svd(G);
B=im2double(A(:,:,3));
[u3,s3,v3]=svd(B);
R=zeros(size(A,1),size(A,2));
G=zeros(size(A,1),size(A,2));
B=zeros(size(A,1),size(A,2));
for i=1:size(A,1)
 for j=1:size(A,2)
  R(i,j)=0;
  G(i,j)=0;
  B(i,j)=0;
   for l=1:50
    R(i,j)=R(i,j)+s1(l,l)*u1(i,l)*v1(j,l);
    G(i,j)=G(i,j)+s2(l,l)*u2(i,l)*v2(j,l);
    B(i,j)=B(i,j)+s3(l,l)*u3(i,l)*v3(j,l);
   end
 end
end
C(:,:,1)=R; C(:,:,2)=G; C(:,:,3)=B;
%C=255*ones(size(C,1),size(C,2)).*C;
%C=uint8(C);
imshow(C)
imwrite(C,'lokacija aproksimacije slike')
```

Slika u boji dimenzije 1200×640 $(k = 640)$

Aproksimacija iste slike $(r = 50)$

Primjer 6: Uklanjanje smetnji (šuma) iz slike

Šum je definiran kao neželjeni nasumični signal. Takav se signal miješa s korisnim signalom i utječe na njegovu kvalitetu. Medijalni filter je tehnika koja se koristi u digitalnoj obradi kako bi se smanjio utjecaj šuma te time povećala kvaliteta. Opišimo ukratko što radi medijalni filter. Na sve moguće načine biraju se 3 susjedna retka i 3 susjedna stupca slike (matrice A). Presjek izabranih redaka i stupaca je matrica B reda 3. Elementi matrice B poredaju se u rastući niz. Središnji element matrice B, tj. element koji se nalazi u drugom retku i drugom stupcu, se zamijeni s petim članom (tzv. medijanom) dobivenog niza.



Kod programa napravljenog u MATLAB-u (medijalni filter za crno-bijelu sliku):

```
clear
set(gcf,'Visible','on')
A=imread('08.jpg');
a=zeros(3);
for z=1:size(A,1)-2
 for w=1:size(A,2)-2
  for i=z:z+2
   for j=w:w+2
    a(i-z+1,j-w+1)=A(i,j);
   end
  end
  b=sort(a(:));
  A(z+1,w+1)=b(5);
 end
end
imshow(A)
imwrite(A,'slika65.jpg')
```

Crno-bijela slika sa šumom

Ista slika nakon primjene medijalnog filtra

Kod programa napravljenog u MATLAB-u (medijalni filter za sliku u boji):

```
clear
set(gcf,'Visible','on')
A=imread('11.jpg');
A=im2double(A);
R=im2double(A(:,:,1));
G=im2double(A(:,:,2));
B=im2double(A(:,:,3));
a1=zeros(3);
a2=zeros(3);
a3=zeros(3);
for z=1:size(A,1)-2
 for w=1:size(A,2)-2
  for i=z:z+2
   for j=w:w+2
    a1(i-z+1,j-w+1)=R(i,j);
    a2(i-z+1,j-w+1)=G(i,j);
    a3(i-z+1,j-w+1)=B(i,j);
```

```
   end
  end
  b1=sort(a1(:));
  R(z+1,w+1)=b1(5);
  b2=sort(a2(:));
  G(z+1,w+1)=b2(5);
  b3=sort(a3(:));
  B(z+1,w+1)=b3(5);
 end
end
A(:,:,1)=R; A(:,:,2)=G; A(:,:,3)=B;
imshow(A)
imwrite(A,'slika35.jpg')
```

Primjer 7: Kodiranje i dekodiranje poruka u kriptografiji

Kriptogram je poruka napisana tajnim kodom. Opisat ćemo kako se množenje matrica koristi u kodiranju i dekodiranju poruka. Najprije ćemo svakom broju od 1 do 30 pridružiti jedno slovo (0 je pridružena razmaku između riječi) na sljedeći način:

1=A	2=B	3=C	4=Č	5=Ć	6=D	7=DŽ	8=Đ	9=E	10=F
11=G	12=H	13=I	14=J	15=K	16=L	17=LJ	18=M	19=N	20=NJ
21=O	22=P	23=R	24=S	25=Š	26=T	27=U	28=V	29=Z	30=Ž

Kodirat ćemo sljedeći tekst:

"Ovo je tajna poruka."

Slova teksta, tj. brojeve kojima su pridružena (skupa s razmacima bez interpunkcijskih znakova), redom raspoređujemo u matricu Q koja ima n stupaca pri čemu je $n \geq 2$. Izaberimo npr. $n = 3$.

$$Q = \begin{bmatrix} 21 & 28 & 21 \\ 0 & 14 & 9 \\ 0 & 26 & 1 \\ 14 & 19 & 1 \\ 0 & 22 & 21 \\ 23 & 27 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Napomena: Zadnja 2 polja u zadnjem retku matrice Q smo nadopunili nulama (jer razmaci ne mijenjaju sadržaj teksta).

Sada matricu Q množimo s izabranom (tajnom) regularnom matricom trećeg reda W.

Tako dobivamo matricu Y.

Neka je npr.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Tada je $Y = QW = \begin{bmatrix} 70 & -98 & -91 \\ 23 & -37 & -8 \\ 27 & -53 & 48 \\ 34 & -53 & -8 \\ 43 & -65 & -40 \\ 65 & -92 & -75 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. Raspišemo li redom elemente matrice Y dobivamo sljedeći kriptogram.

70 -98 -91 23 -37 -8 27 -53 48 34 -53 -8 43 -65 -40 65 -92 -75 1 -1 -3

Dekodiranje kriptograma je vrlo jednostavno ako nam je poznat način šifriranja i matrica W.

Najprije od kriptograma formiramo matricu Y. Budući da je

$Y = QW$,

onda je $Q = YW^{-1}$. Dakle, treba samo odrediti W^{-1}. Nakon toga je lako odrediti matricu Q, odnosno šifrirani tekst.

3.9 ZADACI ZA VJEŽBU

Odredite tip zadane matrice i traženi element:

1. $B=\begin{bmatrix}55 & 44\end{bmatrix}$; b_{12}

2. $C=\begin{bmatrix}48 & 18\\ 6 & 0\\ -6 & 5\\ 18 & -15\end{bmatrix}$; c_{31}

3. $A=\begin{bmatrix}v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1q}\\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{p1} & v_{p2} & v_{p3} & \cdots & v_{pq}\end{bmatrix}$, a_{22}

4. $E=\begin{bmatrix}d & d & d & d & d\end{bmatrix}$; e_{1r} $\left(\text{za svaki } r\in\{1,2,\ldots,5\}\right)$

5. Nađite x, y, z i w ako vrijedi

$$\begin{bmatrix}x-y & x-z\\ y-w & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}.$$

6. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 5 & -1 & 1\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}1 & x & w\\ r & z & 4\end{bmatrix}$. Odredite matrice:

a) $A+B$, b) $B-C$, c) $A-B+C$, d) $\frac{1}{2}B$,

e) $2A-B$, f) $2A-4C$, g) $3B^T$, h) $2A^T-C^T$.

7. $A=\begin{bmatrix}44.2 & 0 & 12.2\\ 1.5 & -2.35 & 5.6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5.4 & 0\\ 1.4 & 7.8\\ 5.6 & 6.6\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}-10 & -20 & -30\\ 10 & 20 & 30\end{bmatrix}$. Izračunajte:

a) $A-C$, b) $C-A$, c) $1.1B$, d) $-0.2B$,

e) $A^T+4.2B$, f) $(A+2.3C)^T$, g) $(2.1A-2.3C)^T$, h) $(A-C)^T-B$.

8. Odredite matricu $F=AB$ ako

a) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$,

b) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$,

c) $A=\begin{bmatrix}1.2 & 1.3 & 1.1 & 1.1\\ 3.4 & 4.4 & 2.3 & 1.1\\ 2.3 & 0 & -2.2 & 1.1\\ 1.1 & 2.3 & 3.4 & -1.2\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & 2.2 & 9.8\\ -3.4 & -4.8 & -4.2\\ 3.4 & 5.6 & 1\\ -2.1 & 0 & -3.3\end{bmatrix}$,

d) $A=\begin{bmatrix}1 & -7 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -7 & 0\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$.

9. Ako je $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ i $P_4(x)=-x^4+3x^3+2x^2-2x$, odredite $P_4(A)$.

10. Neka je $B=\begin{bmatrix}-4 & -4 & -1\\ 3 & 3 & 1\\ -4 & -4 & 0\end{bmatrix}$. Izračunajte $Q_3(B)$ ako je $Q_3(x)=4x^3+3x^2-2x-1$.

11. Izračunajte:

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}1 & 3 & -5 & -7\\ 3 & -5 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 0 & -2\\ 3 & -5 & 1 & 4\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & 6\\ 1 & 2 & 0 & 7\\ -1 & 3 & -15 & 18\\ 2 & -1 & 5 & 6\end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix}0 & -c & b & -x\\ c & 0 & -a & -y\\ -b & a & 0 & -z\\ x & y & z & 0\end{vmatrix}$.

12. Izračunajte determinante sljedećih matrica reda n (za bilo koji $n\in\mathbb{N}$):

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$, b) $B=\begin{bmatrix}1 & n & n & \cdots & n\\ n & 2 & n & \cdots & n\\ n & n & 3 & \cdots & n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}$.

13. Odredite sve $x\in\mathbb{R}$ za koje je matrica

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 2-x^2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 9-x^2 & 2\end{bmatrix}$$

singularna.

14. Nađite A^{-1} ako je

a) $A=\begin{bmatrix}5 & 9\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, b) $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{bmatrix}$,

c) $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 5\\ 7 & 2 & 8\end{bmatrix}$, d) $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 10\\ 2 & 5 & 4\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix}$,

e) $A=\begin{bmatrix}5 & -5 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, f) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

15. Riješite matričnu jednadžbu $(AXB)^{-1}=\left(X^{-1}+A\right)A^{-1}$ ako je

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\\ 3 & -4 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

16. Riješite matričnu jednadžbu $(XA+C)(AX+2AB)^{-1}=A^{-1}$ ako je

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \text{i}\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

17. Riješite jednadžbu:

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{bmatrix}\cdot X\cdot\begin{bmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{bmatrix}.$$

18. Riješite matričnu jednadžbu $AX+2B=C+BX$, ako je

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

19. Riješite matričnu jednadžbu $AXB^{-1}=I-A$, ako je

$$A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ -4 & 1 & -4\\ -3 & 1 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

20. Riješite matričnu jednadžbu $(A+3I)(X-I)=B,$ ako je I jedinična matrica trećeg reda,

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 5 & -2\\ 2 & 8 & 0\\ -1 & -5 & -2\end{bmatrix} \text{ i } B=\begin{bmatrix}-3 & 21 & 1\\ 2 & 50 & -2\\ 1 & -22 & 0\end{bmatrix}.$$

21. Odredite rang sljedećih matrica:

a) $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3 & 8 & -2\\ -3 & 6 & 12 & 16 & -34\\ 1 & -2 & -9 & 8 & 8\end{bmatrix},$

b) $B=\begin{bmatrix}3 & -7 & -1 & 3 & 2\\ 1 & -6 & 1 & 7 & 7\\ 9 & 2 & -11 & -1 & -7\\ -5 & -4 & 7 & -7 & -3\end{bmatrix},$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0\\ -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ -3 & -2 & -2 & -1 & 3 & -1\\ -8 & -2 & -2 & -6 & -2 & -6\\ 3 & -1 & -1 & 4 & 6 & 4\end{bmatrix},$

d) $D=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$

22. Cramerovim pravilom i pomoću inverzne matrice riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2\\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 2\\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2\end{array}$$

23. Može li se rješenje sustava

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & = & 8\\ 4x_1 & - & x_2 & = & 4\\ 2x_1 & + & x_2 & = & -1\\ & - & x_2 & = & 2\end{array}$$

naći Cramerovim pravilom?

Uputa: Najprije se odredi rang. Dobije se $n=r(A)=r(\tilde{A})=2$ i novi sustav (ekvivalentan zadanom) s matricom sustava C te proširenom matricom sustava $\tilde{C}$ u kojemu je $m=n=r(C)=r(\tilde{C})=2,$ a taj sustav možemo riješiti Cramerovim pravilom.

24. Nađite sva rješenja sustava

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 6x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & - & 4x_5 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Da li je vektor $X^* = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 11 \\ 100 \\ 0 \\ 34 \\ 0 \end{bmatrix}$ rješenje tog sustava?

25. Koliko rješenja ima sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & 9x_4 & - & 3x_5 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ & - & 4x_2 & - & 8x_3 & - & 2x_4 & & & = & 1 \end{array} \quad ?$$

26. Nađite sva rješenja sustava

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & + & 6x_5 & = & 4 \end{array}$$

27. Za koji $p \in \mathbb{R}$ je sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & + & px_2 & + & 4x_3 & = & -7 \end{array}$$

nemoguć?
Postoji li $p \in \mathbb{R}$ za kojega sustav ima beskonačno rješenja?
Koliki mora biti $p \in \mathbb{R}$ da bi vektor $X = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -2 \end{bmatrix}$ bio rješenje tog sustava?

Rješenja:

1. B je tipa 1×2; $b_{12}=44$.
2. C je tipa 4×2; $c_{31}=-6$.
3. A je tipa $p\times q$; $a_{22}=v_{22}$.
4. E je tipa 1×5; $e_{1r}=d$.
5. $x=y=z=w=6$.
6.

a) $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, b) $B-C=\begin{bmatrix} 2 & -x & -1-w \\ 5-r & -1-z & -3 \end{bmatrix}$,

c) $A-B+C=\begin{bmatrix} -3 & 1+x & 1+w \\ -5+r & -1+z & 4 \end{bmatrix}$, d) $\frac{1}{2}B=\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$,

e) $2A-B=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, f) $2A-4C=\begin{bmatrix} -6 & 2-4x & -4w \\ -4r & -4-4z & -14 \end{bmatrix}$,

g) $3B^T=\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 0 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, h) $2A^T-C^T=\begin{bmatrix} -3 & -r \\ 2-x & -4-z \\ -w & -2 \end{bmatrix}$.

7.

a) $A-C=\begin{bmatrix} 54.2 & 20 & 42.2 \\ -8.5 & -22.35 & -24.4 \end{bmatrix}$, b) $C-A=\begin{bmatrix} -54.2 & -20 & -42.2 \\ 8.5 & 22.35 & 24.4 \end{bmatrix}$,

c) $1.1B=\begin{bmatrix} 5.94 & 0 \\ 1.54 & 8.58 \\ 6.16 & 7.26 \end{bmatrix}$, d) $-0.2B=\begin{bmatrix} -1.08 & 0 \\ -0.28 & -1.56 \\ -1.12 & -1.32 \end{bmatrix}$,

e) $A^T+4.2B=\begin{bmatrix} 66.88 & 1.5 \\ 5.88 & 30.41 \\ 35.72 & 33.32 \end{bmatrix}$, f) $(A+2.3C)^T=\begin{bmatrix} 21.2 & 24.5 \\ -46 & 43.65 \\ -56.8 & 74.6 \end{bmatrix}$,

g) $(2.1A-2.3C)^T=\begin{bmatrix} 115.82 & -19.85 \\ 46 & -50.94 \\ 94.62 & -57.24 \end{bmatrix}$, h) $(A-C)^T-B=\begin{bmatrix} 48.8 & -8.5 \\ 18.6 & -30.15 \\ 36.6 & -31 \end{bmatrix}$.

8.

a) $F=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, b) F ne postoji,

c) $F=\begin{bmatrix} -1.79 & 2.56 & 3.77 \\ -6.05 & -0.76 & 13.51 \\ -7.49 & -7.26 & 16.71 \\ 7.36 & 10.42 & 8.48 \end{bmatrix}$, d) $F=\begin{bmatrix} -21 \\ 15 \\ -3 \\ -10 \end{bmatrix}$.

9. $P_4(A)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$

10. $Q_3(B)=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&0&-2\\4&4&-1\end{bmatrix}.$

11. a) 0, b) -140, c) 40, d) $(ax+by+cz)^2$.

12. Uputa: Primijeniti svojstvo determinante 5).
a) $\det A=1$,

b)

$$\det B=\begin{vmatrix}1&n&n&\cdots&n&n\\n&2&n&\cdots&n&n\\n&n&3&\cdots&n&n\\.&.&.&.&.&.\\n&n&n&\cdots&n-1&n\\n&n&n&\cdots&n&n\end{vmatrix}\begin{matrix}R_1-R_n\\R_2-R_n\\R_3-R_n\\\vdots\\R_{n-1}-R_n\\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}1-n&0&0&\cdots&0&0\\0&2-n&0&\cdots&0&0\\0&0&3-n&\cdots&0&0\\.&.&.&.&.&.\\0&0&0&\cdots&(n-1)-n&0\\n&n&n&\cdots&n&n\end{vmatrix}=$$

$$=(1-n)(2-n)\cdots((n-1)-n)n=(-1)^{n-1}n!$$

13. Matrica A je singularna ako je $x\in\{-2,-1,1,2\}$.

14.

a) $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-4&9\\3&-5\end{bmatrix}$, b) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}$,

c) $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-10&-12&5\\51&54&-21\\-4&-3&2\end{bmatrix}$, d) $A^{-1}=\frac{1}{35}\begin{bmatrix}17&-31&-46\\-6&13&8\\-1&8&13\end{bmatrix}$,

e) $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-4&-8&26&14\\2&8&-19&-9\\10&16&-63&-29\\-2&0&15&5\end{bmatrix}$, f) $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$.

15.

$$(AXB)^{-1} = (X^{-1} + A)A^{-1}$$
$$B^{-1}X^{-1}A^{-1} = (X^{-1} + A)A^{-1} / \cdot A$$
$$B^{-1}X^{-1} = X^{-1} + A / \cdot X$$
$$B^{-1} = I + AX$$
$$A^{-1} \cdot / B^{-1} - I = AX$$
$$A^{-1}(B^{-1} - I) = X;$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 29 & -11 & -8 \\ 18 & -7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 6 & -8 & 5 \\ 6 & 3 & -6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} - I = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 6 & -8 & 5 \\ 6 & 3 & -6 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix} - \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} -27 & -8 & 5 \\ 6 & -30 & -6 \\ 3 & 7 & -25 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}(B^{-1} - I) = \begin{bmatrix} 29 & -11 & -8 \\ 18 & -7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{33}\begin{bmatrix} -27 & -8 & 5 \\ 6 & -30 & -6 \\ 3 & 7 & -25 \end{bmatrix} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} -873 & 42 & 411 \\ -543 & 31 & 257 \\ 90 & 1 & -46 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{291}{11} & \frac{14}{11} & \frac{137}{11} \\ -\frac{181}{11} & \frac{31}{33} & \frac{257}{33} \\ \frac{30}{11} & \frac{1}{33} & -\frac{46}{33} \end{bmatrix}.$$

16.

$$(XA + C)(AX + 2AB)^{-1} = A^{-1} / \cdot (AX + 2AB)$$
$$XA + C = A^{-1}(AX + 2AB)$$
$$XA + C = X + 2B$$
$$XA - X = 2B - C$$
$$X(A - I) = 2B - C / \cdot (A - I)^{-1}$$
$$X = (2B - C)(A - I)^{-1};$$

$$2B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2B - C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A-I=\begin{bmatrix}-2&2&3\\0&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad (A-I)^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}2&-2&-8\\0&-2&-2\\0&0&-4\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&4\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$X=(2B-C)(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1&0\\1&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&4\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3&2&11\\-1&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1.5&1&5.5\\-0.5&-0.5&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

17.

$$X=\begin{bmatrix}2&-3&1\\4&-5&2\\5&-7&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&0&-2\\18&12&9\\23&15&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&7&6\\1&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1&2&-1\\-2&1&0\\-3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&-2\\18&12&9\\23&15&11\end{bmatrix}\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1&-1&8\\1&3&-12\\0&-2&2\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-4&-6\\-4&-6&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}.$$

18.

$$AX+2B=C+BX$$
$$AX-BX=C-2B$$
$$(A-B)^{-1}\cdot/\,(A-B)X=C-2B$$
$$X=(A-B)^{-1}(C-2B);$$

$$A-B=\begin{bmatrix}2&0&6\\0&-2&2\\0&0&-1\end{bmatrix} \qquad (A-B)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&0&12\\0&-2&-4\\0&0&-4\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&6\\0&-1&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

$$2B=\begin{bmatrix}-2&4&-6\\0&8&4\\0&0&4\end{bmatrix} \qquad C-2B=\begin{bmatrix}5&-4&7\\0&-6&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

$$X=(A-B)^{-1}(C-2B)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&6\\0&-1&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-4&7\\0&-6&0\\0&0&-3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5&-4&-11\\0&6&6\\0&0&6\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2.5&-2&-5.5\\0&3&3\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

19.

$$AXB^{-1}=I-A/\cdot B$$
$$A^{-1}\cdot/\,AX=(I-A)B$$
$$X=A^{-1}(I-A)B$$
$$X=(A^{-1}-I)B;$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&11&-14\\0&-3&4\\-1&-12&15\end{bmatrix}\qquad A^{-1}-I=\begin{bmatrix}0&11&-14\\0&-4&4\\-1&-12&14\end{bmatrix}$$

$$X=(A^{-1}-I)B=\begin{bmatrix}0&11&-14\\0&-4&4\\-1&-12&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\1&-2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&-8&-14\\-4&4&4\\-13&10&12\end{bmatrix}.$$

20.

$$(A+3I)^{-1}\cdot/\,(A+3I)(X-I)=B$$
$$X-I=(A+3I)^{-1}B$$
$$X=I+(A+3I)^{-1}B;$$

$$A+3I=\begin{bmatrix}1&5&-2\\2&11&0\\-1&-5&1\end{bmatrix}\qquad (A+3I)^{-1}=\begin{bmatrix}-11&-5&-22\\2&1&4\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$X=I+(A+3I)^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-11&-5&-22\\2&1&4\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&21&1\\2&50&-2\\1&-22&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&5&0\\2&1&0\end{bmatrix}.$$

21.

a) $R(A)=2,$ b) $R(B)=3,$ c) $R(C)=2,$ d) $R(D)=6.$

22. $X = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ -7 \end{bmatrix}.$

23. Može. $X = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -2 \end{bmatrix}.$

24. $X = \begin{bmatrix} 1/7 \\ u_1+u_2 \\ u_1+u_2-3/7 \\ u_1-6/7 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad u_1,u_2 \in \mathbb{R}$. Vektor X^* nije rješenje jer ne zadovoljava 3. i 4. jednadžbu sustava.

25. Sustav nema nijedno rješenje (dakle, radi se o nemogućem sustavu) jer je

$$r(A) = 3 \neq 4 = r(\tilde{A}).$$

26. $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - u_3 - u_2 \\ u_2 - u_1 + 3u_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 + \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad u_1,u_2,u_3 \in \mathbb{R}.$

27. Sustav je nemoguć za $p = -2$. Ne postoji $p \in \mathbb{R}$ za kojega sustav ima beskonačno rješenja. Naime, za $p \neq -2$ je $m = n = r(A) = r(\tilde{A}) = 3$ pa sustav ima jedinstveno rješenje.

Vektor $X = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -2 \end{bmatrix}$ je rješenje sustava za $p = 1$.

3.10 MATRICE - KVIZ

Zaokružite mogućnost za koju smatrate da najbolje nadopunjuje izjavu.

1. Ako je $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, onda je $6A+7B=$

a) $\begin{bmatrix} 40 & 3 & 35 \\ -20 & 31 & 30 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -40 & -3 & 35 \\ -20 & 31 & 30 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 40 & -3 & 35 \\ -20 & 31 & 30 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 40 & -3 & 35 \\ 20 & 31 & 30 \end{bmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}=$

a) 60 b) -60 c) -4 d) 4

3. Matrica ima 72 elementa. Broj redaka te matrice ne može biti:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

4. Cramerovim pravilom riješite sustav

$$\begin{aligned} 0.5x &+ 1.4y = 9 \\ 0.3x &- 0.2y = 0.2 \end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je vektor:

a) $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$ c) nema rješenja d) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

5. Ako je $A=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 & 9 & -1 \\ 8 & -8 & 9 & 0 & 8 \\ -7 & -4 & -7 & 6 & 6 \\ 8 & 1 & 9 & -7 & 9 \end{bmatrix}$, onda je $a_{32}=$

a) 9 b) -7 c) -4 d) 6

6. Ako je $B=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 & -6 \\ -9 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & -9 \end{bmatrix}$, onda je $b_{12}=$

a) 5 b) 3 c) -2 d) 8

7. Rješenje sustava

$$\begin{aligned} 3x &+ 21y = 3 \\ x &- 2y = 19 \end{aligned}$$

je vektor

a) $\begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 15 \\ -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -15 \\ 2 \end{bmatrix}$ d) sustav nema rješenja

8. Rješenje sustava

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 5y & + & 2z & = & 2 \\ 4x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 5x & + & 3y & - & 5z & = & -8 \end{array}$$

je uređena trojka

a) $(1,1,-3)$ b) $(1,2,0)$ c) $(1,-1,2)$ d) sustav nema rješenja

9. $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} =$

a) $\begin{bmatrix} 74 & -31 \\ -40 & -24 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 18 & 28 \\ -64 & 8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -80 & -48 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 74 & -31 \\ 40 & 24 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} =$

a) $\begin{bmatrix} 50 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & -4 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ d) ne postoji

11. $-3\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix} =$

a) $\begin{bmatrix} -15 & -21 & -12 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -15 & -21 & -12 \\ 6 & -15 & 9 \\ -3 & -21 & -18 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & -15 & 9 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -9 & 6 & -3 \\ -8 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 6 \\ -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

12. $C + A =$

a) ne postoji b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & -6 \end{bmatrix}$

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

c) $\begin{bmatrix} -9 & 6 & 11 \\ -1 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

13. $C+B=$

a) ne postoji b) $\begin{bmatrix} -18 & 4 & 3 \\ -9 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -18 & 4 & 3 \\ -9 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -18 & 4 & 4 \\ -9 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

14. Odredite tip zadane matrice i traženi element: $A=\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 0 & -1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, a_{21}

a) $3\times 2,\ 0$ b) $2\times 3,\ -7$ c) $3\times 2,\ -1$ d) $2\times 3,\ -1$

15. Rješenje matrične jednadžbe $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ je

a) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

16. Rješenje matrične jednadžbe $X-5\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ je

a) $\begin{bmatrix} -11 & 24 \\ 10 & 33 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 11 & 24 \\ -10 & 33 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 11 & 24 \\ -10 & -33 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -11 & 24 \\ -10 & 33 \end{bmatrix}$

17. Rješenje matrične jednadžbe $X+\begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 2 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ je

a) $\begin{bmatrix} -11 & 13 & -1 \\ -5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -11 & -13 & -1 \\ -5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -11 & 13 & -1 \\ -5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -11 & 13 & 5 \\ -5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

Odredite sve moguće vrijednosti nepoznatih varijabli.

18. $\begin{bmatrix} -x^2-5 & -21 \\ 7 & 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 3z \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

a) $x=\pm 25,\ y=-1,\ z=-7$ b) $x=\pm 5,\ y=-1,\ z=-7$

c) $x=\pm 5,\ y=-1,\ z=7$ d) $x=5,\ y=-1,\ z=-7$

19. $\begin{bmatrix} 2 & -3-2u \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3v-2 & 1 \end{bmatrix}$

a) $u=1,\ v=3$ b) $u=-4,\ v=-3$ c) $u=-1,\ v=3$ d) $u=-4,\ v=3$

20. Determinanta matrice $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ je

a) 104 b) -8 c) -104 d) 8

21. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 9 \\ -8 & 1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 9 & 6 \\ 9 & 0 & -7 \end{bmatrix} =$

a) $\begin{bmatrix} -4 & 5 & 15 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -4 & 5 & 15 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -4 & 5 & -15 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -4 & 5 & 15 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 8 & 5 & -2 \end{bmatrix} =$

a) $\begin{bmatrix} -8 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -8 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

23. Ako su A i B matrice tipa 3×2, onda je $A+B$ matrica tipa:
a) 2×3 b) 6×1 c) 3×2 d) 1×6

24. Rang matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ je

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

25. Rang matrice $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & 2 & -7 & -6 \end{bmatrix}$ je

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

26. Rang matrice $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 & 2 & -1 \\ 7 & -5 & -4 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 & -1 & -7 & -4 \end{bmatrix}$ je

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

27. Rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

28. Sustav

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 7x_2 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & = & 8 \end{array}$$

a) je nemoguć b) ima jedinstveno rješenje c) ima beskonačno mnogo rješenja

29. Rješenje sustava

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array} \quad (*)$$

a) je vektor $X = \begin{bmatrix} -11/4 \\ 5/4 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) je vektor $X = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 21/4 \\ 8 \end{bmatrix}$ c) je vektor $X = \begin{bmatrix} -15/4 \\ 1/4 \\ -2 \end{bmatrix}$

d) ne postoji

30. Sustav $(*)$

a) ima jedinstveno rješenje b) ima beskonačno mnogo rješenja c) je nemoguć

31. Rješenje sustava

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & & & + & 4x_3 & = & -3 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array} \quad (**)$$

a) je vektor $X = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) je vektor $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ c) ne postoji

32. Sustav $(**)$

a) nema rješenja b) ima jedinstveno rješenje c) ima beskonačno mnogo rješenja

33. Sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ qx_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array} \quad (***)$$

je neodređen za

a) $q=3$ b) $q=4$ c) $q=5$ d) neki drugi $q \in$ □

34. Za $q=1$ rješenje sustava $(***)$

a) je vektor $X=\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) je vektor $X=\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ c) je vektor $X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) nije nijedan od navedenih vektora

35. Sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 9x_2 & + & 9x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 14x_1 & + & 21x_2 & + & 21x_3 & = & 14 \\ 18x_1 & + & 27x_2 & + & 27x_3 & = & 18 \end{array}$$

a) nema rješenja b) ima jednoparametarsko rješenje c) ima dvoparametarsko rješenje d) ima rješenje s 3 parametra

Odgovori:

1. c)
2. b)
3. d)
4. d)
5. c)
6. d)
7. b)
8. c)
9. a)
10. a)
11. c)
12. a)
13. c)
14. a)
15. b)
16. d)
17. c)
18. b)
19. d)
20. a)

21. d)
22. a)
23. c)
24. c)
25. b)
26. b)
27. d)
28. b) $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
29. c)
30. a)
31. c)
32. a)
33. d) $q = 2$
34. c)
35. d)

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union