3 MATRICaS un DETERMINANTi

KOPSAVILKUMS:
Šī nodaļa iepazīstina lasītāju ar matricas jēdzienu. Vispirms tiek definētas dažas aritmētiskās darbības ar matricām, pēc tam tiek definēts kvadrātiskas matricas determinants, kā arī inversā matrica. Tiek risināti matricu vienādojumi. Matricu metode, Gausa metode, kā arī Krāmera formulas tiek demonstrētas lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšanā. Kā svarīgs jēdziens tiek aplūkots arī matricas rangs un tā pielietošana, lai noteiktu vienādojumu sistēmas saderību. Nodaļā ir doti daudzi piemēri ar detalizētiem paskaidrojumiem. Pielikumā doti vingrinājumi patstāvīgajam darbam, kā arī tests par iegūtajām zināšanām. Ieteicams atrisinājumu pareizības pārbaudei lietot tādas aplikācijas kā MATLAB, Excel un Geogebra.

Mērķis :
Iepazīties ar matricas jēdzienu; iemācīties aprēķināt determinantus, atrisināt lineāru vienādojumu sistēmu ar matricu metodi, Gausa metodi un Krāmera formulām

Priekšzināšanas:
Studentiem jāpārzina aritmētiskās darbības ar reāliem skaitļiem.

Mācību rezultāts:

1. Uzzināt, kā tiek definētas aritmētiskās darbības ar matricām
2. Iemācīties, kā aprēķina determinantus, izmantojot determinantu īpašības
3. Prast atrast dotās matricas inverso matricu
4. Atrisināt vienādojumu sistēmu ar matricu metodi

Pielietojumi:
- ģeometrijā,
- digitālo fotogrāfiju apstrādē,
- patērētāju pieprasījuma modelēšanā,
- kriptogrāfijā ziņojumu kodēšanai un atšifrēšanai,
- ekonomisko sistēmu analīzē,
- ekonometrijā regresijas modeļa novērtēšanā ar mazāko kvadrātu metodes palīdzību,
- transportēšanas un izvietošanas uzdevumos,
- ceļojošā komivojažiera problēmas risināšanā.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Saturs:

3.1 Matricas

Taisnstūrveida elementu tabulu, kuras elementi sakārtoti m rindās un n kolonnās, sauc par $\boldsymbol{m \times n}$ matricu vai matricu ar izmēru $\boldsymbol{m \times n}$. Katra matrica tiek apzīmēta ar lielo burtu, un tās elementi ir ievietoti kvadrātveida vai apaļās iekavās. Katru matricas elementu apzīmē ar atbilstošu mazu burtu ar diviem indeksiem $\boldsymbol{a_{ij}}$, kur pirmais indekss i norāda tās rindas kārtas numuru, kurā atrodas elements, un otrais indekss j norāda kolonas kārtas numuru, kurā atrodas elements. Ja visi matricas elementi ir reāli skaitļi, tad šādu matricu sauksim par reālu matricu. Matricas diagonāle ir visi tie elementi, kuru indeksi vienādi, tie ir $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Piemērs 1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ ir 2×3 reālu skaitļu matrica, kuras elementi ir

$$a_{11} = 1, \qquad a_{12} = 4, \qquad a_{13} = 7,$$
$$a_{21} = 3, \qquad a_{22} = -1, \qquad a_{23} = -5.$$

Matricu veidi

Nulles matrica ir matrica, kuras visi elementi ir 0. Šādu matricu apzīmē O.

Piemērs 2

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dotā matrica O ir nulles matrica ar izmēru 4×2 .

Kvadrātiska matrica ir matrica ar vienādu rindu un kolonu skaitu, tās izmērs ir $n \ x \ n$.

Piemērs 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Matricai A ir 3 rindas un 3 kolonas. To sauc par trešās kārtas matricu.

Kvadrātiskas matricas elementus $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sauc par galveno diagonāli. Elementus $a_{1n}, a_{2\,n-1} a_{3\,n-2}, \dots, a_{n1}$ sauc par blakus diagonāli. Piemērā skaitļi 1; 6; -3 veido matricas A galveno diagonāli, bet skaitļi 3, 6, -1 - blakus diagonāli.

Vienības matrica ir kvadrātiska matrica, kur visi galvenās diagonāles skaitļi ir 1, bet visi pārējie nulles. Vienības matricu pieņemts apzīmēt I_n, kur n ir matricas kārta.

Piemērs 4

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Te dota ir ceturtās kārtas vienības matrica.

Augšējā trīsstūrveida matrica ir kvadrātiska matrica, kuras visi elementi zem galvenās diagonāles ir nulle.

Apakšējā trīsstūrveida matrica ir kvadrātiska matrica, kuras visi elementi virs galvenās diagonāles ir nulle.

Piemērs 5

Jebkura vienības matrica vienlaikus ir gan augšējā, gan apakšējā trīsstūrveida matrica.

Matricas A transponētā matrica A^T tiek iegūta, mainot matricas A rindas ar kolonām. Matricas A pirmā kolona ir matricas A^T pirmā rinda, otrā matricas A kolona ir matricas A^T otrā rinda un tā joprojām.

Piemērs 6

Matrica

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

Ir sekojošās matricas transponētā matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Divas matricas A un B ir *vienādas*, to pieraksta $A = B$, ja to izmēri sakrīt un elementi vienādās pozīcijās ir vienādi $a_{ij} = b_{ij}\ \ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\};\ \ \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Piemērs 7

Noteikt dotās matricas izmēru un norādīto matricas elementu:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$; $\qquad a_{14}$;

b) $C = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 8 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\qquad c_{31}$;

c) $B = \begin{bmatrix} x & y & w & e \\ z & 0 & 3 & t+1 \end{bmatrix}$; $\qquad b_{23}$;

d) $D = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$; $\qquad d_{1r}$ (katram $r \in \{1,2, \dots, n\}$).

Atrisinājums:

a) Matricai A ir viena rinda un 4 kolonas, tāpēc tās izmērs ir 1×4. Šādu matricu sauc par rindas matricu. Matricas elements ir $a_{14} = 0$.

b) Matricai C ir 4 rindas un 1 kolona, tāpēc tās izmērs ir 4×1. Šādu matricu sauc par kolonas matricu. Matricas elements ir $c_{31} = -2$.

c) Matricas B izmērs ir 2×4 . Elements $b_{23} = 3$.

d) Matricas D izmērs ir $1 \times n$. Tā ir rindas matrica. Elements $d_{1r} = u_r$.

Piemērs 8

Noteikt mainīgo x, y, z un w vērtības no vienādojuma

$$\begin{bmatrix} x+y & x+z \\ y+z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Atrisinājums:

Matricas $A = \begin{bmatrix} x+y & x+z \\ y+z & w \end{bmatrix}$ un $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ir vienādas, ja to elementi vienādajās pozīcijās ir vienādi. Izmantojot šo īpašību, sastādām vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x+z = 4 \\ y+z = 5 \\ w = 4 \end{cases}$$

Sekojošos aprēķinus veicam, kad pirmie trīs vienādojumi ir saskaitīti:

$$2x + 2y + 2z = 3 + 4 + 5$$
$$2(x + y + z) = 12$$
$$x + y + z = 6,$$

No tā seko

$$x = 6 - (y + z) = 6 - 5 = 1,$$
$$y = 6 - (x + z) = 6 - 4 = 2,$$
$$z = 6 - (x + y) = 6 - 3 = 3.$$

Tāpēc,

$$x = 1, y = 2, z = 3, w = 4.$$

3.2 Matricu aritmētika

a) Matricu saskaitīšana

Saskaitīt var tikai vienāda izmēra matricas. Ja matricu A un B izmērs ir $m \times n$, tad matricas $C = A + B$ izmērs arī ir $m \times n$. Matricas C elementu c_{ij} aprēķina pēc formulas

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Tas ir, saskaita abu matricu elementus vienādajās pozīcijās.

Piemērs 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$
$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+3 & 7+4 \\ 1+2 & 0+(-1) & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Matricas reizināšana ar skaitli

Pareizināt reālu skaitļu matricu ar skaitli nozīmē ar šo skaitli reizināt katru matricas elementu.

Piemērs 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = \frac{1}{2};$$
$$D = \lambda A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2 & \frac{1}{2}\cdot 3 & \frac{1}{2}\cdot 7 \\ \frac{1}{2}\cdot 1 & \frac{1}{2}\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Matrica ar mīnusa zīmi nozīmē

$$-A = (-1) \cdot A$$

c) Matricu atņemšana

Atņemt var tikai tās matricas, kurām ir vienādi izmēri. Ja matricām A un B ir vienāds izmērs, tad tāds pats izmērs ir arī to starpībai – matricai E:

$$E = A - B = A + (-B) = A + (-1) \cdot B$$

Piemērs 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$E = A - B = A + (-1) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 3+(-3) & 7+(-4) \\ 1+(-2) & 0+1 & 1+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-3 & 7-4 \\ 1-2 & 0-(-1) & 1-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Piemērs 4

Dotas matricas A, B, C

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.25 & 1 \\ 0 & -0.5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ un } C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aprēķināt:

a) $A + B$ b) $A - C$ c) $A + B - C$ d) $12B$

e) $2A - C$ f) $2A + 0.5C$ g) $2A^T$ h) $A^T + 3C^T$.

Atrisinājums:

a) $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & 1 \\ 0 & -0.5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0.25 & 1+1 \\ -1+0 & 0+(-0.5) \\ 1+1 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 2 \\ -1 & -0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A - C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-(-1) & 1-1 \\ -1-(-1) & 0-(-1) \\ 1-1 & -2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

c) $A + B - C = (A + B) - C = \begin{bmatrix} 0.25 & 2 \\ -1 & -0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & 1 \\ 0 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $12B = 12 \begin{bmatrix} 0.25 & 1 \\ 0 & -0.5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cdot 0.25 & 12 \cdot 1 \\ 12 \cdot 0 & 12 \cdot (-0.5) \\ 12 \cdot 1 & 12 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 0 & -6 \\ 12 & 36 \end{bmatrix}$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

e) $2A-C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix}$

f) $2A+0.5C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.5 & 0.5\\ -0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5 & 2.5\\ -2.5 & -0.5\\ 2.5 & -3.5\end{bmatrix}$

g) $2A^T=2\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}$

h) $A^T+3C^T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 4\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}.$

d) Matricu reizināšana

Matricu reizinājumu $F=A\cdot B$ var izpildīt tikai tad, ja matricas B rindu skaits sakrīt ar matricas A kolonu skaitu. Ja matricas A izmērs ir $m\times n$ un matricas B izmērs ir $n\times k$, tad matricas $F=A\cdot B$ izmērs ir $m\times k$ un tās katru elementu aprēķina pēc formulas

$$f_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Piemērs 5

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & -1\\ 1 & -5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\ 2 & -2 & 4 & 0\end{bmatrix};$$

$$F=A\cdot B=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 11 & 13 & 20\\ 12 & 23 & 3 & 28\\ -8 & 13 & -19 & 4\end{bmatrix}.$$

$$f_{12}=\sum_{k=1}^{2}a_{1k}b_{k2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=5\cdot 3+2\cdot(-2)=11,$$
$$f_{23}=\sum_{k=1}^{2}a_{2k}b_{k3}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}=7\cdot 1+(-1)\cdot 4=3,$$
$$f_{31}=\sum_{k=1}^{2}a_{3k}b_{k1}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}=1\cdot 2+(-5)\cdot 2=-8,$$

…

Piemērs 6

$$\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -3\end{bmatrix}=[3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot(-3)]=[-4];$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ -9 & -12 & -15 \end{bmatrix}.$$

Piemērs 7

Aprēķināt matricu $F = A \cdot B$, ja

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$ un $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ un $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ un $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Atrisinājums

a) Matrica F nav definēta tāpēc, ka matricas B rindu skaits nesakrīt ar matricas A rindu skaitu. Matricai B ir viena rinda, bet matricai A ir divas kolonas.

b) $F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \end{bmatrix}$, tas ir, F ir matrica ar izmēru 1×3, jo matricas A izmērs ir 1×4, bet matricas B izmērs irs 4×3.

$$f_{11} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} b_{lk} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}$$
$$= -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 0,$$

$$f_{12} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42}$$
$$= -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 31,$$

$$f_{13} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} b_{k3} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} + a_{14}b_{43}$$
$$= -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7.$$

Tāpēc $F = \begin{bmatrix} 0 & 31 & 7 \end{bmatrix}$.

c) $F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix}$,tas ir, F matricas izmērs ir 2×3, jo matricas A izmērs ir 2×3, bet matricas B izmērs ir 3×3.

$$f_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 4,$$

$$f_{12} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 8 = 9,$$

$$f_{13} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1,$$

$$f_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 9,$$

$$f_{22} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 8 = 15,$$

$$f_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2.$$

Tāpēc, $F = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -1 \\ 9 & 15 & 2 \end{bmatrix}$.

d) Meklētā matrica ir $F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$ tāpēc, ka abām matricām A un B izmērs ir 3×3.

$$f_{12} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 3,$$

$$f_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 9,$$

$$f_{31} = \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0.$$

Līdzīgi nosaka arī pārējos matricas elementus. Iegūstam

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svarīgākās matricu reizinājuma īpašības:

a) Matricu reizinājums ir *asociatīvs*, tas ir, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, ja visi reizinājumi ir definēti.

b) Matricu reizinājums *visbiežāk nav komutatīvs*. Tas nozīmē, ka reizinājums $A \cdot B$ nav vienāds ar $B \cdot A$. Reizinājums var būt arī komutatīvs, ja abas matricas ir kvadrātiskas ar vienādu rindu skaitu. Kā vienkāršu piemēru var minēt triviālu gadījumu, kur abas matricas satur visus vienādus elementus, piemēram,

$$A = B = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Varam aplūkot iepreikšējo *Piemēru 5* - te nav iespējams aprēķināt reizinājumu $B \cdot A$. Arī *Piemērā 6* ir aplūkoti abi reizinājumi, bet tie nav savstarpēji komutatīvi, jo reizinot tiek iegūtas dažāda izmēra matricas.

Matricu polinoms

Matrica A ir n-tās kārtas reālu skaitļu matrica un m-tās kārtas polinoms ir

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m, \text{ kur } x, a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}.$$

Tad $P_m(A)$ definē sekojošā veidā:

$$P_m(A) = a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + a_2 \cdot A^2 + \cdots + a_m \cdot A^m$$

kur

$$\begin{aligned} &A^0 = I_n, \\ &A^1 = A, \\ &A^2 = A \cdot A, \\ &A^3 = A^2 \cdot A \overset{\text{a)}}{=} A \cdot A^2, \\ &\vdots \\ &A^m = A^{m-1} \cdot A \overset{\text{a)}}{=} A \cdot A^{m-1}. \end{aligned}$$

Jāatzīmē, ka $P_m(A)$ arī ir kvadrātiska matrica un tai ir tāda pati kārta, kā matricai A.

Piemērs 8

Dota matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ un polinoms $P_3(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x + 3$. Noteikt $P_3(A)$.

Atrisinājums:

$$P_3(A) = 3A^3 + 2A^2 + 2A + 3I_2$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3(A) = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4I_2$$

Piemērs 9

Doti polinoms $P_3(x) = x^3 - x^2 - 2x$ un matrica $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Pierādiet identitāti: $P_3(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Atrisinājums:

$$P_3(A) = A^3 - A^2 - 2A$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3(A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Kvadrātiskas matricas determinants

Matrica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ir n-tās kārtas reālu skaitļu matrica.

Matricas A *determinants* ir skaitlis, ko pieraksta

$$\det A \quad \text{vai} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ja $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{11}}]$, tad $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_{11}}$.

Ja $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{bmatrix}$, tad $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$.

Trešās kārtas determinants

Par matricas A ***trešās kārtas determinantu*** sauc skaitli, ko aprēķina sekojošā veidā:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Par matricas A elementa a_{ij} *minoru* sauc determinantu, ko iegūst, izsvītrojot matricas A $i - to$ rindu un $j - to$ kolonu. Šo skaitli (determinantu) apzīmē M_{ij}.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Piemērs 1

Matricas $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ minori ir

$$M_{11} = -4\,, M_{12} = 2\,, M_{21} = 1\,, M_{22} = 3.$$

Piemērs 2

Matricas $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ daži minori ir

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 56\,, M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 40\,, M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\,, M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -4$$

Par matricas A elementa $\boldsymbol{a_{ij}}$ *algebrisko papildinājumu* jeb *adjunktu* sauc skaitli, ko aprēķina pēc sekojošās formulas:

$$\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}.$$

Piemērs 3

Matricas $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ daži algebriskie papildinājumi ir

$$A_{11} = M_{11} = 56\,, A_{12} = -M_{12} = -40\,, A_{13} = M_{13} = 2\,, A_{21} = -M_{21} = 4$$

Determinanta Laplasa izvirzījums

Sekojošās formula lieto *determinanta Laplasa izvirzījumam pēc rindas vai kolonas*, ja determinanta $A = [a_{ij}]$ kārta ir $n \geq 2$:

Laplasa izvirzījums pēc i-tās rindas

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

Laplasa izvirzījums pēc j-tās kolonas

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

Piemērs 4

Izvirzīt determinantu $\det A$:

a) pēc pirmās rindas,

b) pēc otrās kolonas,

ja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Atrisinājums: $n = 3$

a)

$$\det A = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3 \cdot 56 + 1 \cdot (-40) + 2 \cdot 2 = 132$$

b)

$$\det A = \sum_{k=1}^{3} a_{k2}A_{k2} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -40 + 112 + 60 = 132$$

Determinantu īpašības:

Dotas kvadrātiskas matricas $\boldsymbol{A}$ un $\boldsymbol{B}$.

1) Ja matricas $\boldsymbol{A}$ rinda (vai kolona) satur tikai visas nulles, tad $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

2) Ja matrica $\boldsymbol{A}$ satur divas proporcionālas rindas (vai kolonas), tad $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

3) Ja matricas $\boldsymbol{A}$ rinda (kolona) ir pārējo rindu (kolonu) lineāra kombinācija, tad $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

4) Vienības matricas determinants ir $\mathbf{1}$.

5) Ja matrica $\boldsymbol{A}$ ir trīsstūrveida, tad tās determinanta vērtību var aprēķināt, sareizinot visus galvenās diagonāles elementus.

6) Matricas $\boldsymbol{A}$ vērtība nemainās, ja kādu tās rindu (kolonu) pareizina ar skaitli un pieskaita citai rindai (kolonai).

7) Ja samaina vietām matricas $\boldsymbol{A}$ divas rindas (kolonas), tad determinanta $\boldsymbol{detA}$ zīme mainās uz pretējo.

8) Ja matricas rindas (kolonas) visi elementi satur vienu un to pašu reizinātāju, tad to var iznest pirms determinanta zīmes. Piemēram,

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

9) $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{det}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$.

10) $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \mathbf{det}\,\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{det}\,\boldsymbol{B}$.

Piemērs 5

Aprēķināt $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}$ vērtību, izmantojot determinanta īpašības, ja $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Atrisinājums:

Pirmā metode (Laplasa izvirzījums pēc pirmās kolonas):

$$det\ A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 5R_2 \\ \\ R_3 - 2R_2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 0 & -16 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{4} a_{k1}A_{k1} = a_{21}A_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 0 & -16 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} R_2 - 3R_3 =$$

$$= -\begin{vmatrix} -6 & 0 & -16 \\ -7 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -6 & -16 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 16 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(6 - 16) = -70$$

Otrā metode (determinanta izvirzījums pēc 4-tās rindas); uzdevumā tiek izpildīta kolonu atņemšana:

$$det\ A = \underset{K_2 - 2K_3;\ \ K_4 - K_3}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{4} a_{4k}A_{4k} = a_{43}A_{43} = -1 \cdot \underset{K_3 - 3K_1}{\begin{vmatrix} 5 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{vmatrix}} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 5 & -6 & -16 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -7 \end{vmatrix} = -\sum_{k=1}^{3} a_{2k}A_{2k} = -a_{21}A_{21} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -6 & -16 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = -70$$

3.4 Inversā matrica

Dota n-tās kārtas kvadrātiska matrica A.
Matricu A sauc par *nesingulāru jeb regulāru*, ja $\det A \neq 0$. Matrica A ir *singulāra*, ja $\det A = 0$.
Inversā matrica eksistē tikai nesingulārai matricai.
Par matricas A *inverso matricu* sauc matricu B, ja

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

kur I_n ir n-tās kārtas vienības matrica. Arī matrica B ir n-tās kārtas nesingulāra matrica, ko apzīmē A^{-1}.

Inversās matricas aprēķināšana, izmantojot determinantus

Regulāras $\boldsymbol{n}$-tās kārtas matricas $\boldsymbol{A}$ inverso matricu $\boldsymbol{A^{-1}}$ aprēķina pēc formulas:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}},$$

kur $\boldsymbol{A_{ij}}$ ir matricas elementa $\boldsymbol{a_{ij}}$ algebriskais papildinājums.

Parasti šo formulu lieto neliela izmēra matricām ($n = 2$ and $n = 3$), jo, lai noteiktu matricu A^{-1}, ir nepieciešams aprēķināt $(n-1)$-kārtas determinantus skaitā n^2.

Piemērs 1

Aprēķināt matricas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ inverso matricu.

Atrisinājums: $n = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{1\cdot 4 - 3\cdot 2}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\cdot 4 & (-1)^{2+1}\cdot 2 \\ (-1)^{1+2}\cdot 3 & (-1)^{2+2}\cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Piemērs 2

Aprēķināt matricas $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ inverso matricu.

Atrisinājums: $n = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 = 1$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1) = 1$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(1+1) = 2$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot 0 = 0$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2) = -2$$

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 = -2$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) = -2$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3.5 Matricu vienādojumi

Matricu vienādojumi ir tādi vienādojumi, kur nezināmais vai vairāki nezināmie ir matricas. Lai atrisinātu šādu vienādojumu, ir jāatrod visas matricas, kas apmierina vienādojumu.

Kā atrisināt vienādojumus
$$AX = B \text{ and } YA = B,$$
kur ir dotas matricas A un B, bet matricas X un Y nav zināmas?

Pieņemsim, ka A ir regulāra n-tās kārtas matrica.
Tad inversā matrica A^{-1} eksistē, un, reizinot pirmo vienādojumu ar A^{-1} no kreisās puses, iegūstam
$$A^{-1} \cdot / \, AX = B$$
$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$I_n X = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B.$$

Otro vienādojumu reizinām ar A^{-1} no labās puses

$$YA = B / \cdot A^{-1}$$
$$(YA)A^{-1} = BA^{-1}$$
$$Y(AA^{-1}) = BA^{-1}$$
$$YI = BA^{-1}$$
$$Y = BA^{-1}.$$

Atzīmēsim, ka vispārīgā gadījumā matricas $X \text{ un } Y$ nav vienādas, jo matricu reizinājums vispārīgā gadījumā var nebūt komutatīvs.

Piemērs 1

Atrisināt vienādojumu $AX - B = A^2X - I_2$, ja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ un $B = \begin{bmatrix} -85 & -100 \\ -186 & -215 \end{bmatrix}$.

Atrisinājums:

$$AX - B = A^2X - I_2$$
$$AX - A^2X = B - I_2$$
$$(A - A^2)^{-1} \cdot / (A - A^2)X = B - I_2$$
$$I_2X = (A - A^2)^{-1}(B - I_2)$$
$$X = (A - A^2)^{-1}(B - I_2)$$

Vienādojums spēkā, ja $A - A^2$ ir regulāra matrica.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \qquad A - A^2 = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -12 & -18 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - A^2) = 12 \neq 0$$

$$B - I_2 = \begin{bmatrix} -86 & -100 \\ -186 & -216 \end{bmatrix} \qquad (A - A^2)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -18 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$X = (A - A^2)^{-1}(B - I_2) = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -18 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -86 & -100 \\ -186 & -216 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 60 & 72 \\ 84 & 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Piemērs 2

Atrisināt vienādojumu $AX^{-1}B + C = AX^{-1}$, ja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ un } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atrisinājums:

Var pierādīt, ka regulārām matricām A un B ir spēkā:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ja abi reizinājumi AB and $B^{-1}A^{-1}$ eksistē.

$$A^{-1}\cdot / \; AX^{-1}B + C = AX^{-1}$$

$$\underbrace{\left(A^{-1}A\right)}_{=I_3}X^{-1}B + A^{-1}C = \underbrace{\left(A^{-1}A\right)}_{=I_3}X^{-1}$$

$$X\cdot / \; X^{-1}B + A^{-1}C = X^{-1}$$

$$\underbrace{\left(XX^{-1}\right)}_{=I_3}B + X\left(A^{-1}C\right) = \underbrace{XX^{-1}}_{=I_3}$$

$$B + X\left(A^{-1}C\right) = I_3$$

$$X\left(A^{-1}C\right) = I_3 - B / \cdot \left(A^{-1}C\right)^{-1}$$

$$X = \left(I_3 - B\right)\left(A^{-1}C\right)^{-1} = \left(I_3 - B\right)C^{-1}A$$

Vienādojums pareizs, ja X ir regulāra matrica

$$I_3 - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = (I_3 - B)C^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -6 & 7 & -14 \\ -4 & 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & -3.5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Vienādojumu $AX + XB = C$ nevar atrisināt, lietojot inverso matricu. Nezināmā matrica X ir matricas A reizinātājs no labās puses un matricas B reizinātājs no kreisās puses. Tā kā matricu reizinājums var nebūt komutatīvs, matricu X nevar iznest pirms iekavām kā kopīgo reizinātāju:

$$AX + XB \neq AX + BX = (A + B)X,$$
$$AX + XB \neq XA + XB = X(A + B).$$

Nav grūti ievērot, ka vienādojumam $AX + XB = C$ ir jēga tikai tad, ja visas vienādojumā iekļautās matricas ir kvadrātiskas. Tad Matricas X izmērs ir vienads ar matricas A izmēru.

Kā atrisināt šādu vienādojumu, ir parādīts nākamajā piemērā.

Piemērs 3

Atrisināt vienādojumu $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}X + X\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}$.

Atrisinājums:

X ir otrās kārtas matrica, tas ir, $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$. Matricas X nezināmie ir iekļauti vienādojumā:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x_{11} + x_{21} & 4x_{12} + x_{22} \\ -3x_{11} + 2x_{21} & -3x_{12} + 2x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11} + 5x_{12} & 3x_{11} + 7x_{12} \\ x_{21} + 5x_{22} & 3x_{21} + 7x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5x_{11}+5x_{12}+x_{21} & 3x_{11}+11x_{12}+x_{22} \\ -3x_{11}+3x_{21}+5x_{22} & -3x_{12}+3x_{21}+9x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}.$$

Divas vienāda izmēra matricas ir vienādas tad un tikai tad, ja visi to elementi, kas atrodas matricu vienādajās pozīcijas, ir vienādi. Tā mēs iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 5x_{11} & + & 5x_{12} & + & x_{21} & = & -4 \\ 3x_{11} & + & 11x_{12} & + & x_{22} & = & -1 \\ -3x_{11} & + & 3x_{21} & + & 5x_{22} & = & 16 \\ -3x_{12} & + & 3x_{21} & + & 9x_{22} & = & 21 \end{cases}.$$

Šo sistēmu var atrisināt vienkārši.

No pirmā vienādojuma: $x_{21} = -4 - 5x_{11} - 5x_{12}$.

No otrā vienādojuma: $x_{22} = -1 - 3x_{11} - 11x_{12}$.

Ievietojot iepriekšējās izteiksmes trešajā un ceturtajā vienādojumā, iegūstam:

$$\begin{aligned} -3x_{11} + 3(-4 - 5x_{11} - 5x_{12}) + 5(-1 - 3x_{11} - 11x_{12}) = 16 \\ -3x_{12} + 3(-4 - 5x_{11} - 5x_{12}) + 9(-1 - 3x_{11} - 11x_{12}) = 21 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} -33x_{11} & - & 70x_{12} & = & 33 \\ -42x_{11} & - & 117x_{12} & = & 42 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{11} = -1\,, x_{12} = 0$$

$$\begin{aligned} x_{21} &= -4 - 5x_{11} - 5x_{12} = -4 - 5\cdot(-1) - 5\cdot 0 = 1 \\ x_{22} &= -1 - 3x_{11} - 11x_{12} = -1 - 3\cdot(-1) - 11\cdot 0 = 2. \end{aligned}$$

Tātad matrica $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ir dotā vienādojuma vienīgais atrisinājums.

Līdzīgi var atrisināt arī tādus vienādojumus $AX = B$ un $YA = B$, kur nezināmie ir X un Y, arī tad, ja matrica A nav ne kvadrātiska, ne regulāra.

3.6 Matricas rangs

Viens no terminiem, iepazīstoties ar kvadrātisku matricu determinantiem, bija matricas elementam a_{ij} atbilstošais minors M_{ij}.

Par *matricas A rangu* sauc skaitli $\boldsymbol{r}(A)$, ja matrica satur vismaz vienu r-tās kārtas no nulles atšķirīgu minoru, bet visi tās $r+1$ – kārtas minori ir vienādi ar nulli.

Neliela izmēra matricām rangu var noteikt, aprēķinot matricas minorus.

Piemērs 1

Aprēķināt matricas A rangu, ja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Atrisinājums:

Izveidosim lielāko iespējamo matricas minoru. Tas ir dotās matricas determinants

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{+2R_1} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ja determinanta kāda rinda satur visas nulles, tad tā vērtība ir nulle. Tāpēc matricas A rangs ir mazāks par 4. Ja kāds no matricas A trešās kārtas minoriem atšķiras no nulles, tad matricas rangs ir 3. Aplūkosim kādu trešās kārtas minoru

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} -R_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

Esam atraduši trešās kārtas minoru, kura vērtība nav nulle. Tāpēc matricas A rangs $r(A)$ ir 3.

Matricas rangu var aprēķināt arī universālākā veidā, izmantojot *Gausa metodi*. Te galvenā ideja ir pārveidot doto matricu trīsstūrveida matricā (vai arī diagonālmatricā, kur tikai uz galvenās diagonāles ir visi vienīgie no nulles atšķirīgie skaitļi). Pārveidotajā matricā lielākais minors, kas nav nulle, saturēs galveno diagonāli ar visiem no nulles atšķirīgiem skaitļiem. Saskaņā ar definīciju, matricas A rangs ir šī minora kārta.

Gausa metodi realizē, izpildot matricas A *elementāros pārveidojumus*. Tā iegūst ekvivalentu matricu B. Matricu ekvivalenci apzīmē $A \sim B$. Ekvivalentām matricām ir vienāds rangs.

Veicot elementāros pārveidojumus matricā A, drīkst:

- Mainīt vietām divas rindas vai divas kolonas;
- Pareizināt rindu (kolonu) ar skaitli;
- Pareizināt rindu (kolonu) ar skaitli un pieskaitīt citai rindai (kolonai);
- Izsvītrot rindu (kolonu), kas satur visas nulles;
- Izsvītrot vienu no divām rindām (kolonām), ja tās ir proporcionālas.

Īss Gausa metodes apraksts:

- Pārbauda, vai matricas elements $a_{11} \neq 0$. Ja tas ir nulle, tad samaina vietām rindas vai kolonas, lai $a_{11} \neq 0$.

- Pirmo rindu, pareizinātu ar atbilstošu koeficientu, atņem no visām pārējām rindām tā, lai pirmajā kolonā būtu visas nulles, izņemot $a_{11} \neq 0$.
- Pārbauda, vai $a_{22} \neq 0$. Ja $a_{22} = 0$ un visi skaitļi šajā kolonā zem galvenās diagonāles ir 0, tad pāriet pie trešās rindas. Ja nosacījums nav izpildīts, rindu samaina vai nu ar citu zemākstāvošo rindu, vai arī kolonu, kas atrodas no otrās kolonas pa labi.
- Otro rindu, pareizinātu ar atbilstošu koeficientu, atņem no visam rindām, kas atrodas zem galvenās diagonāles tā, lai otrajā kolonā būtu visas nulles zem galvenās diagonāles.
- Tā turpina, līdz iegūst dotajai matricai ekvivalentu matricu, kur zem galvenās diagonāles ir visas nulles (trīsstūrveida vai trapecveida matricu).

Piemērs 2

Noteikt matricas A rangu, ja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix}$.

Atrisinājums:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 + 2R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - 3R_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Darbību apraksts:

- Vispirms samaina vietām pirmo un otro rindu,
- Trešajai rindai pieskaita pirmo rindu, pareizinātu ar 2, tā iegūstot pirmajā kolonā visas nulles, izņemot skaitli pirmajā rindā,
- No trešās rindas atņem otro rindu, pareizinātu ar 3, tā iegūstot trīsstūrveida matricu, kur zem galvenās diagonāles ir visas nulles,
- Uz galvenās diagonāles ir divi nenulles skaitļi, tāpēc matricas rangs ir 2.

Piemērs 3

Noteikt rangu matricai $A = \begin{bmatrix} 9 & 20 & 6 \\ 10 & 9 & -5 \\ 8 & 31 & 17 \end{bmatrix}$.

Atrisinājums:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 20 & 6 \\ 10 & 9 & -5 \\ 8 & 31 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - R_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -11 & -11 \\ 10 & 9 & -5 \\ 8 & 31 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - 10R_1 \sim \\ R_3 - 8R_1 \end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -11 & -11\\ 0 & 119 & 105\\ 0 & 119 & 105\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ R_3-R_2\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -11 & -11\\ 0 & 119 & 105\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Iegūstam - matricas rangs ir $r(A)=2$.

Piemērs 4

Noteikt matricas $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & m^2 & m^2\end{bmatrix}$ rangu, kas atkarīgs no parametra m.

Atrisinājums:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & m^2 & m^2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ R_2-R_1\\ R_3-R_1\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m-1 & 0\\ 0 & m^2-1 & m^2-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ R_3\\ R_2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m^2-1 & m^2-1\\ 0 & m-1 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\qquad\quad & K_3 & \qquad K_2\end{matrix}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m^2-1 & m^2-1\\ 0 & 0 & m-1\end{bmatrix}$$

Vispārīgā gadījumā matricas rangs ir $r(A)=3$. Tomēr, ievērojot, ka gadījumos $m=1$ un $m=-1$ uz galvenās diagonāles var būt arī viena vai divas nulles, matricas rangs būs mazāks.

Ja $m=1$, tad matrica $A\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ un tā rangs ir $r(A)=1$

Ja $m=-1$, tad matrica $A\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ un tā rangs ir $r(A)=2$

Ievērojot iespējamās skaitļa m vērtības, iegūstam

$$\begin{aligned}&m=1\Rightarrow r(A)=1,\\ &m=-1\Rightarrow r(A)=2,\\ &m\notin\{-1,1\}\Rightarrow r(A)=3.\end{aligned}$$

Piemērs 5

Pie kāda parametra t matricas rangs ir 3?

$$A=\begin{bmatrix}t & 1 & 1 & 1\\ 1 & t & 1 & 1\\ 1 & 1 & t & 1\\ 1 & 1 & 1 & t\end{bmatrix}$$

Atrisinājums:

$$A=\begin{bmatrix}t & 1 & 1 & 1\\ 1 & t & 1 & 1\\ 1 & 1 & t & 1\\ 1 & 1 & 1 & t\end{bmatrix}\begin{matrix}R_4\\ \\ \\ R_1\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & t\\ 1 & t & 1 & 1\\ 1 & 1 & t & 1\\ t & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ R_2-R_1\\ R_3-R_1\\ R_4-tR_1\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & t\\ 0 & t-1 & 0 & 1-t\\ 0 & 0 & t-1 & 1-t\\ 0 & 1-t & 1-t & 1-t^2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ R_4+R_2\end{matrix}\sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t & 2-t-t^2 \end{bmatrix} R_4 + R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 3-2t-t^2 \end{bmatrix}$$

Aplūkosim gadījumus

Ja $t = 1$, tad uz galvenās diagonāles būs 3 nulles:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Šādas matricas rangs ir 1;

Matricas rangs varētu būt 3, ja $3 - 2t - t^2 = 0$. Atrisinot šo vienādojumu, iegūstam 2 saknes $x_1 = 1 \;\; un \; x_2 = -3$. Tad matrica ir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tātad, ja $t = -3$, tad dotās matricas rangs ir $r(A) = 3$.

Pārbaude: Lielākais minors, ko var izveidot no pēdējās matricas ir ar kārtu 4. Tā vērtība ir aprēķināma, kā diagonāles visu skaitļu reizinājums, kas dod rezultātu 0

$(1 \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot 0 = 0)$

Trešās kārtas minoru var sastādīt, izsvītrojot dotās matricas ceturto kolonu un ceturto rindu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot (-4) = 16 \neq 0$$

Tātad matricas rangs ir tāds pats kā šī minora kārta: $r(A) = 3$

Piemērs 6

Aprēķināt matricas $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ rangu.

Atrisinājums:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 + 2R_1 \sim \\ R_4 - 6R_1 \\ R_5 + R_1 \end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -9 & 14 & -6 & 1 & -5\\ 0 & 12 & -19 & 8 & -1 & 7\\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ R_3+3R_2\sim\\ R_4-4R_2\\ R_5+R_2\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ R_4+R_3\\ R_5-R_3\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Tad matricas rangs ir $r(A) = 3$.

Piezīme: Pārbaudi var veikt ar kādas datorprogrammas palīdzību, piemēram, MS Excel, vai interneta brīvas pieejas kalkulatoriem (Quickmath Solver; Matrix Calculator, un citām)

3.7 Sakarība starp matricām un vektoriem

Aplūkojot daudzdimensionālus vektorus, tos var uzdot arī matricu formā.
Kolonas matricu var saukt arī par *kolonas vektoru* (vai vienkārši *vektoru*).
Rindas matricu var saukt par *rindas vektoru*.

Piemērs 1

$$C = \begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}$$

ir 3-dimensiju vektors, kura komponentes ir $1{,}4$ un 7.

Vektors C ir *nulles vektors*, ja visas tās komponentes ir nulle..
Līdzīgi tiek definēts nulles vektors, kas pierakstīts kā rindas matrica.
Nulles vektoru (rindas vai kolonas) apzīmē ar O.
Nenulles rindas (kolonas) vektors ir rindas (kolonas) vektors, kuram vismaz viena komponente atšķiras no nulles.

Piemērs 2

Matricu $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$ var pierakstīt formā

$$A = [C_1 \quad C_2],$$

kur $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ un $C_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ir kolonas vektori.

Matricu A var pierakstīt arī formā

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix},$$

Kur $R_1 = [1 \quad 2]$, $R_2 = [3 \quad 4]$ un $R_3 = [5 \quad 6]$ ir rindas vektori.

Vienādas dimensijas $C_1, C_2, \dots, C_n$ *vektoru lineāra kombinācija* ir tādas pašas dimensijas vektors, ko aprēķina pēc formulas

$$C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n ,$$

kur $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ir reāli skaitļi.

Atzīmēsim, ka no $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ seko $C = 0$.

Savukārt, ja $C = O$, no tā nevar secināt, ka

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Aplūkosim vektoru kopas lineārās neatkarības jēdzienu. Vektoru kopa $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ir *lineāri neatkarīga* tikai tad, ja vienādojumam

$$C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n$$

eksistē tikai triviālais atrisinājums, tas ir,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Vektoru kopa ir *lineāri atkarīga* pretējā gadījumā.

Minēsim sekojošas īpašības:

1. Divi vektori ir lineāri atkarīgi, ja tie ir kolineāri, tas ir, to koordinātes ir pa pāriem proporcionālas. Piemēram, $A = [1\ 1\ 2\ 1]$ un $B = [2\ 2\ 4\ 2]$ ir lineāri atkarīgu vektoru kopa, jo $B = 2A$.
2. Vektoru kopa, kas satur nulles vektoru, ir lineāri atkarīga.
3. Lineāri atkarīgas vektoru kopas jebkura apakškopa arī ir lineāri atkarīga.

3.8 Lineāru vienādojumu sistēmas

Sistēmu, kas sastāv no m lineāriem algebriskiem vienādojumiem ar n nezināmajiem $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \quad (1)$$

var pierakstīt matricu formā, kā matricu vienādojumu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2)$$

Jeb

$$A \cdot X = B,$$

kur

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ir *sistēmas koeficientu matrica*, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ir *nezināmo matrica jeb vektors* un $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ ir *brīvo locekļu matrica jeb vektors*.

Vienādojumu sistēmu (1) sauc par *homogēnu vienādojumu sistēmu*, ja $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Ja kaut viens skaitlis $b_i\ , i = 1,2, \ldots, m$ atšķiras no 0, tad sistēmu sauc par *nehomogēnu* vienādojumu sistēmu.

Jebkurai homogēnai vienādojumu sistēmai eksistē *triviālais atrisinājums*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Saka, ka X ir sistēmas netriviālais atrisinājums, ja kaut viena tā komponente (saka arī – koordināte) jeb elements nav 0.

Var izveidot sistēmas paplašināto matricu $\tilde{A}$, pierakstot visus skaitliskos koeficientus pie nezināmajiem, kā arī brīvos locekļus:

$$\tilde{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Kronekera-Kapelli teorēma:

Lineāru vienādojumu sistēmai ir vismaz viens atrisinājums tad un tikai tad, ja tās sistēmas matricas rangs r ir vienāds ar paplašinātās matricas rangu $\bar{r}$.

Ja sistēmas nezināmo skaits ir n, tad

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

1) Ja $r(A) = r(\tilde{A}) = n$ jeb $r = \bar{r} = n$, tad sistēma ir saderīga (tai eksistē atrisinājums) un noteikta – atrisinājums ir viens vienīgs;
2) Ja $r = \bar{r} < n$, tad sistēma ir saderīga, bet nenoteikta – tai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu;
3) Ja $r \neq \bar{r}$, tad sistēma ir nesaderīga (jeb pretrunīga) – tās atrisinājums neeksistē.

Gadījums a)

sistēma ir saderīga un noteikta:

Kvadrātiskai sistēmai, kurai ir vienāds nezināmo un vienādojumu skaits un $m = n = r(A) = r(\tilde{A})$ $(\det A \neq 0)$, ir viens vienīgs atrisinājums, kuru var aprēķināt

I. pēc Gausa nezināmo izslēgšanas metodes (turpmāk: Gausa metode),

II. pēc matricu metodes

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B\,, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

III. ar Krāmera formulām

$$x_i = \frac{D(x_i)}{\det A}\,, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

kur $D(x_i)$ ir mainīgā x_i palīgdeterminants, kuru iegūst no sistēmas determinanta $\det A$, aizvietojot i-to kolonu ar brīvajiem locekļiem

$$D(x_i) = \left| \begin{array}{cccc:c:ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right|.$$

Gadījums b)

sistēma ir saderīga un nenoteikta:

Vienādojumu sistēmai, kurai rangs $r(A) = r(\tilde{A}) = r < n$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu un to var risināt pēc Gausa metodes. Tiek izvēlēti r lineāri neatkarīgi vienādojumi ar r nezināmajiem. Šos r nezināmos aprēķina, izsakot tos ar atlikušo $n - r$ nezināmo palīdzību.

Piezīme 1:

Homogēnai vienādojumu sistēmai, kurā ir vienāds nezināmo un vienādojumu skaits, netriviālais atrisinājums eksistē tad un tikai tad, ja sistēmas determinants $\det A = 0$.

Piezīme 2:

Lai iegūtu ekvivalentu matricu sistēmas paplašinātajai matricai $\tilde{A}$, elementāros pārveidojumus var veikt tikai rindām (ne kolonām).

Piezīme 3:

Jebkuru lineāru vienādojumu sistēmu var atrisināt pēc Gausa metodes. Dotajai sistēmas paplašinātajai matricai veic elementāros pārveidojumus, lai iegūtu trīsstūrveida matricu. Tad matricas rindas atkal tiek pierakstītas kā vienādojumi, sākot ar apakšējo rindu. Ja vienādojums nav pretrunīgs (tas ir, sistēmai eksistē atrisinājums), tad no pēdējā vienādojuma izsaka nezināmo, ko ievieto visos iepriekšējos vienādojumos. Tā ar ievietošanas metodi atrod visus nezināmos, sākot no apakšējā vienādojuma un virzoties uz augšu.

Piezīme 4: Ja vienādojumu sistēmai nav atrisinājuma, tad to sauc par *nesaderīgu jeb pretrunīgu* vienādojumu sistēmu. Tas ir spēkā tad un tikai tad, ja $r(A) \neq r(\tilde{A})$. No matricu vienādojuma viedokļa, tas nozīmē, ka nav tādas matricas X, ka $A \cdot X = B$.

Piemērs 1

Atrisināt doto vienādojumu sistēmu,

a) ar Krāmera formulām,

b) pēc matricu metodes,

c) pēc Gausa metodes.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Atrisinājums:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right], X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_3 \\ R_2 - 3R_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} R_2 + R_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$$

a) Sistēmas atrisināšana ar Krāmera formulu palīdzību:

$$D(x_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - 3R_3 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - R_3 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 11 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - 2R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} R_2 - 2R_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{D(x_1)}{\det A} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$D(x_2)=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} R_1-2R_3 \\ R_2-3R_3 \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} R_2+2R_1=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2 \Rightarrow x_2=\frac{D(x_2)}{\det A}=\frac{-2}{1}=-2$$

$$D(x_3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} R_1-2R_3 \\ R_2-3R_3 \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} R_2+R_1=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2 \Rightarrow x_3=\frac{D(x_3)}{\det A}=\frac{2}{1}=2$$

b) Sistēmas atrisināšana pēc matricu metodes:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=6\,, A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4\,, A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=-23$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2\,, A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1\,, A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=7$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1\,, A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1\,, A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=5$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix} 6 & 4 & -23 \\ -2 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\Rightarrow x_1=3\,, x_2=-2\,, x_3=2$$

c) Sistēmas atrisināšana pēc Gausa metodes:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right]\begin{matrix} R_3 \\ \\ R_1 \end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ R_2-3R_1 \\ R_3-2R_1 \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ R_3+R_2 \end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Pēdējais vienādojums (3 rinda): $-x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2$

Otrā rinda: $x_2 - 2x_3 = -6 \Rightarrow x_2 = 2x_3 - 6 = 2 \cdot 2 - 6 = -2$

Pirmā rinda: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - 2x_2 - 2x_3 = 3 - 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 = 3$

Piemērs 2

Doto lineāro vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 4x_2 & = & 11 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & = & 10 \end{cases}$$

atrisināt ar Krāmera formulām un pēc matricu metodes.

Atrisinājums:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Krāmera formulas:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 16 = -7$$

$$D(x_1) = \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 33 - 40 = -7 \Rightarrow x_1 = \frac{D(x_1)}{\det A} = 1$$

$$D(x_2) = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 44 = -14 \Rightarrow x_2 = \frac{D(x_2)}{\det A} = 2$$

Matricu metode:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 33 - 40 \\ -44 + 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$$

Piemērs 3

Atrast visus dotās sistēmas atrisinājumus.

$$\begin{cases} 4x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 4x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{cases}$$

Atrisinājums:

Dotajai sistēmai nevar lietot Krāmera formulas vai matricu metodi, jo $n > m \geq r(A)$.

Risināšanā lietosim Gausa metodi. Vispirms aprēķināsim paplašinātās sistēmas matricas rangu.

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 3 & -3 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & -5 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_4 \\ \\ R_1 \\ R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & -3 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & -5 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1 \\ R_4 - 7R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -10 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - 2R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = 2$$

Tātad sistēmai ir vismaz viens atrisinājums.

Ievērosim, ka sistēmas paplašinātajai matricai pēc pārveidojumiem ir palikušas tikai divas rindas, kas nesatur visas nulles, tāpēc rindas ar nullēm var izsvītrot

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right]$$

Atlikušas ir divas lineāri neatkarīgas rindas. Tāpēc var izteikt divus nezināmos, piemēram, x_1 un x_2, parējos trīs nezināmos x_3, x_4, x_5 izsakot kā konstantes

$$x_3 = \alpha\,, x_4 = \beta\,, x_5 = \gamma, \text{kur } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Restaurējam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 5x_5 & = & -2 \end{cases},$$

kuru risināsim, sākot no otrā vienādojuma

Vienādojums 2: $\quad -x_2 + \alpha + \beta - 5\gamma = -2 \Leftrightarrow x_2 = 2 + \alpha + \beta - 5\gamma$

Vienādojums 1: $\quad x_1 + 2 + \cancel{\alpha} + \cancel{\beta} - 5\gamma \cancel{- \alpha} \cancel{- \beta} + 2\gamma = 1 \Leftrightarrow x_1 = 3\gamma - 1.$

Visus atrisinājumus var pierakstīt matricas formā

$$X = \begin{bmatrix} 3\gamma - 1 \\ 2 + \alpha + \beta - 5\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \text{kur } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Piemērs 4

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Atrisinājums:

Ir dota homogēna vienādojumu sistēma, tai vienmēr ir atrisinājums – triviālais atrisinājums. Lai noskaidrotu, vai šai sistēmai ir arī netriviālais atrisinājums, var lietot Gausa metodi. Te pietiek aplūkot sistēmas matricu un tās elementāros pārveidojumus, jo brīvie locekļi (nulles) pie pārveidojumiem nemainās:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 & 5 & 7 \\ 9 & 4 & -3 & 8 & 9 \\ 6 & 6 & -2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_4 \\ R_3 \\ R_1 \\ R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 6 & 6 & -2 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & -2 & 5 & 7 \\ 9 & 4 & -3 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - 3R_2 \\ R_4 - 4R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ievērosim, ka te var noteikt arī sistēmas matricas un sistēmas paplašinātās matricas rangu

$$r(A) = r(\tilde{A}) = 2$$

Tātad sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

Pieņemsim, ka nezināmie ir konstantes

$$x_3 = \alpha\,, x_4 = \beta\,, x_5 = \gamma$$

No otrā vienādojuma izteiksim x_2:

$$-2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3x_5 - x_4}{2} = \frac{3\gamma - \beta}{2}$$

No pirmā vienādojuma izteiksim x_1:

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_3 + x_5 - 4x_2 - 4x_4}{3} = \frac{\alpha - 2\beta - 5\gamma}{3}$$

Sistēmas atrisinājumu matrica ir

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-2\beta-5\gamma}{3} \\ \frac{3\gamma-\beta}{2} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \text{kur } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Ne vienmēr ir nepieciešams kā konstantes izvēlēties nezināmos x_3, x_4 un x_5.

Piemēram, var izvēlēties konstantes

$$x_1 = u_1\,, x_2 = u_2 \text{ and } x_5 = u_3\,,$$

Tad no otrā vienādojuma var izteikt x_4

$$-2u_2 - x_4 + 3u_3 = 0 \Leftrightarrow x_4 = 3u_3 - 2u_2\,,$$

No pirmā vienādojuma var izteikt x_3

$$3u_1 + 4u_2 - x_3 + 4(3u_3 - 2u_2) - u_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 3u_1 - 4u_2 + 11u_3.$$

Tad atrisinājumu matricu var pierakstīt nedaudz vienkāršāk:

$$X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 3u_1 - 4u_2 + 11u_3 \\ 3u_3 - 2u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \text{kur } u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$$

Piemērs 5

Atrisināt doto vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 4x & - & 4y & + & z & = & 8 \\ 6x & - & 3y & - & 2z & = & 21 \\ -x & + & 3y & + & 7z & = & 4 \end{cases}$$

Atrisinājums:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & -2 & 21 \\ -1 & 3 & 7 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_3 \\ R_1 \\ R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 4 & -4 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & -2 & 21 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R_2 + 4R_1 \sim \\ R_3 + 6R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 8 & 29 & 24 \\ 0 & 15 & 40 & 45 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2R_2 - R_3 \sim \\ R_3/5 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 18 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ R_3 - 3R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -46 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = n = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{vienādojums 3:} & z = 0, \\ \text{vienādojums 2:} & y = 3, \\ \text{vienādojums 1:} & -x + 3y = 4 \Rightarrow x = 5. \end{cases}$$

Piemērs 6

Dota lineāru vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & px_3 & - & 1.5x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{cases},$$

kur $p \in \mathbb{R}$. Ir nepieciešams noteikt tādu skaitļa p vērtību, lai sistēmas atrisinājums ir skaitļu četrinieks $(-6, 1, 4, 2)$. Vai iespējams atrast tādu p vērtību, lai sistēmai būtu viens vienīgs atrisinājums?

Atrisinājums:

$$A=\begin{bmatrix}4&-2&5&3\\3&6&5&-4\\3&3&p&-1.5\\1&4&2&-3\end{bmatrix}\begin{matrix}R_4\\ \\ \\R_1\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2&-3\\3&6&5&-4\\3&3&p&-1.5\\4&-2&5&3\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\2R_3\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2&-3\\3&6&5&-4\\6&6&2p&-3\\4&-2&5&3\end{bmatrix}\begin{matrix}\\R_2-3R_1\\R_3-6R_1\\R_4-4R_1\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&4&2&-3\\0&-6&-1&5\\0&-18&2p-12&15\\0&-18&-3&15\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\R_3-3R_2\\R_4-3R_2\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2&-3\\0&-6&-1&5\\0&0&2p-9&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Iespējami 2 gadījumi.

1) $\quad 2p-9=0 \Leftrightarrow p=\frac{9}{2};\qquad r(A)=2$

Tad divi nezināmie ir jāizvēlas kā konstantes

$$x_2=\alpha\,,x_4=\beta$$

Otrais vienādojums: $-6x_2-x_3+5x_4=0 \Rightarrow x_3=5x_4-6x_2=5\beta-6\alpha$

Pirmais vienādojums: $x_1+4x_2+2x_3-3x_4=0 \Rightarrow x_1=3x_4-4x_2-2x_3=8\alpha-7\beta$

Sistēmas kopējais atrisinājums ir $(8\alpha-7\beta,\alpha,5\beta-6\alpha,\beta)$, kur $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Ja $x_2=\alpha=1$ un $x_4=\beta=2$, tad

$$x_1=8\alpha-7\beta=-6,$$
$$x_3=5\beta-6\alpha=5.$$

Sekojoši, četrinieks $(-6,1,4,2)$ ir sistēmas atrisinājums, ja $p=\frac{9}{2}$.

2) $\quad 2p-9\neq 0 \Leftrightarrow p\neq\frac{9}{2};\qquad r(A)=3$

Tad vienu nezināmo pieņem par konstanti, piemēram,

$$x_2=5\alpha$$

vienādojums 3: $\quad \underbrace{(2p-9)}_{\neq 0}x_3=0 \Rightarrow x_3=0$

vienādojums 2: $\quad -6x_2-x_3+5x_4=0 \Rightarrow x_4=\frac{6x_2+x_3}{5}=6\alpha$

vienādojums 1: $\quad x_1+4x_2+2x_3-3x_4=0 \Rightarrow x_1=3x_4-4x_2-2x_3=-2\alpha$

Ievērosim, ka nezināmais x_3 (otrajā gadījumā) nevar būt konstante, jo tam jābūt vienādam ar nulli, lai trešais vienādojums būtu spēkā.

Sistēmas vispārīgais atrisinājums ir $(-2\alpha,5\alpha,0,6\alpha)$, kur $\alpha\in\mathbb{R}$ ir patvaļīga konstante.

Secinām, ka nav tāda skaitļa $p\in\mathbb{R}$, lai sistēmai būtu viens vienīgs atrisinājums.

Piemērs 7

Pierādīt, ka vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ -5x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 5 \end{cases}$$

Ir nesaderīga.

Atrisinājums:

Noteiksim sistēmas matricas un sistēmas paplašinātās matricas rangus:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right]^{R_1/2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \\ R_4 + 5R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 12 & 10 \end{array}\right]_{R_4 + R_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 8 \end{array}\right]_{R_4 - 3R_3} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow r(A) = 3 \neq 4 = r(\tilde{A}).$$

Atšifrējot matricas pēdējo rindu kā vienādojumu, iegūstam pretrunu

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -1$$

Ir zināms, ka jebkuriem reāliem skaitļiem $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0,$$

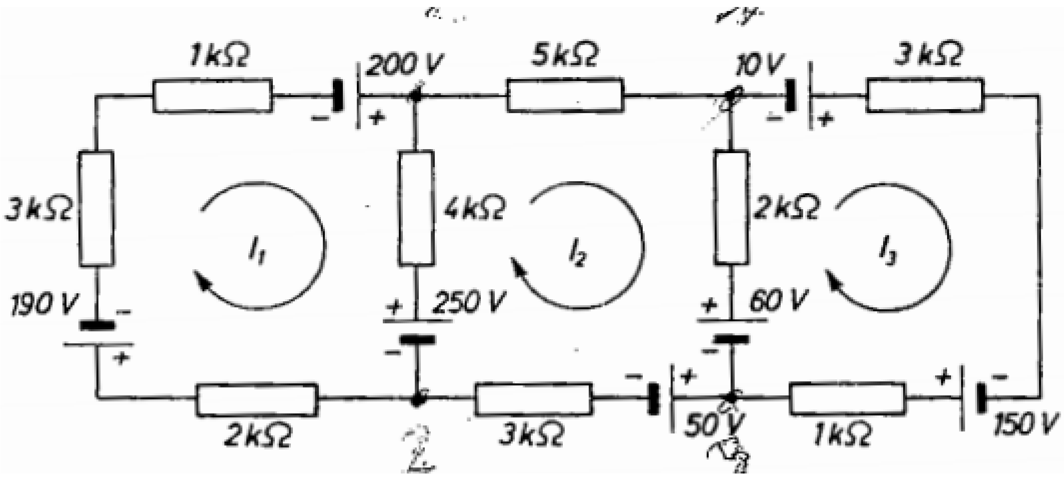
un $0 \neq -1$. Seko, ka dotajai vienādojumu sistēmai nav atrisinājuma.

3.9 Daži matricu pielietojuma piemēri

Matricu lietojums elektrisko ķēžu vienādojumu sistēmu risināšanā

Piemērs 1a

Zemāk esošajā attēlā (skat.attēlu 1) ir parādīta elektriskā ķēde, kāda varētu būt realizēta arī uz kuģa. Mēs vēlamies noteikt strāvas stiprumu visos elektriskās ķēdes zaros. Parādīsim, kā šo problēmu var reducēt uz trīs lineāru vienādojumu sistēmas ar 3 nezināmajiem risināšanas uzdevumu, izmantojot kontūrstrāvas metodi.



Attēls 1

Ķēdē ir 6 zari un 4 mezgli, tāpēc jāapskata 3 neatkarīgi kontūri. Izvēlētajos kontūros I_1, I_2 un I_3 strāva plūst pulksteņrādītāja virzienā.

Kontūrstrāvas vienādojumi ir:

$$I_1(3000+1000+4000+2000) - I_2 \cdot 4000 = -190+200-250,$$

$$I_2(4000+5000+2000+3000) - I_1 \cdot 4000 - I_3 \cdot 2000 = 250-60-50,$$

$$I_3(2000+3000+1000) - I_2 \cdot 2000 = 60+10+150.$$

Pēc vienādojumu saskaitīšanas un vienkāršošanas iegūstam:

$$\begin{cases} 10I_1 - 4I_2 + 0I_3 = -0.24 \\ -4I_1 + 14I_2 - 2I_3 = 0.14 \\ 0I_1 - 2I_2 + 6I_3 = 0.22 \end{cases}$$

Ievērojot, ka koeficientu matricas determinants nav vienāds ar nulli

$$\det A = \begin{vmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 14 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 704$$

Saskaņā ar Krāmera formulām, aprēķinām:

$$I_1 = \frac{D_1}{\det A}, I_2 = \frac{D_2}{\det A} \text{ un } I_3 = \frac{D_3}{\det A},$$

kur

$$D_1 = \begin{vmatrix} -0.24 & -4 & 0 \\ 0.14 & 14 & -2 \\ 0.22 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -14.08$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10 & -0.24 & 0 \\ -4 & 0.14 & -2 \\ 0 & 0.22 & 6 \end{vmatrix} = 7.04$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10 & -4 & -0.24 \\ -4 & 14 & 0.14 \\ 0 & -2 & 0.22 \end{vmatrix} = 28.16$$

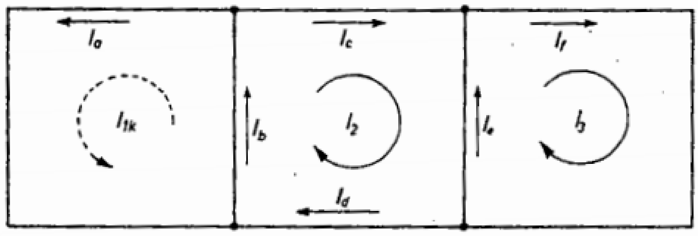
Tad

$$I_1 = -20\ mA\ , I_2 = 10\ mA\ \text{ un }\ I_3 = 40\ mA.$$

Varam aprēķināt strāvu atsevišķos zaros.

Ievērojot, ka $I_1 < 0$, strāvas plūsmas virziens atbilstošajā kontūrā nebija pareizi noteikts.

Koriģējot strāvas plūsmas I_1 virzienu (skat.attēlu 2)



Attēls 2

aprēķinām strāvu I_a, I_b, I_c, I_d, I_e un I_f vērtības sekojoši:

$$I_a = I_{1k} = 20\ mA$$

$$I_b = I_{1k} + I_2 = 30\ mA$$

$$I_c = I_2 = 10\ mA$$

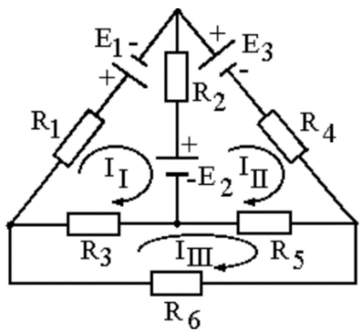
$$I_d = I_2 = 10\ mA$$

$$I_e = I_3 - I_2 = 30\ mA$$

$$I_f = I_3 = 40\ mA$$

Piemērs 1b

Kontūrstrāvas metodi var lietot, lai aprēķinātu elektriskās strāvas stiprumu, kas plūst caur visiem rezistoriem (skat.attēlu 3).



Attēls 3

Ir zināms, ka:

$$E_1 = 10\ V\ , E_2 = 20\ V\ , E_3 = 5\ V\ , R_1 = 20\ \Omega\ , R_2 = 5\ \Omega\ , R_3 = 25\ \Omega\ , R_4 = 15\ \Omega\ ,$$

$R_5 = 30\,\Omega\,, R_6 = 10\,\Omega.$

Kontūrstrāvas vienādojumi ir:

$$\begin{aligned}
-E_1 - E_2 &= (R_1 + R_2 + R_3)\cdot I_I - R_2 \cdot I_{II} - R_3 \cdot I_{III}\\
E_2 - E_3 &= -R_2 \cdot I_I + (R_2 + R_4 + R_5)\cdot I_{II} - R_5 \cdot I_{III}\\
0 &= -R_3 \cdot I_I - R_5 \cdot I_{II} + (R_3 + R_5 + R_6)\cdot I_{III}
\end{aligned}$$

Ievietojot dotos lielumus, iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases}
10I_I - I_{II} - 5I_{III} = -6\\
-I_I + 10I_{II} - 6I_{III} = 3\\
-5I_I - 6I_{II} + 13I_{III} = 0
\end{cases}$$

Koeficientu matricas determinanta vērtība ir

$$\det A = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -5\\ -1 & 10 & -6\\ -5 & -6 & 13\end{vmatrix} = 617$$

Ar Krāmera formulām var aprēķināt

$$I_I = \frac{D_I}{\det A}\,, I_{II} = \frac{D_{II}}{\det A} \text{ un } I_{III} = \frac{D_{III}}{\det A},$$

kur

$$\det A = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -5\\ -1 & 10 & -6\\ -5 & -6 & 13\end{vmatrix} = 617$$

$$D_I = \begin{vmatrix} -6 & -1 & -5\\ 3 & 10 & -6\\ 0 & -6 & 13\end{vmatrix} = -435$$

$$D_{II} = \begin{vmatrix} 10 & -6 & -5\\ -1 & 3 & -6\\ -5 & 0 & 13\end{vmatrix} = 57$$

$$D_{III} = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -6\\ -1 & 10 & 3\\ -5 & -6 & 0\end{vmatrix} = -141$$

Tad

$$I_I = -0{,}71\,A\,, I_{II} = 92\,mA \text{ un } I_{III} = -0{,}23\,A.$$

Strāvas plūsmas virziens iesākumā nebija pareizi pieņemts, jo pirmais un trešais rezultāts ir negatīvs. Tāpēc diagrammā ir jāmaina strāvas virziens pirmajā un trešajā kontūrā. Strāvas stiprumu, kas iet caur katru atsevišķo ķēdes rezistoru, aprēķinām sekojoši

$$\begin{aligned}
I_{R_1} &= I_I = 0.71\,A\\
I_{R_2} &= I_I + I_{II} = 0.802\,A\\
I_{R_3} &= I_I - I_{III} = 0.48\,A\\
I_{R_4} &= I_{II} = 0.092\,A\\
I_{R_5} &= I_{II} + I_{III} = 0.32\,A\\
I_{R_6} &= I_{III} = 0.23\,A
\end{aligned}$$

Matricu reizināšanu var lietot ģeometrijas uzdevumos un risinot datorgrafikas problēmas.

Piemērs 2a *Objekta simetrija attiecībā pret taisni*

Objektu koordinātu plaknē var novietot tā, lai tā simetrijas ass ir y- ass, kuras vienādojums ir $x = 0$.

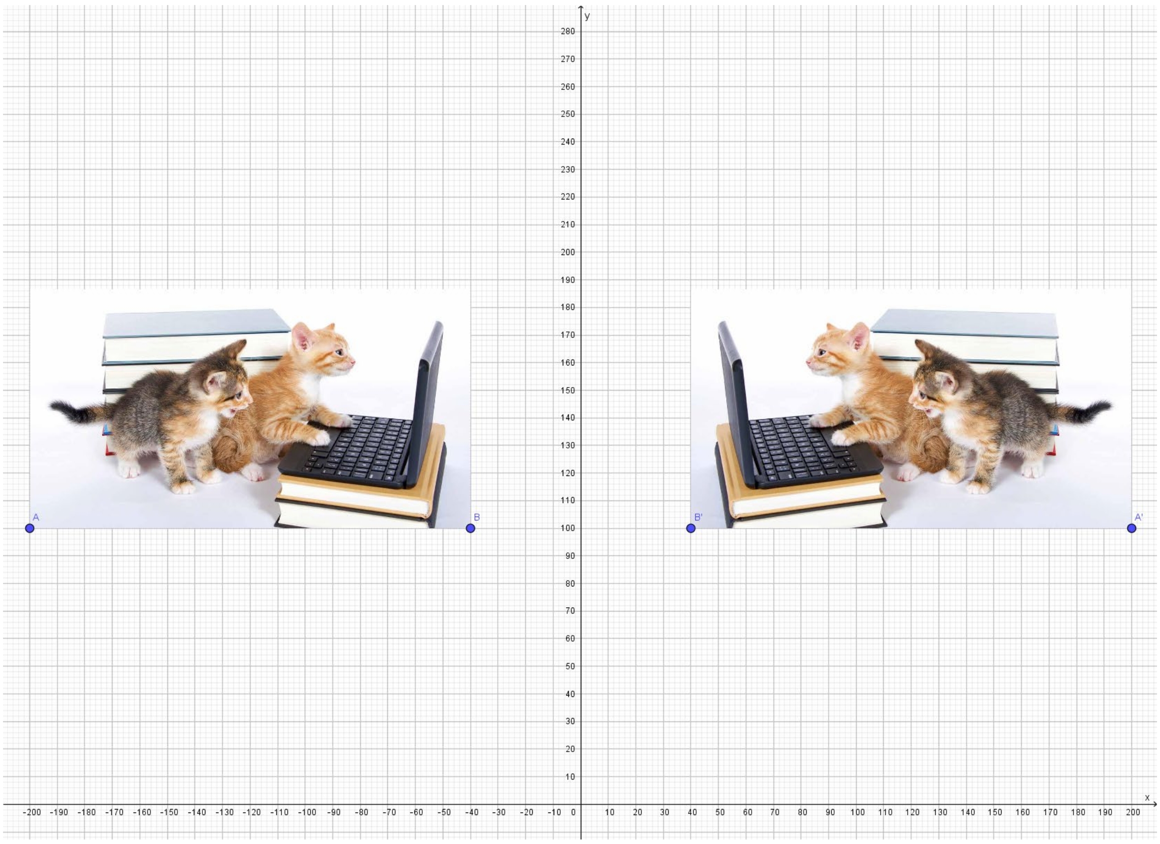
Punkta A ar koordinātes (x_A, y_A) var viennozīmīgi pierakstīt kolonas vektora formā $\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$, tad $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$. Ja $S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tad

$$S_y \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_A \\ y_A \end{bmatrix}.$$

Reizinot kolonas vektoru A ar matricu S_y no kreisās puses, iegūstam tādu kolonas matricu, kas ir punkta A' koordinātes $(-x_A, y_A)$. Punkti A' un A ir simmetriski attiecībā pret y-asi, tāpēc matricu S_y sauc par simetrijas matricu attiecībā pret y-asi jeb taisni $x = 0$.

Dekarta koordinātu plaknē matrica S_y jebkuru objektu O transformē par tam simetrisku objektu O' attiecībā pret koordinātu asi $x = 0$.

Attēlā 4 parādīts, kā matrica S_y transformē fotogrāfiju (katru tās punktu) simetriskā attēlā attiecībā pret y-asi.



Attēls 4

Example 2b *Objekta rotācija ap punktu pozitīvā virzienā par leņķi $\boldsymbol{\alpha}$*

Kā punktu, ap kuru rotēs dotais objekts, izvēlēsimies Dekarta sistēmas koordinātu centru $(0{,}0)$. Izmantojot punkta polārās koordinātes r un φ, būs vienkāršāk aprakstīt plaknes punkta $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$ rotāciju.

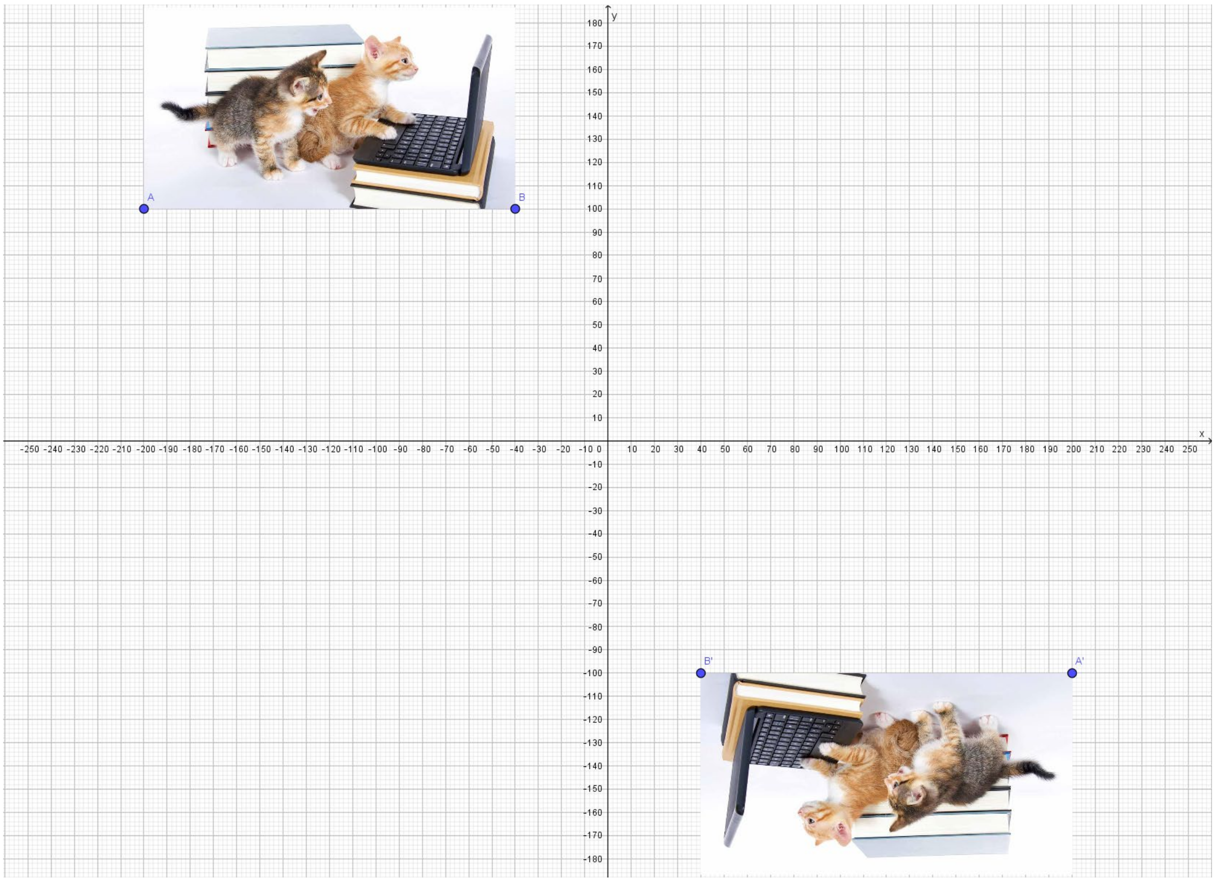
Ja matrica, kura apraksta punkta rotāciju ap centru par leņķi α, ir $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, tad

$$R_\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} r(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) \\ r(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\varphi) \\ r\sin(\alpha+\varphi) \end{bmatrix} = A'$$

Punkts A' ir iegūts, punktam A rotējot pozitīvajā virzienā ap koordinātu centru par $\boldsymbol{\alpha}$ leņķi. R_α sauc par rotācijas matricu. Ar šīs matricas palīdzību var jebkuru figūru O, kas dota Dekarta koordinātu sistēmā, pagriezt pozitīvā virzienā pār leņķi α un iegūt atbilstošo figūru O', jo pagriezts tiek jebkurš figūras O punkts.

Attēlā 5 virs nogriežņa AB ir redzama fotogrāfija, kura tiek pagriezta ap koordinātu centru par $180°$ pozitīvā virzienā, iegūstot attēlu, kas atrodas zem nogriežņa $A'B'$. Rotācijas matrica šajā gadījumā ir $R_\pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.



Attēls 5

Attēlus, kuri izvietoti tīmeklī vai uzņemti ar digitālajām fotokamerām, sauc par digitālajiem attēliem. Informācijas nesējos tie tiek uzglabāti kā datne, kas pēc savas būtības ir matrica. Pieņemsim, ka vienam tādam attēlam, ko aplūkojam, atbilstošās matricas izmērs ir 1200×640. Matricas elementi ir pikseļi. Pikselis ir mazākais grafiskais elements, kas ir izveidots vienā noteiktā krāsā. Ja attēls ir melnbalts, tad matrica satur tikai skaitļus 0 un 1. Šie skaitļi atbilst katra pikseļa krāsai – 0, ja pikselis ir melns, 1, ja balts. Tāpēc divkrāsu attēlu sauc par bināro attēlu.

Ja melnbaltajā attēlā ir arī pelēki toņi, tad matricā, kas apraksta attēlu, katram pikselim atbilst naturāls skaitlis no 0 līdz 255. Skaitlis 0 atbilst melnai krāsai, 255 baltai, bet pārējie skaitļi nosaka pelēko toņu gradāciju jeb intensitāti – jo mazāks skaitlis, jo tumšāks pelēkās krāsas tonis ir dotajam pikselim.

Krāsainie attēli tiek veidoti, pārklājoties trim matricām. Tiek izveidota matricu summa no - sarkanās krāsas, zaļās krāsas un zilās krāsas matricām.

Tā pikseļi tiek reprezentēti kā trijnieki. Piemēram, ja pikselis ir sarkans, tam atbilst trijnieks $(r, 0,0)$, kur r ir skaitlis robežās no 0 līdz 255, kas raksturo, cik gaišs ir sarkanās krāsas pikselis. Trijnieks $(0,0,0)$ atbilst melnas krāsas pikselim, $(255,0,0)$ sarkanas krāsas pikselim.

Līdzīgi tiek veidoti zaļās un zilās krāsas matricu elementi. Zaļās krāsas matricā trijnieks ir $(0, g, 0)$, kur g ir vesels skaitlis robežās no 0 un 255. Tāpat arī zilās krāsas matricas elementi tiek aprakstīti ar trijnieku $(0,0, b)$, kur b ir robežās no 0 līdz 255, un $(0,0,255)$ ir zilā krāsa, bet $(0,0,0)$ melnā.

Šāda krāsu sistēma tiek nosaukta kā RGB sistēma (RGB ir apzīmējums no angļu valodas: R “red” - sarkans, G “green” - zaļš, B “blue” – zils). RGB sistēmā ir iespējams attēlot

$256^3 = 2^{24} = 16777216$ dažādas krāsas.

Balto krāsu iegūst, saskaitot trīs pikseļa trijniekus

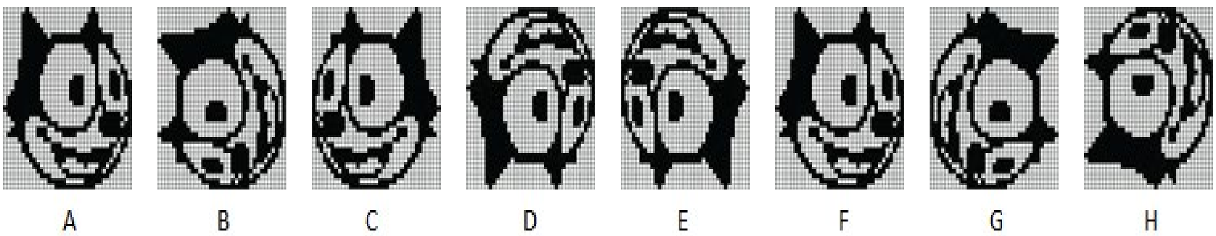
$$(255,255,255) = (255,0,0) + (0,255,0) + (0,0,255).$$

Pelēkos krāsu toņus apraksta trijnieki (a, a, a), kur a ir vesels skaitlis robežās no 1 līdz 254.

Digitālo attēlu apstrāde un darbības ar matricām

Ja digitālo fotogrāfiju apraksta ar matricu palīdzību, tad rodas jautājums, kādas attēla izmaiņas rada darbības ar matricām. Te aplūkosim sekojošajos piemēros.

Piemērs 3

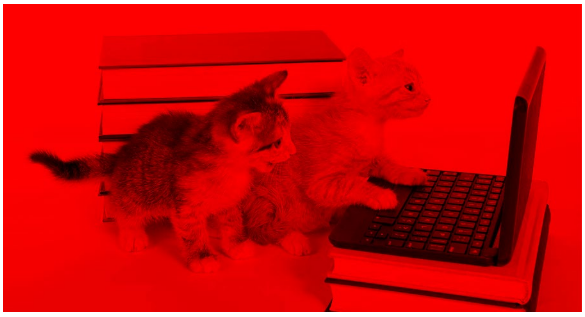


Attēls 6

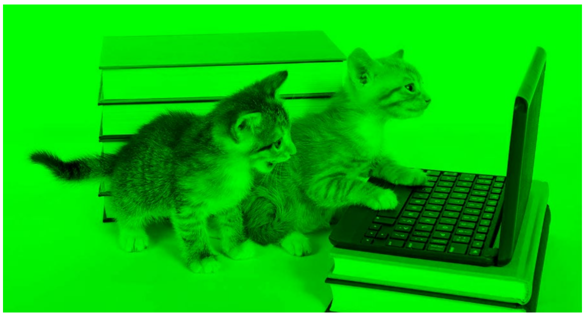
Ja matrica $A = [a_{i,j}]$ ir binārā matrica, kas apraksta pirmo attēlu A (skat. attēlu 6) un tās izmērs ir 35×35, tad sekojošās pārmaiņas iegūst ar matricu pārveidojumiem:

$B = [b_{i,j}] = [a_{j,i}] = A^T$, $\quad C = [c_{i,j}] = [a_{i,35-j+1}]$, $\quad D = [d_{i,j}] = [a_{35-i+1,j}]$,
$E = [e_{i,j}] = [a_{35-i+1,35-j+1}]$, $\quad G = [g_{i,j}] = [a_{j,35-i+1}]$, $\quad H = [h_{i,j}] = [a_{35-j+1,i}]$.

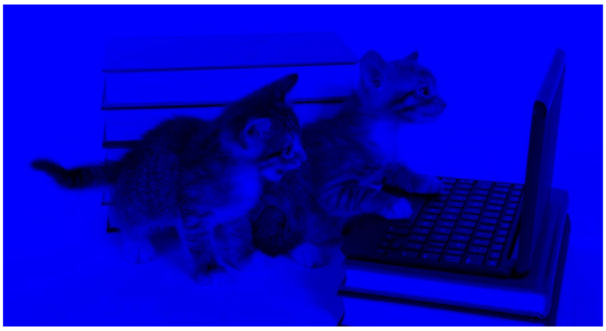
Piemērs 4 *Krāsaino digitālo fotogrāfiju iegūst, summējot sarkano, zaļo un zilo matricas (skat. attēlu 7).*



$$+$$



$$+$$



$$=$$

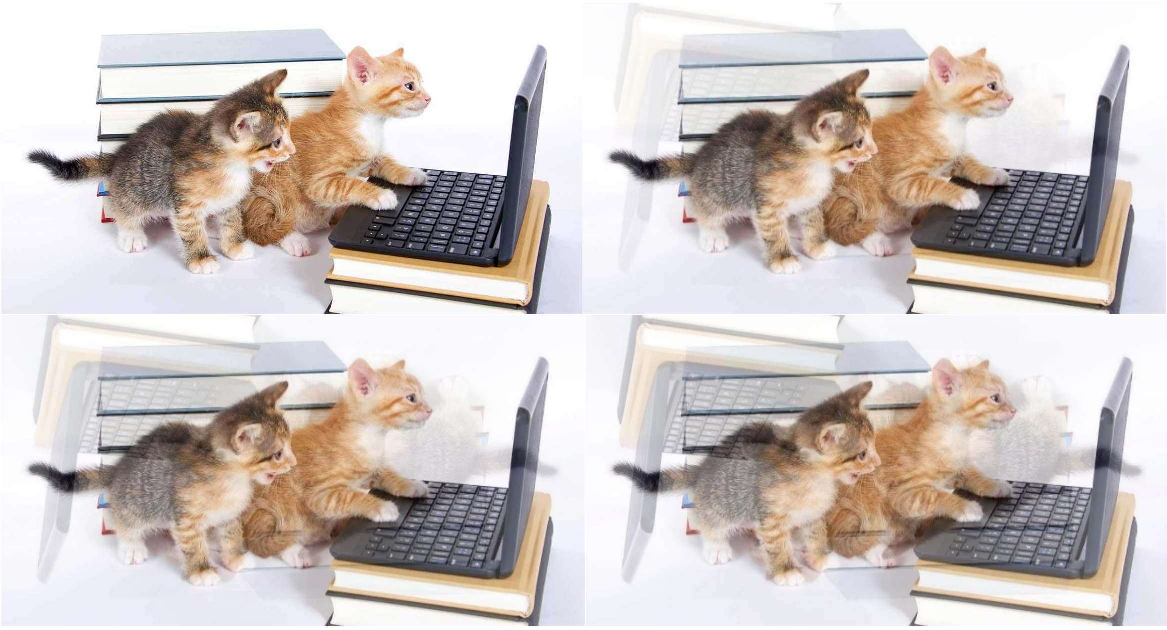
Attēls 7

Piemērs 5 Pārslēgšanās no viena attēla uz citu attēlu, ko bieži izmanto PowerPoint prezentācijās, slaidos un slaidrādēs

Apskatīsim divas digitālās krāsu fotogrāfijas ar vienādu izmēru. Pirmo fotogrāfiju apraksta matrica A, bet otru matrica Z RGB sistēmā. Ir definēta matrica

$$M(t) = (1-t)A + tZ \text{ katram } t \in [0,1].$$

Atzīmēsim, ka $M(0) = A$ un $M(1) = Z$. Jo lielāks ir $t \in (0,1)$, jo mazāk matrica $M(t)$ līdzinās matricai A, tā vairāk ir līdzīga matricai Z (skat. attēlu 8; varianti pie dažādām t vērtībām).



Attēls 8

Piemērs 6 ***SVD*** *sadalījuma metode attēlu aproksimācijā Matricas sadalīšana singulārajos reizinātājos*

Aplūkosim SVD sadalījuma metodi (SVD – "singular value decomposition of the matrix"), kuras būtība ir sadalīt reālo skaitļu matricu speciāla veida reizinātājos

Reālu skaitļu n-tās kārtas matrica U ir ortogonāla, ja: $U^T U = I_n$.

Ja A ir reālu skaitļu matrica ar izmēru $m \times n$, var pamatot, ka matricu A var izteikt kā 3 matricu reizinājumu: $A = USV^T$,

kur U ir m-tās kārtas ortogonāla matrica, V ir n-tās kārtas ortogonāla matrica un $S = [s_{i,j}]$ ir rālu skaitļu matrica ar izmēru $m \times n$ un tās elementi ir

$$s_{i,j} = 0 \text{ ja } i \neq j$$
$$s_{1,1} \geq s_{2,2} \geq \cdots \geq s_{k,k} \geq 0, \text{ kur indekss } k = \min\{m, n\}.$$

Šādu matricas A sadalījumu reizinātājos sauc par *matricas singulāro sadalījumu* (SVD).

Ja matricas U kolonu secība ir $u_1, u_2, \dots, u_m$ un matricas V kolonu secība ir $v_1, v_2, \dots, v_n$, tad reizinājumu var izteikt sekojoši:

$$USV^T = \sum_{l=1}^{k} s_{l,l} u_l v_l^T.$$

Tāpēc

$$A = \sum_{l=1}^{k} A_l \, ,$$

kur $A_l = s_{l,l} u_l v_l^T$ ir matrica ar izmēru $m \times n$ katram $l \in \{1, \dots, k\}$.

Ievērojiet, ka $s_{1,1} \geq s_{2,2} \geq \cdots \geq s_{k,k}$, ir acīmredzami, ka

$$\lim_{r \to k} \sum_{l=1}^{r} A_l = \sum_{l=1}^{k} A_l = A.$$

Atbilstoši, jo vairāk koeficients r tuvojas k, matrica

$$C = \sum_{l=1}^{r} A_l$$

ir arvien labāka matricas A aproksimācija jeb tuvinājums.

Pieņemsim, ka kosmosa zonde ir ieprogrammēta sūtīt uz Zemes laboratoriju lielu skaitu melnbaltu attēlu, kuru izmērs 1000×1000. Priekš katra šāda attēla zondei būtu jāpārsūta $1000 \cdot 1000 = 1000000$ pikseļi, tas ir, 1000000 skaitļi – viens skaitlis katram pikselim. Tāpēc, pirms jebkura attēla sūtīšanas katrai attēla matricai A zonde veic tās sadalījumu reizinātājos pēc SVD metodes un izmanto matricas U pirmās 40 kolonas, tad arī matricas V pirmās 40 kolonas un skaitļus $s_{1,1}, s_{2,2}, \dots, s_{40,40}$ no matricas S. Tad kopumā pārsūtāmo skaitļu skaits ir

$$40 \cdot 1000 + 40 \cdot 1000 + 40 = 80040,$$

kuri tiek saņemti Zemes laboratorijā matricas A vietā. Atsūtītā matrica $\sum_{l=1}^{40} A_l$ ir dotā attēla aproksimācija, līdz ar to tādam saņemtajam attēlam nav tik augsta kvalitāte.

Attēlos 9 un 10 var redzēt, kā izmainās fotogrāfija (skat.attēlu 9), ja tai veic minēto aproksimāciju (skat, attēlu 10). Līdzīga aproksimācija tiek veikta arī krāsainai fotogrāfijai (skat. attēlu 11). Aproksimācija ir nedaudz izplūdusi, taču attēls ir pietiekami saprotams (skat. attēlu 12).

Melnbalta fotogrāfija, kuras matricas izmērs ir 1000×1000 $(k = 1000)$ pikseļu

Attēls 9

Dotā attēla aproksimācija $(r = 40)$

Attēls 10

Krāsaina fotogrāfija ar izmēru 1200×640 $(k = 640)$ pikseļi

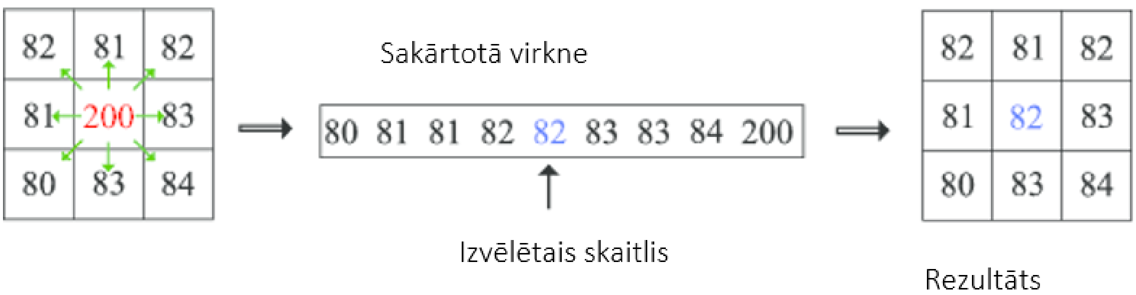
Attēls 11

Attēla aproksimācija ($r = 50$)

Attēls 12

Piemērs 7 *Attēla trokšņu mazināšana*

Attēla troksnis ir nevēlams gadījuma signāls. Šāds signāls tiek apvienots ar lietderīgu signālu, tāpēc attēla kvalitāte pamazinās. Lai paaugstinātu attēla kvalitāti un mazinātu attēla trokšņu ietekmi uz to, lieto mediāno filtru. Aplūkosim, kā šis filtrs darbojas. Visos iespējamos veidos tiek izvēlētas matricas A trīs blakus esošas rindas un trīs blakus esošas kolonas. No izvēlēto rindu un kolonu krustpunktu elementiem tiek izveidota trešās kārtas matrica B. Tās elementi tiek sakārtoti augošā secībā. Marica B tiek pārveidota, tās centrālo skaitli aizstājot ar virknes mediānu (piekto skaitli no izveidotās skaitļu virknes). Attēlā 13 ir redzams, kā izveido matricu B. 14 attēlā ir fotogrāfija, kurā ir daudz trokšņu (balto punktiņu), bet pēc attēla apstrādes trokšņu ietekme ir mazināta (skat attēlu 15).



Attēls 13

Graudaina melnbalta fotogrāfija

Attēls 14

Attēls pēc mediānā filtra pielietošanas

Attēls 15