MACIERZE I WYZNACZNIKI

OPIS SZCZEGÓŁOWY:

Macierz to układ liczb, symboli lub wyrażeń zapisanych w postaci prostokątnej tablicy.
W algebrze liniowej macierze wprowadza się często jako sposób skondensowanego zapisu układów równań liniowych, co ma na celu wyeliminowanie powtarzających się elementów standardowej notacji układów równań tego rodzaju z wieloma niewiadomymi. Macierze pozwalają również na reprezentowanie przekształceń liniowych, czy form dwuliniowych w sposób umożliwiający przeprowadzanie obliczeń. Ponieważ wiele przekształceń geometrycznych (jak na przykład obrot przestrzeni wokół początku układu współrzędnych) są przekształceniami liniowymi, macierze znajdują zastosowanie w geometrii analitycznej i grafice komputerowej.
Przykładami macierzy reprezentujących przekształcenia liniowe są pojawiające się w analizie wielowymiarowej macierze Jacobiego. Przykładami macierzy reprezentujących formy dwuliniowe są macierze Hessego w analizie wielowymiarowej oraz macierze kowariancji w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce. Przykładem macierzy której wprowadzenie nie jest motywowane reprezentowaniem żadnego naturalnego przekształcenia liniowego, czy formy kwadratowej jest macierz incydencji w teorii grafów. Oprócz wymienionych powyżej dziedzin macierze są wykorzystywane także w teorii reprezentacji, kryptografii, czy elektronice.

Za pierwsze macierze można uważać kwadraty magiczne 3x3 które w literaturze chińskiej pojawiają się już ok. 650 p.n.e. Kwadraty magiczne były znane także arabskim matematykom, prawdopodobnie już w VII wieku, kiedy Arabowie podbili północno-zachodnie części subkontynentu indyjskiego, przejmując zdobycze matematyki i astronomii hinduskiej – być może idea ta dotarła do nich z Chin. Pierwsze kwadraty magiczne rzędu 5 i 6 pojawiły się w Encyklopedii Bractwa Czystości z Bagdadu około 983 roku. Prostsze kwadraty magiczne były znane wielu wcześniejszym matematykom arabskim. Powstały między III wiekiem p.n.e. a II wiekiem n.e. traktat *Dziewięć rozdziałów o sztuce matematyki* (*Jiu Zhang Suan Shu*) jest pierwszym zanotowanym przypadkiem użycia macierzy do rozwiązania układów równań liniowych W rozdziale siódmym, *Zbyt dużo i nie wystarczająco*, po raz pierwszy wprowadzono koncepcję wyznacznika, przeszło 1000 lat przed jego publikacją przez Kōwę Sekiego w 1683 roku i Gottfrieda Leibniza w 1693 roku. Gabriel Cramer opublikował swoje wzory dające pełny algorytm rozwiązywania układów równań liniowych dopiero w 1750 roku. Słowo „macierz” (łac. *matrix* – samica rozpłodowa, roślina macierzysta; od *matr-*, *mater* – matka; niegdyś właśnie „macierz”) ukuł James Joseph Sylvester, który macierz rozumiał jako obiekt dający wyznaczniki znane dzisiaj jako minory.

CEL: Umiejętność wykonywania działań na macierzach i zrozumienie faktu, że macierze są ważne nie tylko przy rozwiązywaniu problemów matematycznych, ale także w wielu rzeczywistych zastosowaniach

Zdobyte umiejętności:

1. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie macierzy .
2. Obliczanie macierzy odwrotnej.
3. Rozwiązywanie równań macierzowych.

Wymagania wstępne: wiedza ze szkoły średniej. Znajomość podstawowych zasad i wzorów.

Zastosowania funkcji w rzeczywistych problemach: Macierze znalazły mnóstwo zastosowań, tak w matematyce, jak i w naukach przyrodniczych – niektóre z nich wykorzystują jedynie zwarty sposób zapisu zbioru liczb w postaci tablicy. Przykładowo w teorii gier i ekonomii *macierz wypłat* koduje wypłatę gracza w zależności od jego wyboru spośród (skończonego) zbioru możliwości. W eksploracji tekstu i automatycznym kompilowaniu tezaurusów korzysta się z *macierzy częstości dokument-słowo* (albo *macierzy częstotliwości słowo-dokument*; ang. *document-term [frequency] matrix*, *DTM* albo *term-document [frequency] matrix*, *TDM*), np. tf-idf, do śledzenia częstości pewnych słów w kilku dokumentach. Wczesne techniki szyfrowania (np. szyfr Hilla) można opisać za pomocą macierzy, jednakże oznacza to, że kody te są względnie łatwe do złamania (z powodu ich liniowej natury). W grafice komputerowej macierze wykorzystuje się do reprezentowania obiektów oraz ich przekształceń afinicznych – przykładem może być rzut trójwymiarowego obiektu na dwuwymiarowy ekran uwzględniający teoretyczną pozycję *obserwatora* (*kamery*). Macierze nad pierścieniami wielomianów są istotnym elementem opisu w teorii sterowania. W chemii macierze wykorzystuje się na wiele sposobów – w szczególności, ze względu na wykorzystanie teorii kwantów, do opisu wiązań między cząsteczkami i spektroskopii. Przykładami są *macierz nakładania* (ang. *overlap matrix*) i *macierz Foka* wykorzystywane do rozwiązywania równań Roothaana w celu uzyskania orbitali cząsteczkowych za pomocą metody Hartree'ego-Foka. Jednym z fundamentalnych obiektów teorii grafów jest *macierz sąsiedztwa* skończonego grafu – zapisana jest w niej informacja o tym, które wierzchołki grafu są połączone krawędzią. Innym sposobem opisu takiego grafu jest *macierz incydencji* parująca wierzchołki i krawędzie. Macierze zawierające tylko dwie różne wartości (0 i 1 oznaczające przykładowo „tak" i „nie") nazywa się *macierzami logicznymi*. Z kolei *macierz odległości* (lub *kosztów*) zawiera informację o wzajemnych odległościach krawędzi. Pojęcia te stosuje się do opisu rozmieszczenia (topologii) witryn internetowych połączonych odnośnikami, czy miastami połączonymi za pomocą dróg; jeśli sieć dróg nie jest zbyt gęsta, to macierze są zwykle *rzadkie*, tzn. zawierają mało niezerowych elementów. Dla tego rodzaju macierzy istnieją odpowiednio przystosowane algorytmy stosowane w teorii sieci. Ponadto macierze mają zastosowanie w:

- Teorii grafów
- Analizie i geometrii (analiza wielowymiarowai równania różniczkowe cząstkowe)
- Rachunku prawdopodobieństwa i statystyce (macierze tochastyczne)
- Fizyce (symetria w fizyce)
- Mechanice kwantowej
- Drganiach swoodnych
- Optyce geometrycznej
- Elektronice

.

Spis treści:

1. MACIERZE.

1.1. Definicja

Macierz to uporządkowana tablica liczb, w których poszczególne pozycje w tablicy są określone przez dwa wskaźniki (indeksy). Pozycja każdego elementu jest określona przez numer wiersza i kolumny, w który ten element występuje. Poniższa macierz **A** ma *n* wierszy i *m* kolumn

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ ma $n \times m$ elementów, a każdy z nich a_{ij} jest opisywany przez dwa wskaźniki, z których pierwszy podaje numer wiersza, a drugi numer kolumny. Element a_{ij} leży na przecięciu *i–tego* wiersza i *j–tej* kolumny.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ ma 3 wiersze i 2 kolumny. W podanej macierzy $a_{21} = 3$ jest to element leżący na przecięciu $2-go$ wiersza i $1-szej$ kolumny, wyraz $a_{13} = 4$ jest wyrazem leżącym na przecięciu $1-go$ wiersza i $3-ciej$ kolumny.
Jeżeli $n = m$ to wtedy macierz $\boldsymbol{A}$ jest **macierzą kwadratową stopnia $\boldsymbol{n}$** (równa liczba wierszy i kolumn), a jeżeli $n \neq m$ to jest **macierzą prostokątną wymiaru $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$** .

Wektor jest szczególnym przypadkiem macierzy jednokolumnowej lub jednowierszowej. Wektor jednokolumnowy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

ma n składowych.

Równość macierzy

Macierze $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ są sobie równe tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

1. Wymiary macierzy $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ muszą być takie same (jeżeli $\boldsymbol{A}$ jest wymiaru $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$ to $\boldsymbol{B}$ też musi być wymiaru $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$)
2. Wszystkie elementy o tych samych współrzędnych w macierzach $\boldsymbol{A}\ i\ \boldsymbol{B}$ muszą być takie same (identyczne), tzn.

$$a_{ij} = b_{ij} \quad dla \quad i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n$$

PRZYKŁADY.

1. Jeżeli:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

to $A = B$, ponieważ oba warunki równości macierzy są spełnione.

2. Jeżeli:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{to} \quad \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B},$$

ponieważ wymiary macierzy A i B nie są identyczne (A jest wymiaru 1 x 4 , natomiast B jest wymiaru 4 x 1).

3. Jeżeli

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

to z definicji równości macierzy wynika, że

$$a = 1, \ b = 2, \ c = 0, \ d = 0.$$

2. RODZAJE MACIERZY.

2.1 Macierz zerowa

Wśród wszystkich macierzy szczególne znaczenie ma **macierz zerowa** wymiaru $\boldsymbol{mxn}$, której wszystkie elementy są równe zero, czyli

$$a_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n \ .$$

Przykład macierzy zerowej wymiaru 2 x 3:

$$\mathbf{0}_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

przykład macierzy zerowej wymiaru 3 x 1:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Przykład macierzy zerowej wymiaru 2 x 2:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2 Macierz diagonalna

to **macierz kwadratowa**, która posiada poza przekątną same zera, czyli

$$a_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j, i, j = 1,2,\dots,n$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}.$$

Macierz diagonalną często oznacza się przez $diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$, gdzie $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}$ są elementami występującymi na przekątnej.

PRZYKŁAD.

4.

Macierz diagonalna stopnia 4: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{D} = \text{diag}\,(1, 2, -8, 3)$$

2.3 Macierz jednostkowa

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

to macierz kwadratowa, która posiada na przekątnej jedynki i poza przekątną same zera, czyli macierz jednostkowa jest macierzą diagonalną, której wszystkie elementy stojące na przekątnej są równe 1

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3. DZIAŁANIA NA MACIERZACH.

Niektóre działania algebraiczne mogą być wykonywane na macierzach, a ponadto definiuje się działania na macierzach, które nie mają odpowiedników w działaniach na liczbach. Omówimy je teraz.

3.1 Dodawanie/odejmowanie macierzy

Aby można wykonać dodawanie/odejmowanie dwóch macierzy $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ muszą one mieć takie same wymiary $n\times m$, (te same liczby kolumn i wierszy), a elementy macierzy

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$$

są równe:

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij},\qquad i=1,\dots,n,\qquad j=1,\dots,m.$$

PRZYKŁADY.

5.

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -5\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+0 & 3+(-5)\\4+1 & 5+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\5 & 7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -5\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-0 & 3-(-5)\\4-1 & 5-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 8\\3 & 3\end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 9\\2 & -3 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}$$

Tych macierzy nie można dodać, ponieważ nie mają takiego samego wymiaru (pierwsza 2 x 3, druga 2 x 2).

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

3.2 Mnożenie macierzy przez liczbę k

Polega na mnożeniu każdego elementu macierzy $\boldsymbol{A}$ przez liczbę k. Dlatego element ij macierzy kA jest równy

$$ka_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n, \qquad j = 1, \dots, m.$$

PRZYKŁAD.

7.

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 15 \\ 6 & -6 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

3.3 Mnożenie macierzy

Ta operacja dla macierzy różni się od mnożenia liczb. Po pierwsze nie każde dwie macierze można pomnożyć. Mnożenie macierzy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ można wykonać jedynie gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Po drugie elementy macierzy $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ nie są prostym iloczynem elementów mnożonych macierzy. W wyniku mnożenia macierzy $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ o wymiarach *n×m* przez macierz $\boldsymbol{B}$=$[b_{jk}]$ o wymiarach *m×l* otrzymujemy macierz $\boldsymbol{C} = [c_{ik}]$ o wymiarze *n×l*, której element c_{ik} wyraża się przez następującą sumę

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}, \qquad i = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, l$$

Widzimy, że element c_{ik}powstaje przez pomnożenie wiersza i macierzy $\boldsymbol{A}$ przez kolumnę k macierzy $\boldsymbol{B}$, przy czym *pomnożenie* oznacza sumowanie iloczynów odpowiednich elementów.

PRZYKŁADY.

8. Niech $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ wymiar 2 x 2 oraz $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ wymiar 2 x 3 .

Wtedy

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} = 1\cdot 5 + 2\cdot 8\\ c_{12} &= a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} = 1\cdot 6 + 2\cdot 9\\ c_{13} &= a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23} = 1\cdot 7 + 2\cdot 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{21} &= a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} = 3\cdot 5 + 4\cdot 8\\ c_{22} &= a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} = 3\cdot 6 + 4\cdot 9\\ c_{23} &= a_{21}\cdot b_{13} + a_{22}\cdot b_{23} = 3\cdot 7 + 4\cdot 0 \end{aligned}$$

$$A\cdot B = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\\ 8 & 9 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 5+2\cdot 8 & 1\cdot 6+2\cdot 9 & 1\cdot 7+2\cdot 0\\ 3\cdot 5+4\cdot 8 & 3\cdot 6+4\cdot 9 & 3\cdot 7+4\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21 & 24 & 7\\ 47 & 54 & 21\end{bmatrix}$$

9. Niech $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ [2 x 2] $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ [2 x 2]

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 4+3\cdot 1\\ 0\cdot 2+2\cdot 1 & 0\cdot 4+2\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

10. Niech $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}2 & -6 & -4\\ -3 & 9 & 6\end{bmatrix}_{2\mathrm{x}3}$ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\\ 0 & 3\end{bmatrix}_{3\mathrm{x}2}$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}2 & -6 & -4\\ -3 & 9 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\\ 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 1+(-6)\cdot 2+(-4)\cdot 0 & 2\cdot 4+(-6)\cdot 8+(-4)\cdot 3\\ -3\cdot 1+9\cdot 2+6\cdot 0 & -3\cdot 4+9\cdot 8+6\cdot 3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-10 & -52\\ 15 & 78\end{bmatrix}_{2\mathrm{x}2}.$$

3.4 Własności działań na macierzach

Podamy teraz najważniejsze własności działań na macierzach ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ oznaczają macierze):

- dodawanie macierzy jest przemienne
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A},$$
- dodawanie macierzy jest łączne
$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}),$$
- mnożenie macierzy nie jest przemienne!!

PRZYKŁAD.

11. Spójrzmy na macierze z Przykładu 9.

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 4+3\cdot 1\\ 0\cdot 2+2\cdot 1 & 0\cdot 4+2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+4\cdot 0 & 2\cdot 3+4\cdot 2\\ 1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 3+1\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 14\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

A zatem widzimy, że otrzymaliśmy zupełnie inne macierze, czyli $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$!!!!

- mnożenie macierzy jest łączne

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}),$$

- zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania macierzy

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C},$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}.$$

UWAGA

Korzystając z powyższych własności musimy pamiętać o tym, że dodawać możemy macierze **tych samych wymiarów**, a w przypadku mnożenia dwóch macierzy **liczba kolumn pierwszej macierzy** musi **być równa liczbie wierszy drugiej macierzy**.

3.5 Transpozycja macierzy

Operacja ta, nie mająca odpowiednika w działaniach na liczbach, polega na zamianie miejscami wierszy i kolumn macierzy. Macierz transponowana $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ do macierzy $\boldsymbol{A}$, która ma n wierszy i m kolumn, będzie miała n kolumn i m wierszy, przy czym element $\boldsymbol{i},j$ macierzy transponowanej jest równy

$$[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}]^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ji}}.$$

PRZYKŁAD.

12. Wykonajmy transpozycję macierzy

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\quad=>\quad\boldsymbol{A}^{T}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\quad=>\quad\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad => \quad \boldsymbol{C^T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \quad => \quad \boldsymbol{D^T} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ itd.}$$

3.6 Macierz odwrotna

Definicja: *Macierz odwrotna* do **macierzy kwadratowej** $\boldsymbol{A}$ to taka macierz $\boldsymbol{B}$, że

$$\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A = I,}$$

gdzie $\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową.

Macierz odwrotna oznaczamy $\boldsymbol{A^{-1}}$. Zatem $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,}$

natomiast jeżeli taka macierz B nie istnieje, to macierz A nazywamy nieodwracalną.

3.7 Własności macierzy odwrotnej

- jeżeli macierz A ma macierz odwrotną to tylko jedną,
- macierz odwrotna do macierzy odwracalnej jest odwracalna i zachodzi

$$(A^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$$

- iloczyn macierzy odwracalnych jest macierzą odwracalną i zachodzi,

$$\boldsymbol{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

przy czym należy zwrócić uwagę na kolejność macierzy, gdyż mnożenie macierzy nie jest przemienne.

PRZYKŁAD.

13. Znaleźć z definicji macierz odwrotną do macierzy $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Macierz $\boldsymbol{A}$ jest macierzą kwadratową stopnia 2, zatem A^{-1} tez jest macierzą kwadratową stopnia 2

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Wtedy $\boldsymbol{A \cdot A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Z mnożenia macierzy mamy:

$$\begin{bmatrix} 1\cdot a+0\cdot c & 1\cdot b+0\cdot d \\ -1\cdot a+2\cdot c & -1\cdot b+2\cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

z równości macierzy otrzymujemy układ czterech równań z czterema niewiadomymi:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ -a+2c=0 \\ -b+2d=1 \end{cases}.$$

Stąd wstawiając pierwsze i drugie równanie do trzeciego i czwartego otrzymujemy:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ -1+2c=0 \\ 2d=1 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{2}1 \end{cases},$$

Wobec tego $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Gdy poznamy definicję wyznacznika i jego własności będziemy wyznaczać macierz odwrotną nie z definicji.

4. WYZNACZNIKI.

Wyznacznik macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ jest to liczba det $\boldsymbol{A}$ przyporządkowana tej macierzy określona indukcyjnie w następujący sposób:

- Jeśli macierz jest stopnia *n* = 1, to jej wyznacznik $\boldsymbol{det\ A = a_{11}}$.
- Jeśli stopień macierzy jest większy niż 1, to jej wyznacznik obliczamy według następującego wzoru:

$$\boldsymbol{detA = (-1)^{1+1}a_{11}detA_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}detA_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}detA_{13} + \cdots + +(-1)^{1+n}a_{1n}detA_{1n},}$$

gdzie $\boldsymbol{detA}_{ij}$ oznacza wyznacznik macierzy powstałej z macierzy $\boldsymbol{A}$ przez skreślenie *i*-tego wiersza i *j*-tej kolumny.

*Mówiąc o **wyznaczniku stopnia n** mamy na myśli wyznacznik z macierzy kwadratowej stopnia n. Symbol det jest skrótem angielskiego słowa „determinant", czyli wyznacznik. Wyznacznik oznacz się także stosując dwie pionowe kreski* $|\boldsymbol{A}|$.

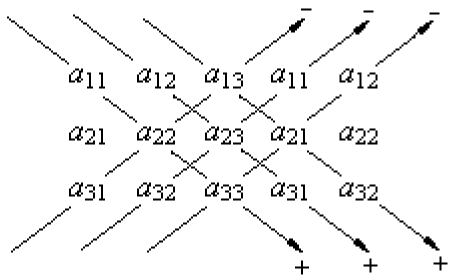
Z definicji wynikają bezpośrednio następujące rozwinięcia wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego dla $n = 2$ $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\left(lub\ zapis: \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \right)$$

dla n =3 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Istnieje prosty sposób mnemotechniczny zapamiętywania budowy **wyznaczników stopnia 3 (tylko wyznaczników stopnia 3 !!!)** , zwany **regułą Sarrusa**. Dopisujemy z prawej strony raz jeszcze pierwszą i drugą kolumnę i następnie tworzymy iloczyny ze znakami według następującego schematu:



PRZYKŁADY.

14. Obliczyć wyznacznik trzeciego stopnia metodą Sarrusa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -9 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -9 & 7 & -4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \\ -9 & 7 \end{matrix} =$$

$= 1 \cdot (-1) \cdot (-4) + 4 \cdot 2 \cdot (-9) + 0 \cdot 5 \cdot 7 - (-9) \cdot (-1) \cdot 0 - 7 \cdot 2 \cdot 1 - (-4) \cdot 5 \cdot 4 = 4 - 72 + 0 + 0 - 14 + 80 = -2$

Dla macierzy stopnia czwartego i wyższych obliczanie wyznaczników bezpośrednio z definicji jest na ogół uciążliwe. Wygodnie jest wówczas stosować *rozwinięcie Laplace'a*.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

4.1 Dopełnienie algebraiczne

- Minorem M_{ij} odpowiadającym wyrazowi a_{ij} macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ nazywamy wyznacznik macierzy, która powstaje przez usunięcie (skreślenie) z macierzy $\boldsymbol{A}$ *i-tego* wiersza i *j-tej* kolumny
- Dopełnieniem algebraicznym A_{ij} elementu a_{ij} nazywamy liczbę równą iloczynowi minora M_{ij} odpowiadającego temu elementowi i wyrażenia $(-1)^{i+j}$.
  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
- Macierz dopełnień algebraicznych nazywamy **macierzą dołączoną** i oznaczamy $\boldsymbol{A^D}$.

PRZYKŁADY.

15. Wyznaczyć macierz dopełnień macierzy z Przykładu 14: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -9 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-4) - 2 \cdot 7 = -10,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} = -(5 \cdot (-4) - 2 \cdot (-9)) = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 9 = 26,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -(-16 - 0) = 16,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} = (-4 + 0) = -4,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{22} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -9 & 7 \end{vmatrix} = -(7 + 36) = -43,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (8 + 0) = 8,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 20) = -21.$$

Otrzymujemy $\boldsymbol{A^D} = \begin{bmatrix} \mathbf{-10} & \mathbf{2} & \mathbf{26} \\ \mathbf{16} & \mathbf{-4} & \mathbf{-43} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-2} & \mathbf{-21} \end{bmatrix}$.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

4.2 Własności wyznaczników

- wyznacznik macierzy transponowanej jest równy wyznacznikowi macierzy wyjściowej $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A^T}|$,
- jeżeli macierz posiada wiersz zerowy (kolumnę zerową), wówczas det $\boldsymbol{A} = 0$,
- jeżeli macierz posiada dwa identyczne wiersze (kolumny), wówczas det $\boldsymbol{A} = 0$,
- jeżeli jakiś wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn), wówczas det $\boldsymbol{A} = 0$,

- zamiana miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika,
- jeżeli w danej macierzy elementy danego wiersza lub kolumny zostaną przemnożone przez dowolną liczbę $k \neq 0$, wówczas wartość wyznacznika również zostanie przemnożona przez *k*,
- zachodzi równość det $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ = det $\boldsymbol{A}$ · det $\boldsymbol{B}$

5. MACIERZ ODWROTNA - OBLICZANIE.

Macierz odwrotną można wyznaczyć stosując jedną z kilku metod. My skorzystamy z metody dopełnień algebraicznych.

Jeżeli wyznacznik macierzy A jest różny od zera, det $A \neq \mathbf{0}$ (wtedy macierz A nazywamy **nieosobliwą,** w przeciwnym przypadku, gdy **det** A=0 **-** macierz nazywamy **osobliwą**), to wtedy istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna do macierzy A, której postać wyznaczamy w oparciu o metodę dopełnień algebraicznych w następujący sposób:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A^D})^{\boldsymbol{T}}.$$

PRZYKŁADY.

16. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy z Przykładu 15, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -9 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

Obliczamy najpierw wyznacznik macierzy A, $\det A = -2$ - *patrz Przykład 14*.

czyli det $\boldsymbol{A} \neq 0$, a więc macierz A jest nieosobliwa, co oznacza, że macierz odwrotna $\boldsymbol{A^{-1}}$ istnieje. Dopełnienia algebraiczne wszystkich, czyli dziewięciu, wyrazów macierzy A zostały obliczone w

PRZYKŁAD.

17.

$$\boldsymbol{A^D} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 26 \\ 16 & -4 & -43 \\ 8 & -2 & -21 \end{bmatrix}$$

i w końcu otrzymujemy macierz odwrotną

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{\det A}(A^D)^T = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -10 & 16 & 8 \\ 2 & -4 & -2 \\ 26 & -43 & -21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 13 & \frac{43}{2} & \frac{21}{2} \end{bmatrix}.$$

6. ZADANIA.

1. W zadaniach a-d niech:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zad. a)

Obliczyć: $A + B,\ A - B,\ 3A,\ 0.5A,\ 2C, -\frac{1}{3}E,\ 4A + B,\ A \cdot C,\ \ B \cdot C,\ D \cdot E,\ A^T,\ C^T, D + D^T$,

$$C \cdot E + 2A, \qquad 3A - 2B.$$

Zad. b)

Obliczyć: $\det A, \det B, \det D, \det(C \cdot E), \det F$.

Zad. c)

Wyznaczyć: $A^D,\ B^D,\ D^D,\ (A^D)^D$.

Zad. d)

Obliczyć $A^{-1}, B^{-1}, (A + A^{-1})^{-1},\ \ D^{-1}, (C \cdot E)^{-1}$.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

2. Wyznaczyć $Z = A^3 + B^2,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & -1-1 \\ 2+2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Z = A^3 + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Wyznaczyć macierz $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I,\quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

<u>Wsk</u>. $A^3 = A \cdot A \cdot A$

$5A^2 = 5A \cdot A$

$-4I = -4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

4. Obliczyć wyznaczniki $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ =(rozwijamy względem 4-tej kolumny)=

$$=0 \cdot (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right. =$$

$$= 2(0 - 12 - 12 + 12 - 0 + 10) = 2 \cdot (-2) = -4.$$

!!!! 5. Wyznaczyć macierz X jeśli $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$ax = b \quad => x = \frac{b}{a}$$

Rozwiązanie: 1) $A \cdot X = B \mid A^{-1}\,(L)$ $\quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0 \qquad A_{11} = 0, \; A_{12} = -(-1) = 1, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0-1} & \mathbf{0-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{a + 2c = 1 \;\; b + 2d = 1 \;\; -a = 1 \;\; -b = 1}$

a=-1, b=-1 *-1+2c=1 =>2c=2 =>* ***c=1*** *-1+2d=1 2d=2* ***d=1***

!!!! 6. Wyznaczyć macierz X z równania $A \cdot X = 2B^{-1} \cdot A$ dla $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Wsk. $A \cdot X = 2B^{-1} \cdot A | \; A^{-1}(L)$

$A^{-1}AX = A^{-1}2B^{-1} \cdot A \qquad X = A^{-1}2B^{-1} \cdot A = 2\, A^{-1}\, B^{-1} \cdot A = 2(BA)^{-1}\, A$

$\boldsymbol{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

1. $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ kA=Ak $2\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}2$

2. $(BA)^{-1}$

3. $(BA)^{-1}A$

4. $2(BA)^{-1}A = X$.