9. Obične diferencijalne jednadžbe

DETALJAN OPIS:
U ovom dijelu razmatramo obične diferencijalne jednadžbe prvog i drugog reda. Teme pokrivaju glavne vrste jednadžbi kao što su odvojive jednadžbe prvog reda, linearne jednadžbe i linearne jednadžbe drugog reda. Također se razmatra Laplaceova transformacija i njezina primjena za rješavanje diferencijala. Primjeri s detaljnim rješavanjem prikazani su kroz teme kako bi se dale smjernice kako pristupiti i riješiti različite probleme. Razmatraju se neke primjene diferencijalnih jednadžbi u odnosu na pomorske probleme.

CILJ : Shvatiti što su diferencijalne jednadžbe i njihovu važnost za primjenu; stjecati vještine rješavanja osnovnih tipova običnih diferencijalnih jednadžbi prvog i drugog reda i razumijevanje pojmova koji stoje iza tih rješenja.

Ishodi učenja:

1. **Sposobnost određivanja vrste diferencijalne jednadžbe**
2. **Sposobnost rješavanja diferencijalne jednadžbe prvog reda korištenjem odgovarajuće metode rješenja.**
3. **Sposobnost rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima**
4. **Sposobnost rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi, korištenjem Laplaceove transformacije.**

Predznanje: algebra, logaritamske funkcije i njihova svojstva, kompleksni brojevi, diferencijali i sposobnost pronalaženja derivacija, metode integracije, nepravi integrali, sposobnost rješavanja sustava linearnih jednadžbi.

Odnos sa stvarnim pomorskim problemima: Diferencijalne jednadžbe su model svijeta. Široko se koriste za matematičko modeliranje procesa i pojava u raznim područjima znanosti i tehnologije: u mehanici, fizici, kemiji, biologiji, ekonomiji te također u modeliranju mnogih pomorskih problema. Na primjer, gibanje plovila, kotrljanje, nagib i izdizanje opisuju se diferencijalnim jednadžbama. Diferencijalne jednadžbe koriste se za opisivanje procesa hlađenja, vibracija, deformacija greda i ploča koje su važne u projektiranju broda i proračunima opterećenja za transport tereta. Diferencijalnim jednadžbama opisuju se i procesi u električnim krugovima električnih sustava posuda i elektroautomatike. Postoje i brojni morski ekološki problemi gdje su diferencijalne jednadžbe korisne, na primjer, za opisivanje mnogih kemijskih reakcija, za opisivanje razmnožavanja i izumiranja raznih bakterija i mikroorganizama u moru, za opisivanje razmnožavanja i izumiranja riblje populacije koja je važna za ribu kontrola hvatanja.

Sadržaj:

9.1. Pojam diferencijalnih jednadžbi
9.2. Diferencijalne jednadžbe prvog reda.
  9.2.1. Odvojive jednadžbe

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

9.2.2. Linearne jednadžbe
Metoda varijacije konstanti
Bernoullijeva metoda
9.3. Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda
9.3.1. Osnovni pojmovi za diferencijalne jednadžbe drugog reda. Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda.
9.3.2. Linearne homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima
9.3.3. Linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima
Metoda varijacije konstanti
Metoda neodređenih koeficijenata
9.4. Primjena Laplaceove transformacije za rješavanje diferencijalnih jednadžbi
9.4.1. Laplaceova transformacija. Definicija i glavna svojstva.
9.4.2. Primjena Laplaceove transformacije za rješavanje diferencijalnih jednadžbi
9.5. Primjeri primjena

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

9.1. Pojam diferencijalnih jednadžbi

Definicija: Diferencijalna jednadžba

Diferencijalna ***jednadžba*** je jednadžba koja uključuje i nepoznatu funkciju i njezine derivacije ili diferencijale.

Postoje obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Definicija: Obična diferencijalna jednadžba

Diferencijalna jednadžba za jednu varijabilnu funkciju naziva se obična diferencijalna jednadžba.

Opći oblik obične diferencijalne jednadžbe može se zapisati kao

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

ili

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

gdje $y(x)$ je nepoznata funkcija i $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$, $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ derivacije funkcije *y(x).*

Primjer 1

Sljedeće dvije jednadžbe,

$$y' + xy = x^3$$

$$y'' - 5y' + 6y = 13\sin(3x)$$

su obične diferencijalne jednadžbe za nepoznatu jednovarijabilnu funkciju y=y(x).

Ove se jednadžbe također mogu napisati kao:

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 13\sin(3x)$$

Definicija: Parcijalna diferencijalna jednadžba

Diferencijalna jednadžba za funkciju nekoliko varijabli naziva se ***parcijalna diferencijalna jednadžba*** (PDE). PDE sadrži djelomične derivacije.

Primjer 2

Jednadžba vibracije strune

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

je parcijalna diferencijalna jednadžba za funkciju dviju varijabli *U=U(x,t).*

U ovoj temi razmatrat će se **samo obične diferencijalne jednadžbe** prvog i drugog reda.

Definicija: Red diferencijalne jednadžbe

Red *diferencijalne jednadžbe* je red najviše derivacije koju sadrži.

Primjer 3

ODE prvog reda: $y' + xy = x^3$

ODE drugog reda .$y" - 5y' + 6y = 13sin\,(3x)$

ODE trećeg reda : $y''' - x\,ln(x) = 0$

Definicija: Rješenje diferencijalne jednadžbe

Rješenje *diferencijalne jednadžbe* ***je*** svaka funkcija koja identično zadovoljava zadanu jednadžbu.

To znači da zadana jednadžba postaje identična nakon što se njeno rješenje unese u diferencijalnu jednadžbu.

Definicija: Opća i posebna rješenja diferencijalne jednadžbe

Rješenje obične diferencijalne jednadžbe reda n, koje uključuje točno n (maksimalni broj) bitnih proizvoljnih konstanti naziva se opće ***rješenje*** .

Rješenje diferencijalne jednadžbe dobiveno zamjenom definiranih brojčanih vrijednosti umjesto proizvoljnih konstanti u općem rješenju diferencijalne jednadžbe naziva se ***posebno rješenje*** .

Definicija: Singularno rješenje diferencijalne jednadžbe

Rješenje obične diferencijalne jednadžbe koje ne sadrži proizvoljne konstante i ne može se dobiti iz općeg rješenja naziva se singularno rješenje diferencijalne jednadžbe.

9.2. Diferencijalne jednadžbe 1. reda

Glavni koncept diferencijalnih jednadžbi prvog reda bit će dan u ovom poglavlju. Detaljno će se razmotriti odvojive varijabilne jednadžbe i linearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda s njihovim metodama rješavanja. Prikazat će se dvije metode rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda, odnosno metoda varijacije konstanti i Bernoullijeva metoda (rješavanje zamjenom).

9.2.1. Glavni koncept

Obična diferencijalna jednadžba prvog reda može se dati u slijedećem standardnom obliku :

a) u implicitnom obliku

$$F(x, y, y') = 0,$$

b) u eksplicitnom obliku

$$y' = f(x, y)$$

c) u diferencijalnom obliku, budući da$y' = dy/dx$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

gdje su $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$funkcije x i y, općenito.

Također ističemo da $f(x, y) = -P(x, y)/Q(x, y)$.

Primjer 4

Razmotrimo diferencijalnu jednadžbu koja je dana u implicitnom obliku:

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - 3x = 0$$

Ova se jednadžba može napisati u eksplicitnom obliku:

$$y' = \frac{2xy + 3x}{x^2 + 1}$$

Ovu jednadžbu također možemo dobiti u diferencijalnom obliku, ako $\mathrm{dy/dx}$ umjesto y'u prvu jednadžbu zamijenimo je i obje njene strane pomnožimo s *dx* :

$$(2xy + 3x)dx - (x^2 + 1)dy = 0$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe prvog reda uključuje jednu proizvoljnu konstantu C i može se napisati u eksplicitnom $y' = \varphi(x, C)$ili implicitnom obliku $\Phi(x, y, C) = 0$.

Definicija: Opći integral

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe u implicitnom obliku $\Phi(x, y, C) = 0$ naziva se ***općim integralom*** .

Konkretno rješenje diferencijalne jednadžbe dobivamo ako u opće rješenje umjesto konstante *C zamijenimo definirani broj.*

Primjer 5

Razmotrimo jednu od najlakših diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

$$y' = 2x.$$

Za pronalaženje nepoznate funkcije *y(x)* koristimo integraciju s obzirom na x, uzimajući u obzir da $y = \int y'dx$. Kao rezultat toga, imamo

$$y = \int 2xdx = x^2 + C$$

gdje je C integracijska konstanta.

Funkcija $y = x^2 + C$ je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, budući da zadovoljava zadanu jednadžbu, tj $y' = (x^2 + C)' = 2x$. i sadrži jednu bitnu proizvoljnu konstantu C.

Dodjeljujući određene vrijednosti proizvoljnoj konstanti C u općem rješenju, dobivamo takozvana partikularna rješenja. Na primjer,

$y = x^2 - 2$ je posebno rješenje koje odgovara $C = -2$,

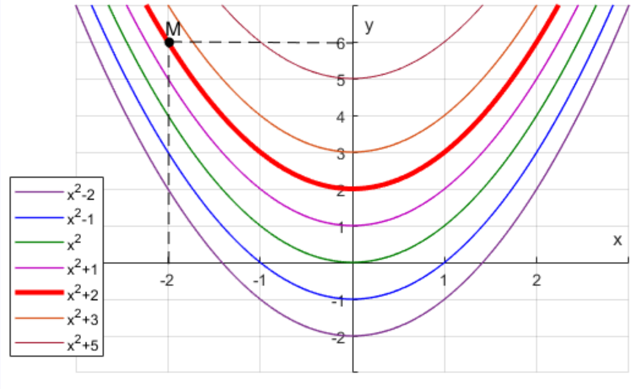
$y = x^2 - 1$ je posebno rješenje koje odgovara $C = -1$,

$y = x^2$ je posebno rješenje koje odgovara $C = 0$,

$y = x^2 + 1$ je posebno rješenje koje odgovara $C = 1$,

$y = x^2 + 2$ je posebno rješenje koje odgovara $C = 2$.

Vizualizacija dobivenih rješenja, predstavlja skup parabola, pri čemu svaka parabola odgovara određenoj vrijednosti konstante C (vidi sl.1).



sl.1 .

Zbog proizvoljne konstante *C* , opće rješenje nije samo jedna funkcija, već skup funkcija. Svakoj određenoj brojčanoj vrijednosti konstante C u općem rješenju odgovara jedno posebno rješenje.

Često je potrebno pronaći samo jedno određeno rješenje iz skupa rješenja. U ovom slučaju je zadana diferencijalna jednadžba zajedno s dodatnim uvjetom $y(x_0) = y_0$, što znači da je vrijednost nepoznate funkcije jednakay_0 po nekoj posebnoj vrijednosti x_0 argumenta. Ovaj dodatni uvjet naziva se ***početni uvjet*** .

Definicija: Problem početne vrijednosti

Problem ***početne vrijednosti*** (Cauchyev problem) je problem koji uključuje obični diferencijalni problem $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}') = 0$ zajedno s početnim uvjetom $\mathrm{y}(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0$koji specificira vrijednost nepoznate funkcije u danoj točki x_0. To je problem pronalaska određenog rješenja diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava početni uvjet $\mathrm{y}(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0$.

Stoga se rješenja diferencijalne jednadžbe mogu promatrati kao obitelj krivulja rješenja u x y-ravnini. Osim toga, s geometrijske točke gledišta, početni uvjet $y(x_0) = y_0$je isti kao točka ($x_0, \ y_0$) kroz koju mora proći krivulja rješenja.

Problem početne vrijednosti rješava se na sljedeći način

1. Pronađite opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe koje uključuje proizvoljnu konstantu C.

2. Zamijenite x_0i $y_0$iz početnog stanja u opće rješenje umjesto x i y.

3. Riješite dobivenu jednadžbu s obzirom na C.

4. Zamijenite rezultat natrag u opće rješenje.

Primjer 6

Uzmimo diferencijalnu jednadžbu iz primjera 5 i razmotrimo je kao problem početne vrijednosti

$$\mathrm{y}' = 2\mathrm{x} \text{ i } \mathrm{y}(-2) = 6.$$

Dakle, zadatak je pronaći određeno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava početni uvjet $y(-2) = 6$, što znači da je pri x=-2 vrijednost funkcije rješenja y=6.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe iz primjera 5 je

$$y = x^2 + C$$

Da bismo pronašli odgovarajuću vrijednost C, zamjenjujemo $x = -2$i $y = 6$(tj. početni uvjet) u opće rješenje:

$$6 = (-2)^2 + C$$

$$6 = 4 + C$$

$$C = 2$$

Rješenje problema početne vrijednosti nalazi se zamjenom dobivene C vrijednosti u opće rješenje. To znači da je određeno rješenje koje zadovoljava zadani početni uvjet:

$$y = x^2 + 2$$

Grafička interpretacija rezultata (vidi Sl.1) znači da se iz skupa krivulja $y = x^2 + 2$ mora odabrati samo krivulja koja prolazi kroz točku M(-2,6).

Postoje različite vrste diferencijalnih jednadžbi prvog reda koje se rješavaju različitim metodama. U nastavku se raspravlja o nekoliko tipova diferencijalnih jednadžbi prvog reda i njihova rješenja. To su odvojive jednadžbe varijable i linearne jednadžbe.

9.2.2. Odvojive jednadžbe

Razmotrimo diferencijalnu jednadžbu danu u obliku $y' = f(x, y)$.

Definicija:

Diferencijalna jednadžba prvog reda $y' = f(x, y)$ naziva se jednadžba varijable koja se može odvojiti ako se funkcija $f(x, y)$može faktorizirati u umnožak dviju funkcija x i y (tj. može se podijeliti na množitelje tako da svaki množitelj ovisi samo o jednoj varijabli):

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

gdje su $f_1(x)$i $f_2(y)$kontinuirane funkcije.

Metoda rješenja :

1) $\frac{dy}{dx}$ zamijenite sa y'

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

2) Odvojite varijable, tj. premjestite sve y članove (uključujući *dy*) na jednu stranu jednadžbe i sve članove x (uključujući *dx*) na drugu stranu.

U tu svrhu, pomnožite obje strane jednadžbe s *dx* i podijelite s $f_2(y)$:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

Ovdje pretpostavljamo da $f_2(y) \neq 0$.

3) Integrirajte izravno obje strane jednadžbe s obzirom na njihove varijable.

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$$

4) Riješite dobivenu jednadžbu ako je moguće.

Ako se *y(x)* ne može izraziti u eksplicitnom obliku, izraz s desne strane jednadžbe se pomiče na lijevu stranu. U tom slučaju dobiva se opći integral diferencijalne jednadžbe.

5) Dijeljenje s $f_2(y)$pretpostavljamo da $f_2(y) \neq 0$. To može uzrokovati gubitak otopine $f_2(y) = 0$. Ako postoje vrijednosti y za koje $f_2(y) = 0$i te vrijednosti zadovoljavaju zadanu diferencijalnu jednadžbu, tada će te vrijednosti također biti rješenja diferencijalne jednadžbe. Stoga bismo trebali dokazati $f_2(y) = 0$je li rješenje diferencijalne jednadžbe, a ako je rješenje, onda provjeriti je li to singularno rješenje.

Razmotrimo diferencijalnu jednadžbu danu u obliku

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Definicija:

Diferencijalna jednadžba $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ naziva se jednadžba varijable koja se može odvojiti ako se svaka funkcija $P(x, y)$i $Q(x, y)dy$ može rastaviti u umnožak dviju funkcija tako da svaki množitelj ovisi samo o jednoj varijabli:

$$P_1(x) \cdot P_2(y)dx + Q_1(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$$

Metoda rješenja:

1) Odvojite varijable:

$$Q_1(x) \cdot Q_2(y)dy = -P_1(x) \cdot P_2(y)dx$$

$$\frac{Q_2(y)dy}{P_2(y)} = -\frac{P_1(x)dx}{Q_1(x)}$$

2) Integrirajte obje strane dobivenog izraza:

$$\int \frac{Q_2(y)dy}{P_2(y)} = -\int \frac{P_1(x)dx}{Q_1(x)}$$

3) Dobiti rješenje u eksplicitnom ili implicitnom obliku.

4) Provjerite jesu li $P_2(y) = 0$i $Q_1(y) = 0$ singularna rješenja diferencijalne jednadžbe.

Primjer 7

Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' - (x + 2) \cdot e^{-y} = 0$.

Ova se jednadžba može prepisati kao

$$y' = (x + 2) \cdot e^{-y}$$

Ova je jednadžba jednadžba varijable koja se može odvojiti jer je funkcija na desnoj strani jednadžbe proizvod dviju funkcija. Jedna funkcija ovisi samo o *x* , a druga samo o *y* .

Jednadžbu rješavamo sljedećim koracima:

1) Zamijenite y'sa $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = (x + 2) \cdot e^{-y}$$

2) Odvojite varijable množenjem obje strane jednadžbe s *dx* i dijeljenjem s e^{-y}.

$$\frac{dy}{e^{-y}} = (x + 2)dx$$

Budući da $e^{-y} \neq 0$, ne propuštamo nijedno rješenje dijeljenje s e^{-y}.

3) Sada imamo izraz koji sadrži samo *y* pojmova na lijevoj strani i samo *x* članova na desnoj strani. To znači da možemo integrirati obje strane izraza:

$$\int \frac{dy}{e^{-y}} = \int (x + 2)dx$$

Nađimo odvojeno oba integrala:

$$\int \frac{dy}{e^{-y}} = \int e^y dy = e^y + C_1$$

$$\int (x + 2)dx = \int (x + 2)d(x + 2) = \frac{(x + 2)^2}{2} + C_2$$

4) Kao rezultat toga, imamo

$$e^y + C_1 = \frac{(x+2)^2}{2} + C_2$$

$$e^y = \frac{(x+2)^2}{2} + C_2 - C_1$$

Budući da su C_1 i C_2 konstante, $C_2 - C_1 = C$ također je konstanta. Stoga se nakon integracije obje strane izraza C obično samo jedna konstanta integracije stavlja na samo jednu stranu izraza.

$$e^y = \frac{(x+2)^2}{2} + C$$

Rješenje u eksplicitnom obliku je

$$y = \ln\left(\frac{(x+2)^2}{2} + C\right)$$

Posljednji izraz je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Primjer 8

Riješite diferencijalnu jednadžbu $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.

Zadana jednadžba se može prepisati u obliku

$$y \cdot (1+x)dx + x \cdot (1-y)dy = 0$$

Ova je jednadžba jednadžba varijable koja se može odvojiti jer funkcije prije *dx* i prije *dy* imaju oblik umnoška samo jedne varijabilne funkcije.

Jednadžbu rješavamo sljedećim koracima:

1) Zamijenite mjesta pojmova

$$x \cdot (1-y)dy = -y \cdot (1+x)dx$$

2) Odvojite varijable dijeljenjem obje strane jednadžbe sa yi *x* ($x \neq 0$ i $y \neq 0$).

$$\frac{x \cdot (1-y)dy}{x \cdot y} = -\frac{y \cdot (1+x)}{x \cdot y}dx$$

$$\frac{(1-y)dy}{y} = -\frac{(1+x)}{x}dx$$

3) Integrirajte svaku stranu dobivene jednadžbe:

$$\int \frac{(1-y)dy}{y} = -\int \frac{(1+x)}{x} dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = -\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$$

$$\ln|y| - y = -\ln|x| - x + C$$

$$\ln|y| + \ln|x| - y + x = C$$

Kao rezultat, dobili smo opće rješenje jednadžbe u obliku općeg integrala:

$$\ln|y \cdot x| + x - y = C$$

gdje $x \neq 0$i $y \neq 0$, kako bi se zadovoljio uvjet na argument logaritamske funkcije.

4) Provjeravamo moguće propuštena rješenja zbog dijeljenja s x i y:

Oboje $x = 0$ i $y = 0$zadovoljava zadane diferencijalne jednadžbe, ali se ne mogu dobiti iz općeg rješenja, tako da su $x = 0$i $y = 0$ singularna rješenja diferencijalne jednadžbe.

Općenito, ***metoda rješenja za jednadžbe odvojive varijable je:***

1) Odvojite varijable, tj. prepišite jednadžbu tako da se članovi ovisni o x i članovi ovisni o y pojavljuju na suprotnim stranama, tako da postoji samo jedna varijabla na svakoj strani jednadžbe.

2) Integrirajte jednu stranu dobivenog izraza s obzirom na y, a drugu stranu s obzirom na x.

3) Pojednostavite.

4) Provjera eventualno promašenih rješenja, odnosno postojanje singularnih rješenja diferencijalne jednadžbe.

9.2.3. Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Definicija: Linearna diferencijalna jednadžba

Diferencijalna jednadžba prvog reda naziva se *linearna diferencijalna jednadžba* ako se može napisati u obliku

$$y' + p(x)y = f(x)$$

gdje su $p(x)$i $f(x)$kontinuirane funkcije.

Definicija: Homogene i nehomogene linearne jednadžbe

1) Ako je funkcija $f(x)$na desnoj strani jednadžbe jednaka nuli, tada se diferencijalna jednadžba naziva *homogena linearna jednadžba* :

$$\mathrm{y}' + \mathrm{p(x)y} = 0, \quad (f(x) = 0)$$

2) Ako funkcija $f(x)$in na desnoj strani jednadžbe nije jednaka nuli, tada se diferencijalna jednadžba naziva ***nehomogena linearna jednadžba*** :

$$\mathrm{y}' + \mathrm{p(x)y} = \mathrm{f(x)}, \quad (f(x) \neq 0)$$

Metoda rješenja:

Postoje dvije metode za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe. To su metoda varijacije konstante i Bernoullijeva metoda. Ovdje će se razmotriti obje metode.

1. Metoda varijacije konstante

Metoda se sastoji od sljedećih koraka

1) Pronađite opće rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe

$$\mathrm{y}' + \mathrm{p(x)y} = 0.$$

Opće rješenje homogene jednadžbe sadrži konstantu integracije C.

2) Zamijenite konstantu C određenom (ali još uvijek nepoznatom) funkcijom C(x).

3) Odrediti nepoznatu funkciju C(x) zamjenom ovog općeg rješenja homogene jednadžbe u zadanu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu.

Primjer 9

Riješite diferencijalnu jednadžbu $xy' + y = sinx$metodom *varijacije konstante.*

Ova jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda i može se prepisati u obliku

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{sinx}{x}$$

1) Rješavamo odgovarajuću homogenu linearnu jednadžbu:

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

Ovo je jednadžba varijable koja se može odvojiti. Stoga zamjenjujemo y's $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, i premještamo drugi član s lijeve strane jednadžbe na desnu stranu:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{y}{x}$$

Zatim odvajamo varijable, pod uvjetom da$y \neq 0$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = -\frac{dx}{x}$$

i integrirati obje strane jednadžbe:

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = -\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

$$\ln|\mathrm{y}| = -\ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C}$$

Budući da je C proizvoljna konstanta, može se napisati u obliku $\ln|\mathrm{C}|$:

$$\ln|\mathrm{y}| = -\ln|\mathrm{x}| + \ln|\mathrm{C}|$$

Zatim, koristeći svojstva logaritma, imamo:

$$\ln|\mathrm{y}| = \ln\left|\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x}}\right|$$

Kao rezultat, dobivamo opće rješenje homogene jednadžbe u obliku

$$\mathrm{y}_0 = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x}}$$

2) Da bismo pronašli opće rješenje nehomogene jednadžbe, zamjenjujemo konstantu C s nepoznatom funkcijom C(x):

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}}$$

4) Nepoznata funkcija C(x) nalazi se zamjenom $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}}$ u zadanu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu zajedno s njezinim izvodom y' :

$$\mathrm{y}' = \left(\frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}}\right)' = \frac{\mathrm{x} \cdot \mathrm{C}'(\mathrm{x}) - \mathrm{x}' \cdot \mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}^2} = \frac{\mathrm{x} \cdot \mathrm{C}'(\mathrm{x}) - \mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}^2} = \frac{\mathrm{C}'(\mathrm{x})}{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}^2}$$

Nakon zamjene y i y' u zadanu jednadžbu imamo

$$\left(\frac{\mathrm{C}'(\mathrm{x})}{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}^2}\right) + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{sinx}{x}$$

Ova se jednadžba može pojednostaviti kao

$$\mathrm{C}'(\mathrm{x}) = sinx$$

Da bismo pronašli nepoznatu funkciju C(x), integriramo dobiveni izraz s obzirom na x:

$$\mathrm{C(x)} = \int \mathrm{C'(x)dx} = \int sinx\,dx = -cosx + C$$

Zamjenom dobivene funkcije *C(x)* u izraz za y, imamo opće rješenje zadane nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe:

$$\mathrm{y} = \frac{-\cos(\mathrm{x}) + \mathrm{C}}{\mathrm{x}}$$

2. Bernoullijeva metoda (Rješenje primjenom zamjene $\boldsymbol{y = U \cdot V}$)

Glavna ideja je da se rješenje y linearne diferencijalne jednadžbe $\mathrm{y' + p(x)y = f(x)}$ traži kao proizvod dviju funkcija $\underline{\mathrm{y = U \cdot V}}$, gdje su $U = U(x)$un $V = V(x)$nepoznate funkcije. Jedna od ovih funkcija može se odabrati proizvoljno, ali druga funkcija mora biti odabrana na način na koji množenje $\mathrm{U(x) \cdot V(x)}$zadovoljava diferencijalnu jednadžbu.

Koraci rješavanja:

1) Zamijenite funkciju $\mathrm{y = U \cdot V}$i njenu derivaciju $\mathrm{y' = U' \cdot V + U \cdot V'}$u danu linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathrm{y' + p(x)y = f(x)}$$

Jednadžba poprima oblik

$$\mathrm{U'V + UV' + p(x)UV = f(x)}$$

ili

$$\mathrm{U'V + U \cdot (V' + p(x)V) = f(x)}$$

2) Funkcija *V* je odabrana da izraz u zagradi bude jednak nuli:

$$\mathrm{V' + p(x)V = 0}$$

Tada posljednja jednadžba u 1. koraku postaje:

$$\mathrm{U'V + U \cdot 0 = f(x)} \text{ili } \mathrm{U'V = f(x)}.$$

Kao rezultat, potrebno je riješiti sljedeći sustav

$$\begin{cases} \mathrm{V' + p(x)V = 0} \\ \mathrm{U'V = f(x)} \end{cases}$$

3) Jednadžba $\mathrm{V}' + \mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{V} = 0$ je odvojiva varijabla diferencijalna jednadžba tako da se za V rješava odvajanjem varijabli:

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = -\mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{V}$$

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = -\mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

$$\int \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = -\int \mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

$$\ln|\mathrm{V}| = -\int \mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{dx}} + \mathrm{C}_1$$

Ovdje se pretpostavlja da je konstanta $\mathrm{C}_1 = 0$, jer je jednadžba dovoljna da ima samo jedno određeno rješenje.

4) Zamijenite dobiveni V natrag u jednadžbu $\mathrm{U}'\mathrm{V} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$:

$$\mathrm{U}' \cdot \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{dx}} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

6) Riješite posljednju jednadžbu za U.

7) Na kraju dobivene U i V zamijenite u *y = UV* i dobijete opće rješenje.

Primjer 10

Riješite linearnu diferencijalnu jednadžbu $xy' + y = sinx$ zamjenom *y=UV.*

Prethodno zapisujemo jednadžbu u obliku

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{sinx}{x}$$

1) Zamjenjujemo funkciju $\mathrm{y} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$i njenu derivaciju $\mathrm{y}' = \mathrm{U}' \cdot \mathrm{V} + \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}'$u zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$U'V + UV' + \frac{UV}{x} = \frac{sinx}{x}$$

ili

$$U'V + U\left(V' + \frac{V}{x}\right) = \frac{sinx}{x}$$

2) Prema metodi, izraz u zagradama izjednačavamo s nulom:

$$V' + \frac{V}{x} = 0$$

Tada se jednadžba može napisati kao sustav od dvije jednadžbe:

$$\begin{cases} V' + \frac{V}{x} = 0 \\ U'V = \frac{sinx}{x} \end{cases}$$

3) Rješavamo prvu jednadžbu sustava za V. Ovo je jednadžba odvojive varijable:

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = -\frac{V}{x}$$

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = -\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

$$\ln|\mathrm{V}| = -\ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C}_1$$

gdje pretpostavljamo $\mathrm{C}_1 = 0$ da je:

$$\ln|\mathrm{V}| = -\ln|\mathrm{x}| \quad \Rightarrow \quad \ln|\mathrm{V}| = \ln|\mathrm{x}^{-1}|$$

$$\mathrm{V} = \frac{1}{\mathrm{x}}$$

4) Dobiveni V zamjenjujemo natrag u drugu jednadžbu sustava:

$$\mathrm{U'V} = \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{x}}$$

$$U' \cdot \frac{1}{x} = \frac{sinx}{x}$$

Dobivenu jednadžbu za U pojednostavljujemo i rješavamo:

$$U' = sinx$$

$$\mathrm{U} = \int \mathrm{U'dx} = \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

5) Zamjenom dobivenih U i V u y = UV dobivamo opće rješenje za zadanu linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathrm{y} = \mathrm{UV} = (-\cos x + C) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{C} - \cos x}{\mathrm{x}}$$

Vježbe

Vježba 9.1.

Riješite problem početne vrijednosti (Cauchyjev problem)

$$y' = y \cdot \cot x\,, \qquad \mathrm{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

Riješenje:

Ova je jednadžba jednadžba varijable koja se može odvojiti jer je funkcija na desnoj strani jednadžbe proizvod dviju funkcija. Jedna funkcija ovisi samo o x, a druga samo o y.

Jednadžbu rješavamo u sljedećim koracima:

1) Zamijenite y'sa $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cot x$$

2) Odvajamo varijable, množimo obje strane jednadžbe s *dx* i dijelimo s y:

$$\frac{dy}{y} = \cot x \cdot dx$$

Ovdje pretpostavljamo $y \neq 0$.

3) Imamo jednadžbu koja sadrži samo y članove na lijevoj strani i samo x članove na desnoj strani. To znači da možemo integrirati obje strane jednadžbe:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cot x dx$$

Nađimo integral na desnoj strani izraza:

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

4) Kao rezultat toga, imamo

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + C$$

gdje C je konstanta.

na desnu stranu izraza C možemo napisati umjesto $\ln|\mathrm{C}_1|$, gdje C_1je također konstanta ($\mathrm{C}_1 \neq 0$). Dopušteno je i zbog C i $\ln|\mathrm{C}_1|$zbog proizvoljne konstante.

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|\mathrm{C}_1|$$

Prema svojstvima logaritamskih funkcija imamo

$$\ln|y| = \ln|C_1 \cdot \sin x|$$

Kao rezultat, dobivamo **opće rješenje** zadane diferencijalne jednadžbe u eksplicitnom obliku:

$$y = C_1 \cdot \sin x\,, \qquad (C_1 \neq 0\,).$$

4) Provjerite moguća propuštena rješenja zbog dijeljenja s y:

$y = 0$ ali neće biti singularno rješenje ako dobiveno opće rješenje diferencijalne jednadžbe prepišemo u obliku

$$y = C \cdot \sin x\,,$$

gdje je C proizvoljna konstanta (može biti jednaka nuli).

U ovom slučaju rješenje $y = 0$ se može dobiti iz općeg rješenja pri C=0, dakle to je posebno rješenje zadane jednadžbe.

Kao rezultat, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe je

$$y = C \cdot \sin x$$

5) Za rješavanje problema početne vrijednosti potrebno je pronaći samo jedno posebno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava početni uvjet $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$, tj. vrijednost funkcije y(x) mora biti jednaka 3na $x = \frac{\pi}{2}$. Da bismo pronašli ovo konkretno rješenje, ubacujemo $y = 3$i x= $\frac{\pi}{2}$ u opće rješenje.

$$3 = C \cdot \sin\frac{\pi}{2}$$

$$3 = C \cdot 1$$

$$C = 3.$$

Dobivenu vrijednost konstante C ubacujemo u opće rješenje i dobivamo **posebno rješenje** zadanog problema početne vrijednosti.

$$y = 3 \cdot \sin x$$

Vježba 9.2.

Riješite problem početne vrijednosti (Cauchyjev problem)

$$2(x^2y + y)y' + \sqrt{1 + y^2} = 0\,, \qquad y(0) = 2.$$

Riješenje:

Ova se jednadžba može prepisati kao

$$2y(x^2 + 1)y' = -\sqrt{1 + y^2}$$

Ova je jednadžba jednadžba varijable koja se može odvojiti jer je funkcija prije y' na lijevoj strani jednadžbe proizvod dviju funkcija. Jedna funkcija ovisi samo o x, a druga samo o y. Funkcija na desnoj strani jednadžbe ovisi samo o y.

Jednadžbu rješavamo sljedećim koracima:

1) Prvo zamjenjujemo y'sa $\frac{dy}{dx}$:

$$2y(x^2+1)\frac{dy}{dx}=-\sqrt{1+y^2}$$

2) Odvajamo varijable, množimo obje strane jednadžbe s *dx* i dijelimo sa (x^2+1)i sa $\sqrt{1+y^2}$:

$$\frac{2ydy}{\sqrt{1+y^2}}=-\frac{dx}{(x^2+1)}$$

Budući da $\sqrt{1+y^2}\neq 0$i $(x^2+1)\neq 0$, Ne propuštamo nijedno rješenje dijeljenje sa (x^2+1)i po $\sqrt{1+y^2}$.

3) Sada imamo izraz koji sadrži samo y pojmova na lijevoj strani i samo x članova na desnoj strani. To znači da možemo integrirati obje strane izraza:

$$\int\frac{2ydy}{\sqrt{1+y^2}}=-\int\frac{dx}{(x^2+1)}$$

Nađimo integral u lijevoj strani izraza:

$$\int\frac{2ydy}{\sqrt{1+y^2}}=\int\frac{d(y^2)}{\sqrt{1+y^2}}=\int(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+y^2)=2(1+y^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

4) Kao rezultat toga, imamo

$$2\sqrt{1+y^2}=-\mathrm{arctan}x+C$$

ili

$$2\sqrt{1+y^2}+\mathrm{arctan}x=C$$

gdje C je proizvoljna konstanta.

Posljednji izraz je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

5) Da bismo riješili problem početne vrijednosti, trebali bismo pronaći samo jedno posebno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava početni uvjet $y(0)=2$. Kako bismo pronašli ovo konkretno rješenje, u opće rješenje ubacujemo $y=2$ i x $.=0$

$$2\sqrt{1+2^2}+\mathrm{arctan}0=C$$

$$2\sqrt{5}+0=C \quad ➔ \quad C=2\sqrt{5}.$$

Dobivenu vrijednost konstante C ubacujemo u opće rješenje i dobivamo posebno rješenje zadanog problema početne vrijednosti u implicitnom obliku

$$2\sqrt{1+y^2}+\mathrm{arctan}x=2\sqrt{5}$$

Vježba 9.3.

Riješenje:

Riješite diferencijalnu jednadžbu $(\mathrm{e}^{2x}+3)\mathrm{d}y+y\cdot\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=0$.

Ova jednadžba je jednadžba varijable koja se može odvojiti jer funkcija prije *dy* ovisi samo o x, a funkcija *dx* ima oblik umnoška samo jedne varijabilne funkcije.

Jednadžbu rješavamo sljedećim koracima:

1) Zamijenite mjesta pojmova

$$(\mathrm{e}^{2x}+3)\mathrm{d}y=-y\cdot\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$$

2) Odvajamo varijable dijeljenjem obje strane jednadžbe sa yi sa $\mathrm{e}^{2x}+3(\ y\neq 0)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+3}\mathrm{d}x$$

3) Integriramo svaku stranu dobivene jednadžbe:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+3}\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}+3)}{\mathrm{e}^{2x}+3}$$

$$\ln|y|=-\frac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^{2x}+3|+\ln|C|$$

Dobiveno rješenje pojednostavljujemo korištenjem svojstava logaritamske funkcije:

$$\ln|y|=\ln(\mathrm{e}^{2x}+3)^{-\frac{1}{2}}+\ln|C|$$

$$\ln|y|=\ln\left|C\cdot(\mathrm{e}^{2x}+3)^{-\frac{1}{2}}\right|$$

$$y=C\cdot(\mathrm{e}^{2x}+3)^{-\frac{1}{2}}$$

Kao rezultat, dobivamo opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$y=\frac{C}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}}$$

4) Provjeravamo moguća propuštena rješenja zbog dijeljenja s y:

$y=0$ zadovoljava zadane diferencijalne jednadžbe, a može se dobiti iz općeg rješenja pri C=0. Stoga nije jedinstveno rješenje.

Vježba 9.4.

Riješite problem početne vrijednosti (Cauchyjev problem)

$$y'+y\tan x=\frac{1}{\cos x}\,,\qquad y(\pi)=0.$$

Riješenje:

Ovo je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, koja se rješava zamjenom y=UV.

1) Zamjenjujemo funkciju $\mathrm{y} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$i njenu derivaciju $\mathrm{y}' = \mathrm{U}' \cdot \mathrm{V} + \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}'$u zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathrm{U}'\mathrm{V} + \mathrm{U}\mathrm{V}' + \mathrm{U}\mathrm{V} \cdot tanx = \frac{1}{\cos x}$$

$$\mathrm{U}'\mathrm{V} + \mathrm{U}(\mathrm{V}' + \mathrm{V} \cdot tanx) = \frac{1}{\cos x}$$

2) Prema metodi, izraz u zagradama izjednačavamo s nulom:

$$V' + \mathrm{V} \cdot tanx = 0$$

Tada se posljednja jednadžba u koraku 1 može napisati kao sustav od dvije jednadžbe :

$$\begin{cases} V' + \mathrm{V} \cdot tanx = 0 \\ \mathrm{U}'\mathrm{V} = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

3) Prvu jednadžbu sustava rješavamo odvajanjem varijabli:

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = -\mathrm{V} \cdot \tan x$$

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = -\tan x\, dx$$

$$\int \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = -\int \tan x\, dx$$

Desna strana je jednaka

$$-\int \tan x\, dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\, d(cosx) = \ln|\cos x| + C_1$$

Stoga,

$$\ln|\mathrm{V}| = \ln|\cos x| + \mathrm{C}_1$$

Pod pretpostavkom $\mathrm{C}_1 = 0$da imamo

$$\ln|\mathrm{V}| = \ln|\cos x|$$

$$\mathrm{V} = \cos x$$

4) Dobiveni V zamjenjujemo natrag u drugu jednadžbu sustava:

$$U'V = \frac{1}{\cos x}$$

$$U'cosx = \frac{1}{\cos x}$$

Dobivenu gornju jednadžbu pojednostavljujemo i rješavamo:

$$U' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{U} = \int \mathrm{U'dx} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \tan x + \mathrm{C}$$

5) Zamjenom dobivenih U i V u y = UV dobivamo opće rješenje za zadanu linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathrm{y} = \mathrm{UV} = (\tan x + \mathrm{C}) \cdot \cos x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \mathrm{C}\right) \cdot \cos x = \sin x + \mathrm{C} \cdot \cos x$$

Kao rezultat, opće rješenje diferencijalne jednadžbe je

$$\mathrm{y} = \sin x + \mathrm{C} \cdot \cos x$$

6) Rješavamo problem početne vrijednosti, to znači da trebamo pronaći samo jedno posebno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava početni uvjet $\mathrm{y}(\pi) = 0$, tj. vrijednost funkcije y(x) mora biti jednaka 0na $\mathrm{x} = \pi$. Da bismo pronašli ovo posebno rješenje, zamjenjujemo $\mathrm{y} = 0$i $\mathrm{x} = \pi$ u opće rješenje.

$$0 = \sin\pi + \mathrm{C} \cdot \cos\pi$$

$$0 = 0 + \mathrm{C} \cdot (-1) \;\rightarrow\; -\mathrm{C} = 0 \quad \rightarrow\; \mathrm{C} = 0.$$

Dobivenu vrijednost konstante C zamjenjujemo na opće rješenje i dobivamo posebno rješenje zadanog problema početne vrijednosti

$$\mathrm{y} = \sin x$$

Vježba 9.5.

Riješite diferencijalnu jednadžbu $\mathrm{y}' - 3\mathrm{x}^2\mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}$.

Riješenje:

Ovo je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda. Riješit ćemo ga zamjenom y=UV.

1) Zamjenjujemo funkciju $\mathrm{y} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$i njenu derivaciju $\mathrm{y}' = \mathrm{U}' \cdot \mathrm{V} + \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}'$u zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathrm{U'V} + \mathrm{UV'} - 3\mathrm{x}^2 \cdot \mathrm{UV} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}$$

$$\mathrm{U'V} + \mathrm{U}(\mathrm{V'} - \mathrm{V} \cdot 3\mathrm{x}^2) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}$$

2) Prema metodi, izraz u zagradama izjednačavamo s nulom :

$$V' - \mathrm{V} \cdot 3\mathrm{x}^2 = 0$$

Posljednja jednadžba u koraku 1 može se napisati kao sustav od dvije jednadžbe:

$$\begin{cases} V' - \mathrm{V} \cdot 3\mathrm{x}^2 = 0 \\ \mathrm{U'V} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3} \end{cases}$$

3) Prvu jednadžbu sustava rješavamo odvajanjem varijabli:

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{V} \cdot 3\mathrm{x}^2$$

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = 3\mathrm{x}^2\, dx$$

$$\int \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = \int 3\mathrm{x}^2\, dx$$

$$\ln|\mathrm{V}| = \mathrm{x}^3 + \mathrm{C}_1$$

Pod pretpostavkom $\mathrm{C}_1 = 0$, imamo:

$$\ln|\mathrm{V}| = \mathrm{x}^3 \quad \rightarrow \quad \mathrm{V} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}$$

V zamjenjujemo natrag u drugu jednadžbu sustava:

$$U'V = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3} \quad \rightarrow \quad U'\mathrm{e}^{\mathrm{x}^3} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}$$

Pojednostavljujemo i rješavamo jednadžbu za *U* :

$$U' = \mathrm{x}$$

$$\mathrm{U} = \int \mathrm{U}'\mathrm{dx} = \int \mathrm{x}\,\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{C}$$

5) Zamjenom dobivenih U i V u y = UV dobivamo opće rješenje za zadanu linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathrm{y} = \mathrm{UV} = \left(\frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{C}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}$$

Vježba 9.6.

Riješite problem početne vrijednosti

$$(1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2\,, \qquad \mathrm{y}(1) = 4.$$

Riješenje:

Prvo prepisujemo zadanu jednadžbu u obliku

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$$

Obje strane jednadžbe dijelimo sa $(1 + x^2)$:

$$y' - \frac{2xy}{(1 + x^2)} = (1 + x^2)$$

Sada je jasno da je ova diferencijalna jednadžba linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, koja se može riješiti zamjenom *y=UV* (Bernoullijeva metoda).

1) Zamjenjujemo funkciju $\mathrm{y} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$i njenu derivaciju $\mathrm{y}' = \mathrm{U}' \cdot \mathrm{V} + \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}'$u diferencijalnu jednadžbu:

$$U'V + UV' - \frac{2x \cdot UV}{(1 + x^2)} = (1 + x^2)$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{2x \cdot V}{(1+x^2)}\right) = (1+x^2)$$

2) Prema metodi, izraz u zagradama izjednačavamo s nulom :

$$V' - \frac{2x \cdot V}{(1+x^2)} = 0$$

Posljednja jednadžba u koraku 1 može se napisati kao sustav od dvije jednadžbe:

$$\begin{cases} V' - \dfrac{2x \cdot V}{(1+x^2)} = 0 \\ \mathrm{U'V} = (1+x^2) \end{cases}$$

3) Prvu jednadžbu sustava rješavamo odvajanjem varijabli:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2x \cdot V}{(1+x^2)}$$

$$\int \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V}} = \int \frac{2x}{(1+x^2)}\,dx$$

Za procjenu integrala na desnoj strani jednadžbe koristimo $2xdx = d(x^2) = d(1+x^2)$,

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)}\,d(x^2+1) = \ln|x^2+1| + C_1$$

Stoga,

$$\ln|\mathrm{V}| = \ln|x^2+1| + \mathrm{C}_1$$

Pod pretpostavkom $\mathrm{C}_1 = 0$da imamo

$$\ln|\mathrm{V}| = \ln|x^2+1| \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V} = x^2+1$$

V zamjenjujemo natrag u drugu jednadžbu sustava:

$$U'V = x^2+1$$

$$U'(x^2+1) = x^2+1$$

Pojednostavite i riješite jednadžbu za *U* :

$$U' = 1$$

$$\mathrm{U} = \int \mathrm{U'dx} = \int 1\,\mathrm{dx} = x + \mathrm{C}$$

5) Zamjenom dobivenih U i V u *y = UV* dobivamo opće rješenje za zadanu linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathrm{y} = \mathrm{UV} = (\mathrm{x}+\mathrm{C}) \cdot (x^2+1)$$

Kao rezultat, opće rješenje diferencijalne jednadžbe je

$$\mathrm{y} = (\mathrm{x}+\mathrm{C}) \cdot (x^2+1)$$

Da bismo pronašli određeno rješenje, zamjenjujemo $\mathrm{y} = 4$i $\mathrm{x} = 1$ u opće rješenje.

$$4 = (1+\mathrm{C}) \cdot (1^2+1)$$

$$4 = (1 + C) \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = 1$$

Zamijenite dobivenu vrijednost konstante C na opće rješenje kako biste dobili posebno rješenje zadanog problema početne vrijednosti:

$$\mathrm{y} = (\mathrm{x} + 1) \cdot (x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$$

9.3. Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda.

U ovom ćemo odjeljku ukratko razmotriti osnovne koncepte za diferencijalne jednadžbe drugog reda. Detaljno će se razmatrati linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima i dvije metode rješavanja, odnosno metoda varijacije konstanti i metoda neodređenih koeficijenata.

9.3.1. Osnovni pojmovi za diferencijalne jednadžbe drugog reda. Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda.

Diferencijalna jednadžba drugog reda može se napisati u općem (implicitnom) obliku

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

ili u eksplicitnom obliku

$$y'' = f(x, y, y')$$

gdje je *y=y(x)* nepoznata funkcija.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda uključuje dvije proizvoljne konstante C_1 i C_2. Može se napisati u eksplicitnom $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ili implicitnom obliku $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

Primjer 11

Razmotrimo najjednostavniju diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$y'' = 6x$$

Nepoznata funkcija *y(x)* nalazi se integracijom obje strane jednadžbe dva puta s obzirom na x:

$$y' = \int 6x dx = 3x^2 + C_1$$

$$y = \int (3x^2 + C_1) dx = x^3 + C_1 x + C_2$$

gdje C_1, C_2su proizvoljne integracijske konstante.

Opće rješenje zadane jednadžbe je:

$$y = x^3 + C_1 x + C_2$$

Da bi se pronašlo samo jedno posebno rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda, potrebna su dva dodatna uvjeta. Ovi dodatni uvjeti mogu se dati kao

1) *Početni uvjeti vrijednosti* , kada su vrijednosti funkcija y(x) i y'(x) propisane na definiranoj $x_0$vrijednosti x:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{and} \;\; y'(x_0) = y_1$$

2) *Rubni uvjeti* , kada su vrijednosti y(x) funkcije propisane za različite x_1i $x_2$vrijednosti x.

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{and} \;\; y(x_2) = y_2$$

Primjer 12

Razmotrimo diferencijalnu jednadžbu iz primjera 11 kao problem početne vrijednosti

$$y'' = 6x \text{ i } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe iz primjera 11 je

$$y = x^3 + C_1 x + C_2.$$

Da bismo pronašli odgovarajuće C_1i C_2vrijednosti, radimo sljedeće:

1) Zamijenite $x = 0$i $y = 1$(tj. početni uvjet za *y*) u opće rješenje:

$$1 = 0^3 + C_1 0 + C_2$$

2) Pronađite *y'(x)* derivaciju općeg rješenja y (x) i zamijenite $x = 0$i $y' = 2$u dobiveni izraz:

$$y' = 3x^2 + C_1$$

$$2 = 3 \cdot 0^2 + C_1$$

Kao rezultat, nalazimo konstante koje odgovaraju početnim uvjetima:

$$C_1 = 2 \quad \text{and} \;\; C_2 = 1$$

Rješenje problema početne vrijednosti nalazi se zamjenom dobivenih C_1i C_2vrijednosti u opće rješenje, a posebno rješenje koje zadovoljava zadani početni uvjet je:

$$y = x^3 + 2x + 1$$

U sljedećem poglavlju razmatrat ćemo linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Definicija: Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

Diferencijalna jednadžba drugog reda naziva se ***linearna diferencijalna jednadžba,*** ako se može napisati u obliku

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x)$$

gdje $a_1(x)$, $a_2(x)$ i $a_3(x)$ su kontinuirane funkcije i $a_1(x) \neq 0$.

Definicija: Homogeni i nehomogeni linearne diferencijalne jednadžbe

1) Ako funkcija $f(x)$ na lijevoj strani linearne jednadžbe nije jednaka nuli ($f(x) \neq 0$), tada se diferencijalna jednadžba naziva ***nehomogena linearna jednadžba*** :

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x)$$

2) Ako je funkcija $f(x)$ na lijevoj strani linearne jednadžbe jednaka nuli ($f(x) = 0$) , tada se diferencijalna jednadžba naziva ***homogena linearna jednadžba:***

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0$$

Definicija: Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Linearna diferencijalna jednadžba drugog reda naziva *se **linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima*** ako su koeficijenti prije y'', y' i y konstante

$$a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$$

gdje a_1, a_2 i a_3 su konstante i $a_1 \neq 0$.

9.3.2. Linearne Homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Linearnu homogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima :

$$a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$$

gdje a_1, a_2 i a_3 neki su konstantni koeficijenti i $a_1 \neq 0$.

Metoda rješenja:

Za svaku od linearnih homogenih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima može se napisati takozvana *karakteristična (* također nazvana *pomoćna)* jednadžba:

$$a_1k^2 + a_2k + a_3 = 0$$

Opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe ovisi o korijenima karakteristične kvadratne jednadžbe. Postoje tri slučaja, i to:

1. Diskriminanta karakteristične kvadratne jednadžbe $\underline{D > 0}$.

   U ovom slučaju, korijeni karakterističnih jednadžbi ***su realni i različiti*** $k_1 \neq k_2$, i opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe u ovom slučaju ima oblik:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

gdje su C_1 i C_2proizvoljni realni brojevi.a

2. Diskriminanta karakteristične jednadžbe $\underline{D = 0}$.

   U ovom slučaju, korijeni **su realni i** jednaki $k_1 = k_2 = k$(*ponovljeno*), a opće rješenje diferencijalne jednadžbe ima oblik:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} \quad \text{or} \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$$

3. Diskriminanta karakteristične jednadžbe $\underline{D < 0}$.

   U ovom slučaju, korijeni **su kompleksni** i konjugirani, $k_1 = \alpha + i\beta \quad \text{and} \quad k_2 = \alpha - i\beta$ ($i = \sqrt{-1}$) i opće rješenje je zapisano kao

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x$$

Primjer 13

Razmotrimo sljedeću linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima:

$$y'' + 3y' - 10y = 0$$

Odgovarajuća karakteristična (pomoćna) jednadžba je

$$k^2 + 3k - 10 = 0$$

Dakle, diskriminanta ove jednadžbe $D = 49 > 0$;, korijeni su realni i različiti:

$$k_1 = 2 \quad \text{and} \quad k_2 = -5$$

Tada je opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}.$$

Primjer 14

Razmotrimo jednadžbu:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Njena karakteristična (pomoćna) jednadžba je

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $D = 0$, i korijeni su realni i ponavljaju se:

$$k_1 = k_2 = 2$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe jea

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Primjer 15

Razmotrimo jednadžbu:

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

Njegova karakteristična (pomoćna) jednadžba je:

$$k^2 + 2k + 10 = 0$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe i $D = -36 < 0$kompleksni i konjugirani korijeni :

$$k_1 = -1 + 3i \quad \text{and} \quad k_2 = -1 - 3i$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je

$$y = C_1 e^{-1 \cdot x} \cos 3x + C_2 e^{-1 \cdot x} \sin 3x$$

9.3.3. Linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Nehomogena **linearna** diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentom ima oblik

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

gdje a_1, a_2i $a_3$proizvoljne su konstante i $a_1 \neq 0$.

Za svaku nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu njena povezana homogena diferencijalna jednadžba može se napisati kao

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

Teorem.

Opće rješenje nehomogene jednadžbe je zbroj općeg rješenja $y_c(x)$povezane homogene jednadžbe i *određenog* rješenja$Y(x)$ nehomogene jednadžbe:

$$y = y_c(x) + Y(x)$$

Postoje dva opća pristupa za pronalaženje određenog rješenja $Y(x)$nehomogene diferencijalne jednadžbe. To su Metoda neodređenih koeficijenata i Metoda varijacije konstanti.

Metoda varijacije konstanti

Metoda varijacije Lagrangove konstante može se koristiti za bilo koju vrstu funkcije *f(x)* na desnoj strani nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe.

Koraci rješavanja:

1) Prvo riješite pridruženu homogenu jednadžbu

$$a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$$

i pronađite opće rješenje $y_c(x)$ove jednadžbe. Opće rješenje homogene jednadžbe sadrži dvije konstante C_1i C_2može se zapisati u obliku

$$y_c = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

gdje su C_1, C_2konstante i funkcije y_1, y_2 ovise o korijenima karakteristične jednadžbe.

2) Zamijenite konstante C_1i C_2s proizvoljnim (još uvijek nepoznatim) funkcijama $C_1(x)$i $C_2(x)$i pronađite opće ***rješenje zadane nehomogene jednadžbe*** u obliku

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$$

3) Uzimajući u obzir da $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$zadovoljava zadanu nehomogenu jednadžbu s desnom stranom f(x), može se pokazati da su nepoznate funkcije $C_1(x)$i$C_2(x)$ može se odrediti iz sustava dviju jednadžbi:

$$\begin{cases} C'_1(x) \cdot y_1 + C'_2(x) \cdot y_2 = 0 \\ C'_1(x) \cdot y'_1 + C'_2(x) \cdot y'_2 = \dfrac{f(x)}{a_1} \end{cases}$$

4) Pronađite $C_1{}'(x)$i $C_2{}'(x)$iz sustava.

5) Integracijom nađi $C_1(x) = \int C_1{}'(x)dx$ i$C_2(x) = \int C_2{}'(x)dx$

6) Zamijenite dobivene funkcije $C_1(x)$i$C_2(x)$ u obliku općeg rješenja.

Primjer 16

Riješite jednadžbu:

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$$

Rješavamo pridruženu homogenu jednadžbu

$$y'' + 9y = 0$$

Njena karakteristična (pomoćna) jednadžba je

$$k^2 + 9 = 0 \quad => \quad k^2 = -9$$

Korijeni su realni i konjugirani:

$$\mathrm{k}_1 = \sqrt{-9} = 3\mathrm{i} = 0 + 3\mathrm{i} \quad \text{and} \quad \mathrm{k}_2 = -\sqrt{-9} = -3\mathrm{i} = 0 - 3\mathrm{i}$$

Opće rješenje pridružene *homogene diferencijalne* jednadžbe je

$$\mathrm{y_c} = \mathrm{C_1 e^{0 \cdot x} cos3x + C_2 e^{0 \cdot x} sin3x}$$

ili

$$\mathrm{y_c} = \mathrm{C_1 cos3x + C_2 sin3x}$$

gdje C_1 and C_2 su proizvoljne konstante.

2) Zamjenjujemo konstante C_1i C_2s proizvoljnim (još uvijek nepoznatim) funkcijama $\mathrm{C}_1(\mathrm{x})$i $\mathrm{C}_2(\mathrm{x})$i nalazimo *opće rješenje* zadane *nehomogene* diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$\mathrm{y = C_1(x) cos3x + C_2(x) sin3x}$$

3) Za određivanje nepoznatih funkcija $\mathrm{C}_1(\mathrm{x})$i $\mathrm{C}_2(\mathrm{x})$, pišemo sustav jednadžbi za derivacije nepoznatih funkcija

$$\begin{cases} \mathrm{C'}_1(\mathrm{x}) \cdot \cos 3x + \mathrm{C'}_2(\mathrm{x}) \cdot \sin 3x = 0 \\ \mathrm{C'}_1(\mathrm{x}) \cdot (\cos 3x)' + \mathrm{C'}_2(\mathrm{x}) \cdot (\sin 3x)' = \dfrac{1}{\cos 3x} \end{cases}$$

Sustav se može napisati u obliku

$$\begin{cases} \mathrm{C'}_1(\mathrm{x}) \cdot \cos 3x + \mathrm{C'}_2(\mathrm{x}) \cdot \sin 3x = 0 \\ \mathrm{C'}_1(\mathrm{x}) \cdot (-3\sin 3x) + \mathrm{C'}_2(\mathrm{x}) \cdot 3\cos 3x = \dfrac{1}{\cos 3x} \end{cases}$$

4) Sustav ćemo riješiti korištenjem Cramerovog pravila, tako da trebamo pronaći determinantu matrice koeficijenata:

$$D = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3\cos^2 3x + 3\sin^2 3x = 3$$

i odrednice

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \dfrac{1}{\cos 3x} & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 0 - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = -\tan 3x$$

$$\mathrm{D}_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & \dfrac{1}{\cos 3x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 3x}{\cos 3x} - 0 = 1$$

Zatim

$$C'_1(x) = \frac{D_1}{D} = -\frac{\tan 3x}{3} \qquad \text{and} \qquad C'_2(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{3}$$

5) Nalazimo nepoznate funkcije $\mathrm{C}_1(\mathrm{x})$i $\mathrm{C}_2(\mathrm{x})$integracijom:

$$C_1(x) = \int C'_1(x)\,dx \text{ i } C_2(x) = \int C'_2(x)\,dx.$$

$$C_1(x) = \int \left(-\frac{\tan 3x}{3}\right) \mathrm{dx} = -\frac{1}{3}\int \frac{\sin 3x}{\cos 3\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}(\cos 3x)}{\cos 3\mathrm{x}} = \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = \int C'_2(x)\,dx = \int \frac{1}{3}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\int 1\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\mathrm{x} + \tilde{C}_2$$

Tako,

$$C_1(x) = \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + \tilde{\mathrm{C}}_1 \quad \text{and} \quad C_2(x) = \frac{1}{3}\mathrm{x} + \tilde{\mathrm{C}}_2$$

gdje $\tilde{\mathrm{C}}_1$ and $\tilde{\mathrm{C}}_2$ su konstante.

6) Dobivene funkcije zamijeniti $\mathrm{C}_1(\mathrm{x})$u $\mathrm{C}_2(\mathrm{x})$oblik općeg rješenja nehomogene diferencijalne jednadžbe:

$$\mathrm{y} = \left(\frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + \tilde{C}_1\right)\cos 3\mathrm{x} + \left(\frac{1}{3}\mathrm{x} + \tilde{C}_2\right)\sin 3\mathrm{x}$$

Kao rezultat, opće rješenje zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe je

$$\mathrm{y} = \tilde{\mathrm{C}}_1\cos 3\mathrm{x} + \tilde{\mathrm{C}}_2\sin 3\mathrm{x} + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| \cdot \cos 3x + \frac{1}{3}\mathrm{x} \cdot \sin 3\mathrm{x}$$

ili

$$\mathrm{y} = \mathrm{C}_1\cos 3\mathrm{x} + \mathrm{C}_2\sin 3\mathrm{x} + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| \cdot \cos 3x + \frac{1}{3}\mathrm{x} \cdot \sin 3\mathrm{x}$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Imajte na umu da je zbroj dva prva člana u dobivenom rješenju opće rješenje za pridruženu homogenu diferencijalnu jednadžbu, a zbroj posljednja dva člana je posebno rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe.

Metoda neodređenih koeficijenata

Razmotrimo nehomogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s desnim funkcijama koje imaju derivacije koje se malo razlikuju (po vrsti funkcije) od njihovih roditeljskih funkcija. Te funkcije su: polinomske $P_n(x)$funkcije, eksponencijalne funkcije $e^{\alpha x}$, trigonometrijske funkcije (sinus i kosinus ($\sin\beta x$, $\cos\beta x$)), kao i zbroj, razlika i množenje tih funkcija. U ovom slučaju možemo predvidjeti oblik rješenja ove diferencijalne jednadžbe uzimajući u obzir oblik njezine desne funkcije.

Glavna ideja metode neodređenih koeficijenata je konstruirati oblik određenog rješenja Y(x) zadane nehomogene jednadžbe koji odgovara obliku (na temelju oblika) funkcije f(x) na desnoj strani jednadžba. Y(x) se zapisuje kao funkcija s nedefiniranim koeficijentima, zatim se zamjenjuje u jednadžbu i koeficijenti se nalaze.

Kao što je već spomenuto, ova metoda radi samo za ograničenu klasu funkcija na desnoj strani jednadžbe, kao što je

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$$

$$f(x) = (P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)) \cdot e^{\alpha x}$$

gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$polinomi stupnjeva n i m, redom.

U oba slučaja izbor za određeno rješenje trebao bi odgovarati strukturi funkcije desne strane nehomogene jednadžbe. Ovisi o desnoj strani jednadžbe kao i o korijenima karakteristične jednadžbe.

Razmotrimo detaljno kako konstruirati oblik određenog rješenja Y(x) dane nehomogene jednadžbe.

Razmotrimo tri slučaja za funkciju na desnoj strani jednadžbe:

1) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}(\beta = 0)$

Konkretno rješenje je u istom obliku kao i f(x), samo što umjesto polinoma $P_n(x)$pišemo polinom s nedefiniranim koeficijentima. Nadalje, ako se *snaga* α eksponencijalne funkcije *podudara s korijenom* pomoćne (karakteristične) jednadžbe, određeno rješenje će sadržavati dodatni faktor x^s, gdje s je red korijena α u karakterističnoj jednadžbi.

To znači da je određeno rješenje zapisano u obrascu

$$Y = \widetilde{P_n}(x)e^{\alpha x} \cdot x^s$$

gdje

a) $\widetilde{P_n}(x)$je polinom reda *n* s nepoznatim koeficijentima, tj

ako je n=0, tada $\widetilde{P_0}(x) = A$;

ako je n=1, tada $\widetilde{P_1}(x) = Ax + B$;

ako je n=2, tada $\widetilde{P_2}(x) = Ax^2 + Bx + C$;

i tako dalje.

b) Da bismo pronašli snagu $s$dodatnog faktora x^s, uspoređujemo snagu α eksponencijalne funkcije s korijenima k_1i $k_2$pomoćne jednadžbe:

ako $\alpha \neq k_1$i $\alpha \neq k_2$tada $\underline{s = 0}$;

ako $\alpha = k_1$i $\alpha \neq k_2$ILI $\alpha \neq k_1$i $\alpha = k_2$onda $\underline{s = 1}$;

ako $\alpha = k_1 = k_2$onda $\underline{s = 2}$;

2) $f(x) = e^{\alpha x}(N\cos(\beta x) + M\sin(\beta x))$, gdje su *N, M* konstante

$$f(x) = e^{\alpha x}N\cos(\beta x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = e^{\alpha x}(N\cos(\beta x) + \mathbf{0}\cdot\sin(\beta x))$$

$$f(x) = e^{\alpha x}M\sin(\beta x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = e^{\alpha x}(\mathbf{0}\cdot\cos(\beta x) + M\cdot\sin(\beta x))$$

U tim slučajevima određeno rješenje *Y* nalazi se u obliku

$$Y = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))\cdot x^s$$

gdje su A i B nepoznati koeficijenti. Izraz za određeno rješenje treba pomnožiti s dodatnim faktorom x^s, ako se broj $\alpha + \beta i$podudara s korijenom karakteristične jednadžbe, tj.

uspoređujemo broj $\alpha + \beta i$s korijenima k_1i $k_2$pomoćne jednadžbe:

ako $\alpha + i\beta \neq k_1$i $\alpha + i\beta \neq k_2$tada $\underline{s = 0}$;

ako $\alpha + i\beta = k_1$ili $\alpha + i\beta = k_2$onda $\underline{s = 1}$.

3) $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)\cos(\beta x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + \mathbf{0}\cdot\sin(\beta x))$$

$$f(x) = e^{\alpha x}Q_n(x)\sin(\beta x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = e^{\alpha x}(\mathbf{0}\cdot\cos(\beta x) + Q_n(x)\cdot\sin(\beta x))$$

gdje su $P_n(x)$i $Q_m(x)$polinomi reda n odnosno m .

U tim slučajevima određeno rješenje nalazi se u obliku

$$Y = e^{\alpha x}\left(\widetilde{P_k}(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q_k}(x)\sin(\beta x)\right)\cdot x^s$$

gdje su $\widetilde{P_k}(x)$i $\widetilde{Q_k}(x)$polinomi reda k s nepoznatim koeficijentima i $k = \max{(n, m)}$.

Izraz za određeno rješenje *Y* treba pomnožiti s dodatnim faktorom x, ako se broj $\alpha + \beta i$poklapa s korijenom karakteristične jednadžbe, tj.

uspoređujemo broj $\alpha + \beta i$s korijenima k_1i $k_2$pomoćne jednadžbe:

ako $\alpha + i\beta \neq k_1$ i $\alpha + i\beta \neq k_2$ tada $\underline{s = 0}$;

ako $\alpha + i\beta = k_1$ ili $\alpha + i\beta = k_2$ onda $\underline{s = 1}$.

Nepoznati koeficijenti određuju se zamjenom očekivanog tipa određenog rješenja u izvornu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu.

Shema rješavanja:

1) Riješite odgovarajuću homogenu diferencijalnu jednadžbu $\mathrm{a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0}$;

2) Po obliku funkcije f(x) na desnoj strani jednadžbe zapišite oblik određenog rješenja Y s nedefiniranim koeficijentima;

3) Pronađite Y' i Y'';

4) Odrediti nedefinirane koeficijente A, B, C zamjenom određenog rješenja Y i njegovih derivata u zadanu izvornu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu.

5) Dobivene koeficijente zamijeniti u obliku određenog rješenja Y.

6) Zapišite opće rješenje zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe kao

$$\mathrm{y = y_c(x)} + Y\mathrm{(x)}$$

gdje $\mathrm{y_c(x)}$ je opće rješenje povezane homogene jednadžbe, a $Y\mathrm{(x)}$ posebno rješenje zadane nehomogene jednadžbe.

Primjer 17

Riješimo jednadžbu:

$$y'' - 2y' = x^2 + 5x - 1$$

1) Prvo rješavamo pridruženu homogenu jednadžbu:

$$y'' - 2y' = 0$$

Pomoćna jednadžba za ovu jednadžbu je:

$$k^2 - 2k = 0 \quad => \quad k \cdot (k - 2) = 0$$

Korijeni pomoćne jednadžbe su realni i različiti:

$$\mathrm{k_1 = 0 \quad and \quad k_2 = 2}$$

Stoga je opće rješenje pridružene *homogene diferencijalne* jednadžbe

$$\mathrm{y_c = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{2 \cdot x}}$$

ili

$$y_c = C_1 + C_2 e^{2x}$$

gdje C_1 and C_2 su konstante.

2) Zapisujemo oblik za određeno rješenje Y, uzimajući u obzir oblik funkcije $\underline{f(x) = x^2 + 5x - 1}$na desnoj strani jednadžbe.

Funkcija $f(x)$se može napisati u obliku: $\mathrm{f(x)} = (\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 1) \cdot \mathrm{e}^{0 \cdot \mathrm{x}}$.

U ovom slučaju posebno rješenje Y ima oblik: $Y = \widetilde{P_n}(x) e^{\alpha x} \cdot x^s$.

a) Funkcija $f(x)$ima polinom stupnja 2 prije eksponencijalne funkcije (n=2), stoga polinom $\widetilde{P_n}(x)$također mora biti polinom stupnja 2, ali s nedefiniranim koeficijentima: $\widetilde{P_2}(x) = Ax^2 + Bx + C$

b) Snaga eksponencijalne funkcije je *α=0* . Poklapa se s jednim korijenom pomoćne (karakteristične) jednadžbe: $\alpha = k_1 = 0$, dakle $s = 1$i određeno rješenje će sadržavati dodatni faktor x^1.

Dakle, posebno rješenje diferencijalne jednadžbe Y ima oblik:

$$Y = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{0 \cdot x} \cdot x^1 = (Ax^2 + Bx + C) \cdot \mathrm{x}$$

ili

$$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

3) Nalazimo derivacije prvog i drugog reda za Y:

$$Y' = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$Y'' = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$$

4) Zamjenjujemo ih u danu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' - 2y' = x^2 + 5x - 1.$$

Kao rezultat, imamo:

$$6Ax + 2B - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 5x - 1$$

Pojednostavljujemo izraz s lijeve strane:

$$-6Ax^2 + \ 6Ax - 4Bx + 2B - 2C = x^2 + 5x - 1$$

Grupiramo koeficijente s istim potencijama x na lijevoj strani jednadžbe:

$$-6Ax^2 + (6A - 4B)x + 2B - 2C = 1 \cdot x^2 + 5x + (-1)$$

Desna i lijeva strana jednadžbe jednake su za svaki $x \in R$.To bi bilo moguće samo ako su koeficijenti pri istim potencijama x na desnoj i lijevoj strani jednadžbe jednaki:

Koeficijenti na x^2: $-6A = 1$;

Koeficijenti na x: $6A - 4B = 5$;

Koeficijenti na x^0: $2B - 2C = -1$.

Riješite dobiveni sustav jednadžbi: $\begin{cases} -6A = 1 \\ 6A - 4B = 5 \\ 2B - 2C = -1 \end{cases}$

Iz prve jednadžbe sustava imamo: $A = -\frac{1}{6}$.

Iz druge jednadžbe:$6A - 4B = 5$ ➔ $6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - 4B = 5$ ➔ $-4B = 6$

$$B = -\frac{3}{2}$$

Iz treće jednadžbe: $2B - 2C = -1$ ➔ $2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2C = -1$ ➔ $-2C = 2$

$$C = -1$$

Dobivene koeficijente zamijenimo u obliku određenog rješenja Y:

$$Y = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x$$

Kao rezultat, opće rješenje zadane nehomogene jednadžbe je:

$$\mathrm{y} = \mathrm{y_c} + \mathrm{Y} = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

Primjer 18

Riješite jednadžbu:

$$y'' + y' - 2y = xe^{2x}$$

1) Pridružena homogena jednadžba je

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Njena pomoćna jednadžba je

$$k^2 + k - 2 = 0$$

Korijeni ove jednadžbe su realni i različiti:

$$\mathrm{k}_1 = 1 \quad \text{and} \quad \mathrm{k}_2 = -2$$

Stoga je opće rješenje pridružene *homogene diferencijalne* jednadžbe

$$\mathrm{y_c} = \mathrm{C_1 e^{1 \cdot x}} + \mathrm{C_2 e^{-2 \cdot x}}$$

gdje C_1 and C_2 su konstante.

2) Konstruiramo oblik određenog rješenja *Y* uzimajući u obzir oblik funkcije na desnoj strani jednadžbe $\underline{(x) = xe^{2x}}$.

Za takvu funkciju (x), posebno rješenje *Y* ima oblik: $Y = \widetilde{P_n}(x)e^{\alpha x} \cdot x^s$.

a) Funkcija $f(x)$ima polinom stupnja 1 ispred eksponencijalne funkcije (n=1), stoga polinom s nedefiniranim koeficijentima $\widetilde{P_n}(x)$također mora biti polinom stupnja 1: $\widetilde{P_1}(x) = Ax + B$.

b) Snaga eksponencijalne funkcije je $\alpha = 2$. Ne podudara se ni s jednim korijenom pomoćne (karakteristične) jednadžbe: $\alpha \neq k_1$i $\alpha \neq k_2$, Dakle, $s = 0$i određeno rješenje ne sadrži dodatni faktor.

Dakle, određeno rješenje Y diferencijalne jednadžbe Y ima oblik

$$Y = (Ax + B) \cdot e^{2 \cdot x} \cdot x^0 = (Ax + B) \cdot e^{2 \cdot x}$$

3) Nalazimo derivacije prvog i drugog reda za Y:

$$Y' = \left((Ax + B)e^{2 \cdot x}\right)' = (Ax + B)' \cdot e^{2x} + (Ax + B) \cdot (e^{2 \cdot x})' = Ae^{2x} + (Ax + B) \cdot 2e^{2 \cdot x}$$

Može se napisati i kao $Y' = (2Ax + 2B + A)e^{2x}$.

$$Y" = \left((2Ax + 2B + A)e^{2x}\right)' = (2Ax + 2B + A)' \cdot e^{2x} + \ (2Ax + 2B + A) \cdot (e^{2x})' =$$

$$= 2\mathrm{A}e^{2x} + \ (2Ax + 2B + A) \cdot 2e^{2x} = \ (4Ax + 4B + 4A) \cdot e^{2x}$$

Dakle, $Y" = (4Ax + 4B + 4A) \cdot e^{2x}$.

4) Zamijenite dobivene Y”, Y' i Y u zadanu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + y' - 2y = xe^{2x}.$$

Kao rezultat, imamo:

$$(4Ax + 4B + 4A) \cdot e^{2x} + (2Ax + 2B + A)e^{2x} - 2(Ax + B) \cdot e^{2 \cdot x} = xe^{2x}$$

Pojednostavljujemo izraz:

$$(4Ax + 4B + 4A + 2Ax + 2B + A - 2Ax - 2B) \cdot e^{2x} = xe^{2x}$$

$$4Ax + 4B + 5A = x$$

ili $4Ax + 4B + 5A = 1x + 0$.

Desna i lijeva strana jednadžbe su jednake za svaki $x \in R$.. To bi bilo moguće samo ako su koeficijenti pri istim potencijama x na desnoj i lijevoj strani jednadžbe jednaki.

Koeficijenti na x: $4A = 1$;

Koeficijenti na x^0: $4B + 5A = 0$.

To nas dovodi do rješavanja sustava: $\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B + 5A = 0 \end{cases}$.

Iz prve jednadžbe sustava slijedi: $A = \frac{1}{4}$.

Iz druge jednadžbe slijedi: $4B + 5 \cdot \frac{1}{4} = 0$ ➔ $4B = -\frac{5}{4}$ ➔ $B = -\frac{5}{16}$.

Dobivene koeficijente zamjenjujemo u oblik određenog rješenja Y:

$$Y = (Ax + B) \cdot e^{2x} = \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{16}\right) \cdot e^{2x}$$

Kao rezultat, opće rješenje zadane nehomogene jednadžbe je

$$\mathrm{y} = \mathrm{y_c} + \mathrm{Y} = \mathrm{C_1 e^x} + \mathrm{C_2 e^{-2x}} + \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{16}\right) \cdot e^{2x}$$

Primjer 19

Riješite jednadžbu

$$y'' + y = 3\cos x + 2\sin x.$$

1) Pridružena homogena jednadžba je

$$y'' + y = 0$$

Njena pomoćna jednadžba je

$$k^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 = -1$$

Korijeni pomoćne jednadžbe su kompleksni i konjugirani:

$$\mathrm{k}_1 = i = 0 + 1 \cdot i \quad \text{and} \quad \mathrm{k}_2 = -\mathrm{i} = 0 - 1 \cdot i$$

Stoga je opće rješenje pridružene *homogene diferencijalne* jednadžbe

$$\mathrm{y_c} = \mathrm{C_1 e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x) + C_2 e^{0 \cdot x} \sin(1 \cdot x)}$$

$$\mathrm{y_c} = \mathrm{C_1 cos}x + \mathrm{C_2 sin}x$$

2) Funkcija na desnoj strani jednadžbe je $\underline{f(x) = 3cosx + 2sinx}$.

Funkcija $f(x)$se može napisati kao $f(x) = e^{0x}(3cosx + 2sinx)$.

Za takvu funkciju $f(x)$, određeno rješenje Y ima oblik:

$$Y = e^{\alpha x}\big(\mathrm{Acos}(\beta x) + \mathrm{Bsin}(\beta x)\big) \cdot x^s.$$

Snaga eksponencijalne funkcije u funkciji $f(x)$je ***α =0*** , a koeficijent prije *x* u argumentu kosinusa i sinusa je $\boldsymbol{\beta = 1}$.

Broj $\boldsymbol{\alpha + i\beta = 0 + 1i = i}$ podudara se s jednim korijenom pomoćne (karakteristične) jednadžbe: $\alpha + i\beta = k_1$, dakle, $s = 1$a posebno rješenje sadrži dodatni faktor x^1.

Dakle, posebno rješenje Y diferencijalne jednadžbe Y ima oblik:

$$Y = e^{0 \cdot x}(\mathrm{Acos}x + \mathrm{Bsin}x) \cdot x^1 = (\mathrm{Acos}x + \mathrm{Bsin}x) \cdot \mathrm{x}$$

3) Nalazimo izvode prvog i drugog reda za Y:

$$Y' = \big((\mathrm{Acos}x + \mathrm{Bsin}x) \cdot \mathrm{x}\big)' = (\mathrm{Acos}x + \mathrm{Bsin}x)' \cdot \mathrm{x} + (\mathrm{Acos}x + \mathrm{Bsin}x) \cdot (\mathrm{x})' =$$

$$= (-Asinx + Bcosx) \cdot \mathrm{x} + (\mathrm{Acos}x + \mathrm{Bsin}x)$$

$$Y'' = \big((-Asinx + Bcosx) \cdot \mathrm{x} + (\mathrm{Acos}x + \mathrm{Bsin}x)\big)' =$$

$$= (-Asinx + Bcosx)' \cdot \mathrm{x} + (-Asinx + Bcosx) \cdot \mathrm{x}' + (\mathrm{Acos}x + \mathrm{Bsin}x)' =$$

$$= (-Acosx - Bsinx) \cdot \mathrm{x} + (-Asinx + Bcosx) - Asinx + Bcosx =$$

$$= (-Acosx - Bsinx) \cdot \mathrm{x} - 2Asinx + 2Bcosx$$

4) Zamjenjujemo Y” i Y u danu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu:

Kao rezultat, imamo:

$$(-Acosx - Bsinx) \cdot x - 2Asinx + 2Bcosx + (Acosx + Bsinx) \cdot x = 3cosx + 2sinx$$

Dobiveni izraz pojednostavljujemo:

$$-2Asinx + 2Bcosx = 3cosx + 2sinx$$

Desna i lijeva strana jednadžbe jednake su za svaki $x \in R$.To bi bilo moguće samo ako su koeficijenti na $sinx$i $cosx$na desnoj i lijevoj strani jednadžbe jednaki:

Koeficijenti pri$cosx$: $2B = 3 \quad \Longrightarrow B = \frac{3}{2}$

Koeficijenti pri$sinx$: $-2A = 2 \quad \Longrightarrow A = -1$

Dobivene koeficijente zamjenjujemo u oblik određenog rješenja Y:

$$Y = \left(-1 \cdot cosx + \frac{3}{2} \cdot sinx\right) \cdot x$$

Kao rezultat, opće rješenje zadane nehomogene jednadžbe je:

$$y = y_c + Y = C_1 cosx + C_2 sinx + \left(-cosx + \frac{3}{2} sinx\right) \cdot x$$

Načelo superpozicije

Ako je desna strana nehomogene jednadžbe zbroj nekoliko funkcija kao npr

$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$i $f(x) = (P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)) \cdot e^{\alpha x}$,

onda je određeno rješenje diferencijalne jednadžbe također zbroj pojedinih rješenja konstruiranih zasebno za svaku takvu funkciju na desnom izrazu.

Primjer 20

Pronađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'' - 2y' + y = e^x + 5cos3x.$$

1) Povezana homogena jednadžba:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Pomoćna jednadžba za ovu jednadžbu je$k^2 - 2k + 1 = 0$

Korijeni ove jednadžbe su stvarni i ponavljaju se:$k_1 = k_2 = 1$

Stoga je opće rješenje pridružene *homogene diferencijalne* jednadžbe

$$y_c = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

2) Vidimo da je desna strana zadane jednadžbe zbroj dviju funkcija $f_1(x) = e^x$i $f_2(x) = 5\cos 3x$. Prema principu superpozicije, određeno rješenje je zbroj pojedinih rješenja tako da se može izraziti

$$Y = Y_1 + Y_2$$

gdje Y_1je određeno rješenje diferencijalne jednadžbe$y'' - 2y' + y = e^x$

i Y_2posebno je rješenje za jednadžbu $y'' - 2y' + y = 5\cos 3x$.

a) Prvo odredimo funkciju Y_1. U ovom slučaju $f_1(x) = e^x$i tražit ćemo rješenje u obliku

$$Y_1 = \mathrm{A}e^{\alpha x} \cdot x^s$$

Snaga eksponencijalne funkcije je ***α =1*** i poklapa se **s dva korijena** pomoćne (karakteristične) jednadžbe: $\alpha = k_1 = k_2$, dakle, $s = 2$a posebno rješenje Y_1 sadrži dodatni faktor x^2.

Dakle, posebno rješenje Y_1 prve diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$Y_1 = \mathrm{A}e^x \cdot x^2 = Ax^2e^x$$

3) Nalazimo derivate prvog i drugog reda za Y_1:

$$Y_1{}' = (\mathrm{A}x^2e^x)' = (\mathrm{A}x^2)' \cdot e^x + (\mathrm{A}x^2) \cdot (e^x)' = 2Ax \cdot e^x + (\mathrm{A}x^2) \cdot e^x = (2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x$$

$$Y_1{}'' = \left((2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x\right)' = (2Ax + \mathrm{A}x^2)' \cdot e^x + (2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot (e^x)' =$$

$$= (2A + 2\mathrm{A}x) \cdot e^x + (2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x = (2A + 4\mathrm{A}x + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x$$

Zamijenite $\mathrm{Y}_1{}'$, $\mathrm{Y}_1{}''$ i Y_1u odgovarajuću nehomogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' - 2y' + y = e^x,$$

imamo

$$(2A + 4\mathrm{A}x + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x - 2(2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x + Ax^2e^x = e^x$$

Dobiveni izraz pojednostavljujemo:

$$(2A + 4\mathrm{A}x + \mathrm{A}x^2 - 4Ax - 2\mathrm{A}x^2 + Ax^2)e^x = e^x$$

i dobiti:$2A = 1$ ➔ $A = 1/2$.

Zatim

$$Y_1 = \frac{1}{2}x^2e^x$$

b) Određujemo funkciju Y_2.

Zbog oblika funkcije $f_2(x) = 5\cos3x = e^{0x}(5\cdot\cos3x + 0\cdot\sin3x)$tražimo rješenje u obliku

$$Y_2 = e^{ox}(C\cdot\cos3x + D\cdot\sin3x)\cdot x^s$$

Snaga eksponencijalne funkcije je ***α =0*** , a koeficijent prije x u argumentu kosinusa i sinusa je $\boldsymbol{\beta = 3}$. Broj$\boldsymbol{\alpha + i\beta = 0 + 3i = 3i}$ ne podudaraju se s bilo kojim korijenom pomoćne jednadžbe, dakle, $s = 0$i određeno rješenje ne sadrži dodatni faktor.

Dakle, posebno rješenje Y_2 diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$Y_2 = C\cdot\cos3x + D\cdot\sin3x$$

Nalazimo derivacije prvog i drugog reda za Y_2:

$Y_2{}' = (\mathrm{C}\cos3x + \mathrm{D}\sin3x)' = -3\mathrm{C}\sin3x + 3\mathrm{D}\cos3x$

$Y_2" = (-3\mathrm{C}\sin3x + 3\mathrm{D}\cos3x)' = -9\mathrm{C}\cos3x - 9\mathrm{D}\sin3x$.

Nakon zamjene $Y_2{}'$, $Y_2{}''$ i Y_2u odgovarajuću nehomogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' - 2y' + y = 5\cos3x,$$

Imamo:

$$-9\mathrm{C}\cos3x - 9\mathrm{D}\sin3x - 2(-3\mathrm{C}\sin3x + 3\mathrm{D}\cos3x) + C\cos3x + D\sin3x = 5\cos3x$$

$$(-8\mathrm{C} - 6\mathrm{D})\cos3x + (-8D + 6\mathrm{C})\sin3x = 5\cos3x$$

Koeficijenti pri$cos3x$: $\quad -8\mathrm{C} - 6\mathrm{D} = 5$

Koeficijenti pri$sin3x$: $\quad -8D + 6\mathrm{C} = 0 \quad \Rightarrow C = \frac{4D}{3}$

Iz prve jednadžbe slijedi:$-8\cdot\left(\frac{4D}{3}\right) - 6\mathrm{D} = 5 \;\Rightarrow\; \frac{-50D}{3} = 5 \;\Rightarrow D = -\frac{3}{10}$

i $C = \frac{4D}{3} = -\frac{4\cdot3}{3\cdot10} = -\frac{2}{5}$

Kao rezultat,

$$Y_2 = -\frac{2}{5}\cdot\cos3x - \frac{3}{10}\cdot\sin3x$$

Kao rezultat, opće rješenje zadane nehomogene jednadžbe je:

$$\mathrm{y} = \mathrm{y_c} + \mathrm{Y} = \mathrm{y_c} + \mathrm{Y_1} + \mathrm{Y_2}$$

Tada je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{2}{5}\cos3x - \frac{3}{10}\cdot\sin3x$$

Vježbe

Vježba 9.7.

Pronađite opće i posebno rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'' - 4y' + 13y = 0\,, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 1$$

Riješenje:

Pomoćna jednadžba za zadanu diferencijalnu jednadžbu je

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

Diskriminant kvadratne jednadžbe je $D = -36 < 0$, dakle, korijeni su kompleksni i konjugirani:

$$k_1 = \frac{4 + \sqrt{-36}}{2} = 2 + 3\cdot i \quad \text{and} \quad k_2 = \frac{4 - \sqrt{-36}}{2} = 2 - 3\cdot i$$

To znači da je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe

$$y = C_1e^{2\cdot x}\cos(3x) + C_2e^{2\cdot x}\sin(3x)$$

Da bi se pronašlo određeno rješenje koje zadovoljava zadane početne uvjete,

1) Zamjenjujemo $x = 0$i $y = 6$(tj. početni uvjet) u opće rješenje:

$$6 = C_1e^{2\cdot 0}\cos(0) + C_2e^{2\cdot 0}\sin(0)$$

$$6 = C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0$$

$$C_1 = 6$$

2) Nalazimo y'(x) izvod općeg rješenja y (x).

$$y' = \left(e^{2\cdot x}\cdot(C_1\cos3x + C_2\sin3x)\right)' = (e^{2\cdot x})'(C_1\cos3x + C_2\sin3x) + \;\; e^{2\cdot x}(C_1\cos3x + C_2\sin3x)' =$$

$$= 2e^{2\cdot x}(C_1\cos3x + C_2\sin3x) + \;\; e^{2\cdot x}(-3C_1\sin3x + 3C_2\cos3x) \;\; =$$

$$= e^{2\cdot x}(2C_1\cos3x + 2C_2\sin3x - 3C_1\sin3x + 3C_2\cos3x)$$

Dakle, derivacija općeg rješenja je

$$y' = e^{2\cdot x}(2C_1\cos3x + 2C_2\sin3x - 3C_1\sin3x + 3C_2\cos3x)$$

Zamjenjujemo $x = 0$i $y' = 1$iz početnih uvjeta u dobiveni izraz:

$$1 = e^{2\cdot 0}(2C_1\cos0 + 2C_2\sin0 - 3C_1\sin0 + 3C_2\cos0) = 2C_1 + 0 - \; 0 + 3C_2$$

$$1 = 2C_1 + 3C_2$$

zamjenjujemo $C_1 = 6$u dobiveni izraz

$$1 = 12 + 3C_2$$

$$C_2 = -\frac{11}{3}$$

Dobivene konstante zamjenjujemo u opće rješenje. Kao rezultat toga, posebno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe je

$$y = 6e^{2x}\cos(3x) - \frac{11}{3}e^{2x}\sin(3x)$$

Vježba 9.8.

Riješite jednadžbu:

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$$

Riješenje:

Koristimo se metodom varijacije konstanti

1) Rješavamo pripadajuću homogenu jednadžbu:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Njena karakteristična (pomoćna) jednadžba je

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

$$(k+1)^2 = 0$$

Korijeni ove jednadžbe su realni i ponavljaju se

$$k_1 = k_2 = -1$$

Opće rješenje pridružene homogene diferencijalne jednadžbe je

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

gdje C_1 and C_2 su konstante.

2) Zamjenjujemo konstante C_1 i C_2 s proizvoljnim funkcijama $C_1(x)$ i $C_2(x)$ i nalazimo opće rješenje zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe u obliku

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

3) Za određivanje nepoznatih funkcija $C_1(x)$ i $C_2(x)$, pišemo sustav jednadžbi za derivacije nepoznatih funkcija

$$\begin{cases} C'_1(x)\cdot e^{-x} + C'_2(x)\cdot xe^{-x} = 0 \\ C'_1(x)\cdot (e^{-x})' + C'_2(x)\cdot (xe^{-x})' = 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Nakon pronalaženja izvedenica, imamo

$$\begin{cases} C'_1(x)\cdot e^{-x} + C'_2(x)\cdot xe^{-x} = 0 \\ C'_1(x)\cdot(-e^{-x}) + C'_2(x)\cdot\left(1\cdot e^{-x} + x(-e^{-x})\right) = 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Sustav se može napisati u obliku

$$\begin{cases} (C'_1(x) + C'_2(x)\cdot x)e^{-x} = 0 \\ \left(-C'_1(x) + C'_2(x)\cdot(1-x)\right)\cdot e^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Pojednostavimo sustav na formu

$$\begin{cases} C'_1(x) + C'_2(x)\cdot x = 0 \\ -C'_1(x) + C'_2(x)\cdot(1-x) = 3\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe sustava slijedi:

$$C'_1(x) = -C'_2(x)\cdot x$$

Zamjenom dobivenog $C'_1(x)$u drugu jednadžbu sustava dobiva se:

$$C'_2(x)\cdot x + C'_2(x)\cdot(1-x) = 3\sqrt{x+1}$$

Kao rezultat, dobivamo $C'_2(x)$:

$$C'_2(x) = 3\sqrt{x+1}$$

Uzimajući u obzir izraz za $C'_1(x)$, Imamo

$$C'_1(x) = -C'_2(x)\cdot x = -3x\sqrt{x+1}$$

4) Pronalazimo nepoznate funkcije $C_1(x)$i $C_2(x)$pomoću integracije

$$C_1(x) = \int C'_1(x)\,dx = \int -3x\sqrt{x+1}\,dx$$

Da bismo pronašli ovaj integral, koristimo zamjenu $x + 1 = t^2$.

Zatim $x = t^2 - 1$i$dx = (t^2-1)'dt = 2tdt$

$$\int -3x\sqrt{x+1}\,dx = -3\int (t^2-1)t\cdot 2tdt = -6\int (t^4 - t^2)dt = -6\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C_1$$
$$= -\frac{6}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + 2\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_1$$

Kao rezultat,

$$C_1(x) = -\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_1$$

$$C_2(x) = \int C'_2(x)\,dx = \int 3\sqrt{x+1}\;\,dx = \;3\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\;\,d(x+1) = 2(x+1)^{\frac{3}{2}}\; + C_2$$

Kao rezultat,

$$\mathrm{C}_1(\mathrm{x}) = -\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_1 \quad \text{and} \quad \mathrm{C}_2(\mathrm{x}) = 2(\mathrm{x}+1)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}_2$$

gdje C_1 and C_2 su konstante.

6) Dobivene funkcije $\mathrm{C}_1(\mathrm{x})$ubacujemo $\mathrm{C}_2(\mathrm{x})$u oblik općeg rješenja:

$$\mathrm{y} = \left(-\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_1\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} + \left(2(\mathrm{x}+1)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}_2\right)\mathrm{xe}^{-\mathrm{x}}$$

Pojednostavimo dobiveni izraz:

$$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\left(C_1 + \mathrm{xC}_2 - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + 2\mathrm{x}(\mathrm{x}+1)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\left(C_1 + \mathrm{xC}_2 - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}}(1+x)\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\left(C_1 + \mathrm{xC}_2 - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{5}{2}}\right)$$

Kao rezultat, opće rješenje zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe je:

$$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\left(C_1 + \mathrm{xC}_2 + \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right)$$

Vježba 9.9.

Riješite jednadžbu

$$y'' - 2y' = \frac{4\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}$$

Riješenje:

Za ovu jednadžbu koristimo metodu varijacije konstanti, budući da funkcija na desnoj strani nema poseban oblik.

1) Pridružena homogena jednadžba je

$$y'' - 2y' = 0$$

Karakteristična (pomoćna) jednadžba je

$$k^2 - 2\mathrm{k} = 0$$

$$\mathrm{k}(\mathrm{k}-2) = 0$$

Korijeni karakteristične (pomoćne) jednadžbe su realni i različiti:

$$\mathrm{k}_1 = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{k}_2 = 2$$

Opće rješenje pridružene homogene diferencijalne jednadžbe je

$$\mathrm{y_c} = \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{x}} + \mathrm{C}_2\mathrm{e}^{2\cdot\mathrm{x}}$$

ili

$$\mathrm{y_c} = \mathrm{C}_1 \cdot 1 + \mathrm{C}_2 \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$$

gdje C_1 and C_2 su konstante.

2) Zamjenjujemo konstante C_1 i C_2 s proizvoljnim (ali još uvijek nepoznatim) funkcijama $C_1(x)$ i $C_2(x)$ i nalazimo opće rješenje zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$y = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cdot e^{2x}$$

3) Za određivanje nepoznatih funkcija $C_1(x)$ i $C_2(x)$, pišemo sustav jednadžbi za derivacije nepoznatih funkcija

$$\begin{cases} C'_1(x) \cdot 1 + C'_2(x) \cdot e^{2x} = 0 \\ C'_1(x) \cdot (1)' + C'_2(x) \cdot (e^{2x})' = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{2x}} \end{cases}$$

Sustav se može napisati u obliku

$$\begin{cases} C'_1(x) \cdot 1 + C'_2(x) \cdot e^{2x} = 0 \\ C'_1(x) \cdot 0 + C'_2(x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{2x}} \end{cases}$$

ili

$$\begin{cases} C'_1(x) \cdot 1 + C'_2(x) \cdot e^{2x} = 0 \\ C'_2(x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{2x}} \end{cases}$$

4) Iz druge jednadžbe sustava imamo:

$$C'_2(x) = \frac{2}{1 + e^{2x}}$$

Iz prve jednadžbe sustava slijedi da

$$C'_1(x) = -C'_2(x) \cdot e^{2x} = -\frac{2 \cdot e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

5) Pronalazimo nepoznate funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ pomoću integracije

$$C_1(x) = \int C'_1(x)\,dx \text{ i } C_2(x) = \int C'_2(x)\,dx.$$

$$C_1(x) = \int C'_1(x)\,\mathrm{dx} = -\int \frac{2 \cdot e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx = -\int \frac{d(e^{2x})}{1 + e^{2x}} = -\int \frac{d(1 + e^{2x})}{1 + e^{2x}} = -\ln|1 + e^{2x}| + C_1$$

$$C_2(x) = \int C'_2(x)\,dx = \int \frac{2}{1 + e^{2x}}\,\mathrm{dx} = 2\int \frac{1 + e^{2x} - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,\mathrm{dx} = 2\int \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,\mathrm{dx} - 2\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,\mathrm{dx} =$$

$$= 2\int 1\,\mathrm{dx} - \int \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,\mathrm{dx} = 2x - \ln|1 + e^{2x}| + C_2$$

Kao rezultat,

$$C_1(x) = -\ln|1 + e^{2x}| + C_1 \quad \text{and} \quad C_2(x) = 2x - \ln|1 + e^{2x}| + C_2$$

gdje C_1 and C_2 su konstante.

6) Dobivene funkcije $C_1(x)$ ubaciti $C_2(x)$ u oblik općeg rješenja:

$$y = (-\ln|1 + e^{2x}| + C_1) \cdot 1 + (2x - \ln|1 + e^{2x}| + C_2)e^{2x}$$

Kao rezultat, opće rješenje zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe je:

$$y = C_1 + C_2 e^{\,2x} - \ln|1 + e^{2x}| + (2x - \ln|1 + e^{2x}|)e^{\,2x}$$

Može se napisati i u obliku

$$y = C_1 + C_2 e^{\,2x} + 2xe^{\,2x} - \ln|1 + e^{2x}| \cdot (1 + e^{\,2x})$$

Vježba 9.10.

Pronađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'' - 9y = x + 2e^{-3x}$$

Riješenje:

1) Pridružena homogena jednadžba je

$$y'' - 9y = 0$$

Pomoćna jednadžba za ovu jednadžbu je$k^2 - 9 = 0$

Korijeni su stvarni i različiti: $k_1 = 3$,$k_2 = -3$

Stoga je opće rješenje pridružene homogene diferencijalne jednadžbe

$$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

2) Desna strana dane jednadžbe je zbroj dviju funkcija:

$f_1(x) = x$i $f_2(x) = 2e^{-3x}$.

Prema principu superpozicije, određeno rješenje se izražava formulom

$$Y = Y_1 + Y_2$$

gdje Y_1je određeno rješenje diferencijalne jednadžbe$y'' - 9y = x$

i Y_2posebno je rješenje za jednadžbu $y'' - 9y = 2e^{-3x}$.

a) Prvo odredimo funkciju Y_1. Funkcija $f_1(x)$se može napisati kao

$$f_1(x) = x = (x - 0) \cdot e^{ox}$$

U ovom slučaju tražit ćemo rješenje u obliku

$$Y_1 = (Ax + B)e^{\alpha x} \cdot x^s$$

Snaga eksponencijalne funkcije je α =0. Ne podudara se s korijenima pomoćne (karakteristične) jednadžbe: $k_1 = 3,\ \ k_2 = -3$, dakle $s = 0$i određeno rješenje Y_1 ne sadrži nikakav dodatni faktor.

Dakle, posebno rješenje Y_1 diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$Y_1 = (Ax + B)e^{0x} \cdot x^0 = Ax + B$$

3) Nalazimo derivate prvog i drugog reda za Y_1 :

$$Y_1{}' = (Ax + B)' = A$$

$$Y_1" = (A)' = 0$$

Zamjenjujemo $Y_1{}'$, $Y_1{}''$ i Y_1 u odgovarajuću nehomogenu diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 9y = x,$$

Kao rezultat, imamo:

$$0 - 9(Ax + B) = x$$

Dobiveni izraz pojednostavljujemo:

$$-9Ax - 9B = 1 \cdot x$$

Koeficijenti pri xsu$-9A = 1$ $\Longleftrightarrow -1/9$

Koeficijenti pri x^0su$-9B = 0$ $\Longrightarrow 0$

Zatim

$$Y_1 = -\frac{1}{9}x$$

b) Određujemo funkciju Y_2.

Zbog funkcije $f_2(x) = 2e^{-3x}$, konstruirati ćemo oblik određenog rješenja kao

$$Y_2 = Ce^{-3x} \cdot x^s$$

Snaga eksponencijalne funkcije je α =- -3. Poklapa se s jednim korijenom $k_2 = -3$ pomoćne jednadžbe, stoga $s = 1$i određeno rješenje sadrži dodatni faktor x^1.

Dakle, posebno rješenje Y_2 diferencijalne jednadžbe ima oblik:

$$Y_2 = Ce^{-3x} \cdot x$$

Pronađite izvode prvog i drugog reda za Y:

$Y_2{}' = (Ce^{-3x} \cdot x)' = -3Ce^{-3x}x + Ce^{-3x} = e^{-3x}(-3Cx + C)$

$Y_2{}'' = (e^{-3x} \cdot (-3Cx + C))' = -3e^{-3x} \cdot (-3Cx + C) + e^{-3x} \cdot (-3C) = e^{-3x} \cdot (9Cx - 6C)$

Nakon zamjene $Y_2{}'$ i $Y_2{}''$ u Y_2odgovarajuću nehomogenu diferencijalnu jednadžbu $y'' - 9y = 2e^{-3x}$, dobivamo

$$e^{-3x} \cdot (9Cx - 6C) - 9Ce^{-3x} \cdot x = 2e^{-3x}$$

$$e^{-3x} \cdot (9Cx - 6C - 9Cx) = 2e^{-3x}$$

$$-6C = 2$$

$$C = -1/3$$

Kao rezultat,

$$Y_2 = -\frac{1}{3}e^{-3x} \cdot x$$

Opće rješenje zadane nehomogene jednadžbe je jednako

$$y = y_c + Y = y_c + Y_1 + Y_2$$

Stoga je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} \; -\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}xe^{-3x}$$

9.4 . Primjena Laplaceove transformacije za rješavanje diferencijalnih jednadžbi

U ovom poglavlju razmatramo rješenje linearnih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi drugog reda korištenjem Laplaceove transformacije. Ukratko se razmatraju definicija i svojstva Laplaceove transformacije.

9.4.1. Laplaceova transformacija. Definicija i glavna svojstva.

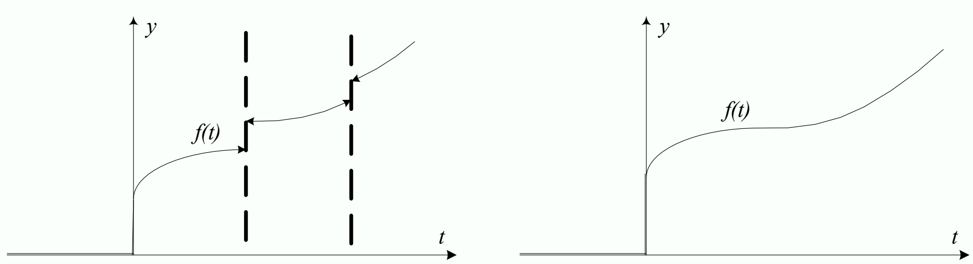
Laplaceova transformacija je jedna od najpopularnijih metoda rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi. Široko se koristi za rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Za obične diferencijalne jednadžbe Laplaceova transformacija se može koristiti za jednadžbe s konstantnim koeficijentima, kao i za druge vrste jednadžbi čiji koeficijenti nisu konstanti. Laplaceova transformacija je posebno korisna u slučajevima kada funkcija desne strane *f(x)* jednadžbe nije kontinuirana funkcija od *x* . Ova vrsta funkcije *f(x)* često se javlja u primjenama u mehanici, teoriji električnih krugova, teoriji automatskog upravljanja itd., gdje je *f(x)* funkcija različita od nule u kratkom vremenskom intervalu (na primjer, napon u električni krug koji se nakratko uključuje ili isključuje).
Laplaceova transformacija je odnos između zadane funkcije $f(t)$ i nove funkcije $F(s)$ koja se dobiva integracijom.

Definicija: Laplaceova transformacija

Pretpostavimo da stvarna argument funkcija f (t)zadovoljava sljedeća tri uvjeta:

1) $f(t)$definiran je na $t \geq 0$,

2) $f(t)$je kontinuirana ili po komadima kontinuirana funkcija (ima konačan broj prijelomnih točaka prvog tipa) u intervalu $t \in [0, +\infty)$,



3) postoje takvi pozitivni brojevi$M = const$ i $S_0 = const$, da za sve $t \geq 0$vrijedi

$$|f(t)| < Me^{S_0 t}.$$

U ovom slučaju, ***Laplaceova transformacija*** F(s) funkcije f(t) definirana je kao nepravilan integral

$$\mathrm{F(s)} = \int_0^{+\infty} \mathrm{f(t)e^{-st}dt}\,,$$

gdje je *s* parametar (kompleksni broj $s = \sigma + \omega i$u općem slučaju).

Nepravilan integral na desnoj strani naziva se ***Laplaceov integral*** .

Funkcija ***f(t)*** naziva se ***original*** , a funkcija ***F(s)*** naziva se ***transformacija*** .

Ako je funkcija F(s) transformacija funkcije f(t), koristimo zapis

$$F(s) = L[f(t)] \qquad \text{or} \qquad f(t) \div F(s)$$

Teorem :

Ako funkcija zadovoljava prethodno navedene uvjete, onda Laplaceov integral postoji pod uvjetom da

$$\sigma = Re(s) > S_o$$

gdje $\sigma = Re(s)$je realni dio kompleksnog broja $s = \sigma + \omega i$.

U općem slučaju, parametar *s* je kompleksan broj, ali ovdje pretpostavljamo da je s realan.

U primjenama na rješavanju fizičkih problema metodom Laplaceove transformacije obično se pretpostavlja da je funkcija *f (t)*jednaka nuli za *t* <*0* :

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Ova pretpostavka znači da se razmatraju procesi koji počinju u trenutku t =0. Funkcije ove vrste također se mogu definirati korištenjem Heaviside funkcije *H(t)* :

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

kao proizvod dviju funkcija *f(t)* i *H(t)* :$f(t) \cdot H(t)$

Na primjer,

$$\sin(t) \cdot H(t) = \begin{cases} \operatorname{sin} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Razmotrimo primjer pronalaženja Laplaceove transformacije funkcije *f(t)=1 (* $t \geq 0$*) koristeći* definiciju Laplaceove transformacije.

Primjer 21

Laplaceova transformacija funkcije ***f(t)=1*** $(t \geq 0)$ nalazi se kao

$$L[1] = \mathrm{F(s)} = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{b}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{b}} \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{b}\to+\infty} -\frac{1}{\mathrm{s}} \int_0^{\mathrm{b}} \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{d}(-\mathrm{s}\cdot\mathrm{t}) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^b = -\frac{1}{s}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-sb} - e^0\right) = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

Tako,

$$L[1] = \frac{1}{s}$$

ili možemo i pisati

$$1 \div \frac{1}{s}$$

Na sličan način određene su transformacije za ostale elementarne funkcije i sažete u posebne tablice. Dio takve tablice prikazan je u nastavku.

f(t)	***F(s)***
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
griješiti *(na)*	$\frac{a}{s^2+a^2}$
jer *(na)*	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{\lambda t}\sin(at)$	$\frac{a}{(s-\lambda)^2+a^2}$
$e^{\lambda t}\cos(at)$	$\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+a^2}$
sinh *(na)*	$\frac{a}{s^2-a^2}$
cosh *(kod)*	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{\lambda t}\sinh(at)$	$\frac{a}{(s-\lambda)^2-a^2}$
$e^{\lambda t}\cosh(at)$	$\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2-a^2}$

U aplikacijama se koriste upravo te sažete tablice elementarnih Laplaceovih transformacija i svojstava Laplaceove transformacije kako bi se pronašle Laplaceove transformacije potrebnih funkcija.

Svojstva Laplaceove transformacije

Razmotrimo samo svojstva koja su neophodna za rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

1) ***Teorem linearnosti*** (*C1, C2=const*):

$$L[C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)] = C_1 L[f_1(t)] \pm C_2 L[f_2(t)]$$

gdje su C1 i C2 konstante *.*

Primjer 22

Pronađite Laplaceovu transformaciju funkcije $\mathrm{f(t)} = 2 - 3\sin 5t + 4e^{2t} + t^2$.

$$F(s) = L[\mathrm{f(t)}] = \mathrm{L}[2 - 3\sin 5t + 4e^{2t} + t^2] = 2\mathrm{L}[1] - 3\mathrm{L}[\sin 5t] + 4\mathrm{L}[e^{2t}] + \mathrm{L}[t^2] =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{s} - 3 \cdot \frac{5}{s^2 + 25} + 4 \cdot \frac{1}{s - 2} + \frac{2!}{s^3}$$

Kao rezultat,

$$\mathrm{L}[\mathrm{f(t)}] = \frac{2}{s} - \frac{15}{s^2 + 1} + \frac{4}{s - 2} + \frac{2}{s^3}$$

2) ***Teorem o derivaciji izvornika***

Ako $\mathrm{L}[f(t)] = \mathrm{F(s)}$, onda

$$\mathrm{L}[f'(t)] = s\mathrm{F}(s) - f(0)$$

$$\mathrm{L}[f''(t)] = s^2\mathrm{F}(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathrm{L}[f'''(t)] = s^3\mathrm{F}(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

....

$$\mathrm{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathrm{F}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Definicija: Inverzna Laplaceova transformacija

Ako $\mathrm{L}[f(t)] = \mathrm{F(s)}$je , tada je inverzna Laplaceova transformacija $f(t)$funkcije $\mathrm{F(s)}$definirana kao nepravilni integral

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{F(t)}e^{st}ds$$

Često se piše kao

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

Treba napomenuti da se obično u aplikacijama koriste sažete tablice elementarnih Laplaceovih transformacija i svojstava Laplaceove transformacije kako bi se pronašli originali.

U mnogim praktičnim problemima Laplaceova transformacija ima oblik racionalnog razlomka. U ovom slučaju, metoda parcijalnih razlomaka može biti korisna u stvaranju izraza; za njih se lako može pronaći inverzna Laplaceova transformacija.

Primjer 23

Pronađite izvornik funkcije

$$\mathrm{F(s)} = \frac{\mathrm{s}+3}{\mathrm{s(s}+1)}$$

tj

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{\mathrm{s}+3}{\mathrm{s(s}+1)}\right] = ?$$

Proširujemo zadanu racionalnu funkciju u elementarne razlomke s nedefiniranim koeficijentima:

$$\mathrm{F(s)} = \frac{\mathrm{s}+3}{\mathrm{s(s}+1)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{s}+1}$$

Da bismo pronašli nepoznate koeficijente, nalazimo najmanji zajednički nazivnik i izjednačavamo brojnike funkcija na desnoj i lijevoj strani dobivenog izraza:

$$\frac{\mathrm{s}+3}{\mathrm{s(s}+1)} = \frac{\mathrm{A(s}+1)+\mathrm{Bs}}{\mathrm{s(s}+1)}$$

$$\mathrm{s}+3 = \mathrm{A(s}+1)+\mathrm{Bs}$$

$$\mathrm{s}+3 = \mathrm{As}+\mathrm{A}+\mathrm{Bs}$$

$$1\cdot \mathrm{s}+3 = (\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{s}+\mathrm{A}$$

Koeficijenti na s: 1=A+B,

Koeficijent kod s^0:$3 = \mathrm{A}$ ➔ $A = 3$

Iz prve jednadžbe slijedi da$B = 1 - A = 1 - 3 = -2$

Kao rezultat toga, imamo

$$\mathrm{F(s)} = \frac{3}{\mathrm{s}} + \frac{-2}{\mathrm{s}+1} = 3\cdot\frac{1}{\mathrm{s}} - 2\cdot\frac{1}{\mathrm{s}+1}$$

Koristeći teorem linearnosti i tablicu Laplaceovih transformacija, imamo

$$f(\mathrm{t}) = \mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F(s)}] = L^{-1}\left[3 \cdot \frac{1}{\mathrm{s}} - 2 \cdot \frac{1}{\mathrm{s}+1}\right] = 3\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] - 2\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}+1}\right] = 3 \cdot 1 - 2e^{-t}$$

Tako,

$$f(\mathrm{t}) = \mathrm{L}^{-1}[\mathrm{F(s)}] = 3 \cdot 1 - 2e^{-t}.$$

9.4.2. Primjena Laplaceove transformacije za rješavanje diferencijalnih jednadžbi

Kao što je već spomenuto, Laplaceova transformacija je jedna od najpopularnijih metoda za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Ovdje razmatramo primjenu Laplaceove transformacije za linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Laplaceova transformacija može se koristiti samo za rješavanje diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetima u točki t=0, odnosno samo za rješavanje Cauchyjevih problema.

Razmotrimo linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima:

$$ay" + by' + cy = f(t)$$

s početnim uvjetima $y(0) = y_0$ i $y'(0) = y_1$,

gdje su a, b, c konstante, $y = y(t)$je funkcija t i $a \neq 0$.

Algoritam rješavanja Cauchyjevog problema Laplaceovom transformacijom:

1) Primijenite Laplaceovu transformaciju na obje strane diferencijalne jednadžbe

$$L[ay" + by' + cy] = L[f(t)]$$

2) Koristite teorem o linearnosti zajedno sa *Teorem o derivaciji izvornika*

$$aL[y"] + bL[y'] + cL[y] = L[f(t)]$$

Neka je Laplaceova transformacija nepoznate funkcije y(t) . $L[y] = Y(s)$, t hen prema *Teorem o derivaciji izvornika,* daje

$$\mathrm{L}[y'(\mathrm{t})] = \mathrm{sY(s)} - y(0) = \mathrm{sY(s)} - y_0$$

$$\mathrm{L}[y''(\mathrm{t})] = \mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - \mathrm{s}y(0) - y'(0) = \mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - \mathrm{s}y_0 - y_1$$

Primjenom Laplaceove transformacije na zadanu diferencijalnu jednadžbu, dobili smo algebarsku jednadžbu za nepoznatu funkciju Y(s):

$$\mathrm{a} \cdot (\mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - \mathrm{s}y_0 - y_1) + b \cdot (\mathrm{sY(s)} - y_0) + c \cdot Y(s) = F(s)$$

gdje $F(s) = L[f(t)]$je Laplaceova transformacija desne strane funkcije.

3) Riješite dobivenu ***algebarsku jednadžbu*** za funkciju Y(s):

$$\mathrm{Y(s)}(\mathrm{as}^2 + bs + c) = F(s) + asy_0 + by_0 + ay_1$$

$$Y(s) = \frac{F(s) + asy_0 + by_0 + ay_1}{as^2 + bs + c}$$

4) ***Pronađite izvorni*** y(t) funkcije Y(s) koristeći svojstva Laplaceove transformacije i tablice Laplaceovih transformacija kao

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

Primjer 24

Riješite Cauchyjev problem

$$y" + 9y = e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 2$$

1) Laplaceovu transformaciju primjenjujemo na obje strane zadane diferencijalne jednadžbe

$$L[y" + 9y] = L[e^{2t}]$$

$$L[y"] + 9L[y] = L[e^{2t}]$$

Neka je Laplaceova transformacija nepoznate funkcije y(t) $L[y] = Y(s)$, tada prema Teoremu o derivaciji originala ona daje

$$L[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$L[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s \cdot 1 - 2$$

Laplaceova transformacija desne strane funkcije je

$$L[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$$

Nakon zamjene $L[y''(t)]$, $L[y(t)]$i $L[e^{2t}]$, dobivamo algebarsku jednadžbu za nepoznatu funkciju Y(s):

$$s^2 \cdot Y(s) - s - 2 + 9 \cdot Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

3) Dobivenu algebarsku jednadžbu rješavamo za funkciju Y(s):

$$Y(s) \cdot (s^2 + 9) = \frac{1}{s-2} + s + 2$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+9)} + \frac{s}{(s^2+9)} + \frac{2}{(s^2+9)}$$

4) Nalazimo izvorni y(t) za funkciju Y(s).

a) Prvo širimo prvi član s desne strane na elementarne razlomke s nedefiniranim koeficijentima:

$$\frac{1}{(s-2)(s^2+9)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+9} = \frac{A(s^2+9)+(Bs+C)(s-2)}{(s-2)(s^2+9)}$$

Dakle, dobivamo

$$1 = A(s^2+9) + (Bs+C)(s-2)$$

$$1 = As^2 + 9A + Bs^2 - 2Bs + Cs - 2C$$

$$0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 1 = (A+B)s^2 + (-2B+C)s + 9A - 2C$$

Koeficijenti pri s^2su$0 = A + B$

Koeficijenti na s su 0=-2B+C,

koeficijenti pri s^0su$1 = 9A - 2C$

Rješavajući sustav jednadžbi za nepoznate koeficijente A, B i C, dobivamo:

$$A = \frac{1}{13}, \quad B = -\frac{1}{13}, \quad C = -\frac{2}{13}$$

Kao rezultat toga, imamo

$$\frac{1}{(s-2)(s^2+9)} = \frac{\frac{1}{13}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{13}s - \frac{2}{13}}{s^2+9} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{s}{s^2+9} - \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{s^2+9}$$

Dobiveni izraz zamjenjujemo u izraz za$Y(s)$ umjesto prvog pojma:

$$Y(s) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{s}{s^2+9} - \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{s^2+9} + \frac{s}{s^2+9} + \frac{2}{s^2+9}$$

Dobiveni izraz pojednostavljujemo kao

$$Y(s) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{12}{13} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{24}{13} \cdot \frac{1}{s^2+9}$$

5) Pronalazimo original za funkciju $Y(s)$:

$$y(t) = L^{-1}[Y(\mathbf{s})] = L^{-1}\left[\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{12}{13} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{24}{13} \cdot \frac{1}{s^2+9}\right] =$$

$$= \frac{1}{13} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{12}{13} \cdot L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] + \frac{24}{13} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9}\right] =$$

$$= \frac{1}{13} \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{12}{13} \cdot L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] + \frac{24}{13} \cdot \frac{1}{3} \cdot L^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right] =$$

$$= \frac{1}{13}\mathrm{e}^{2t} + \frac{12}{13}\cos 3t + \frac{24}{39}\cdot\sin 3t$$

Tako smo dobili rješenje zadanog Cauchyjevog problema:

$$y(\mathrm{t}) = \mathrm{L}^{-1}[\mathrm{Y(s)}] = \frac{1}{13}\mathrm{e}^{2t} + \frac{12}{13}\cos 3t + \frac{24}{39}\sin 3t$$

Vježbe

Vježba 9.11.

Riješite Cauchyjev problem

$$y" + 4y' + 5y = 1, y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Riješenje:

1) Na zadanu diferencijalnu jednadžbu primjenjujemo Laplaceovu transformaciju:

$$L[y" + 4y' + 5y] = L[1]$$

$$L[y"] + 4L[y'] + 5L[y] = L[1]$$

Neka je Laplaceova transformacija nepoznate funkcije y(t) $L[y] = Y(s)$, tada prema Iz toga *proizlazi teorem o derivaciji* izvornika

$$\mathrm{L}[y'(\mathrm{t})] = \mathrm{sY(s)} - y(0) = \mathrm{sY(s)} - 0 = \mathrm{sY(s)}$$

$$\mathrm{L}[y''(\mathrm{t})] = \mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - \mathrm{s}y(0) - y'(0) = \mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - \mathrm{s}\cdot 0 - 1 = \mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - 1$$

Rezultat primjene Laplaceove transformacije na zadanu diferencijalnu jednadžbu daje nam algebarsku jednadžbu za nepoznatu funkciju Y(s):

$$\mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - 1 + 4\cdot\mathrm{sY(s)} + 5\cdot Y(s) = \frac{1}{s}$$

3) Dobivenu algebarsku jednadžbu rješavamo za funkciju Y(s):

$$\mathrm{Y(s)}(\mathrm{s}^2 + 4\mathrm{s} + 5) = \frac{1}{s} + 1$$

$$\mathrm{Y(s)}(\mathrm{s}^2 + 4\mathrm{s} + 5) = \frac{1 + s}{s}$$

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{1 + s}{s(\mathrm{s}^2 + 4\mathrm{s} + 5)}$$

4) Pronalazimo izvorni y(t) za funkciju Y(s) koristeći svojstva Laplaceove transformacije i tablice Laplaceovih transformacija, kao

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

U tu svrhu proširujemo funkciju s desne strane na elementarne razlomke s nedefiniranim koeficijentima:

$$\frac{1+s}{s(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5} = \frac{A(s^2+4s+5)+(Bs+C)s}{s(s^2+4s+5)}$$

Tako da

$$s+1 = A(s^2+4s+5)+(Bs+C)s$$

$$s+1 = As^2+4As+5A+Bs^2+Cs$$

$$0\cdot s^2 + 1\cdot s + 1 = (A+B)s^2 + (4A+C)s + 5A$$

Koeficijenti na s^2 :$0 = A + B$
Koeficijenti na s: $1 = 4A + C$,
Koeficijenti na s^0:$1 = 5A$

Rješavajući sustav jednadžbi za nepoznate koeficijente, imamo:

$$A = \frac{1}{5},\quad B = -\frac{1}{5},\quad C = \frac{1}{5}$$

Kao rezultat toga, imamo

$$Y(s) = \frac{1+s}{s(s^2+4s+5)} = \frac{\frac{1}{5}}{s} + \frac{-\frac{1}{5}s+\frac{1}{5}}{s^2+4s+5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\cdot\frac{s-1}{s^2+4s+5}$$

5) Pronalazimo original za funkciju $Y(s)$:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\cdot\frac{s-1}{s^2+4s+5}\right] = \frac{1}{5}\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{5}\cdot L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+4s+5}\right]$$

Iz tablice Laplaceove transformacije slijedi da $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$,

Međutim, za pronalaženje

$$L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+4s+5}\right]$$

prvo bismo trebali transformirati razlomak

$$\frac{s-1}{s^2+4s+5} = \frac{s-1}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2-3}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{3}{(s+2)^2+1}$$

Zatim

$$L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{3}{(s+2)^2+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right] - 3\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right] =$$

$$= e^{-2t}\text{cos}t - 3e^{-2t}\text{sin}t$$

Kao rezultat toga, imamo

$$\text{y(t)} = \frac{1}{5}\cdot 1 - \frac{1}{5}\cdot (e^{-2t}\text{cos}t - 3e^{-2t}\text{sin}t) = \frac{1}{5} - \frac{e^{-2t}}{5}\cdot(\text{cos}t - 3\text{sin}t)$$

Veze i primjene

Primjer 1:

Kotrljanje plovila, koje se događa u mirnoj vodi bez otpora, opisuje se sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$\theta" + {n_\theta}^2\theta = 0$$

gdje $\theta = \theta(t)$je amplituda kotrljanja,

n_θ je kružna frekvencija slobodnih (prirodnih) vibracija tijekom kotrljanja bez otpora.

Ova jednadžba je linearna homogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Njena pomoćna jednadžba je

$$k^2 + {n_\theta}^2 = 0,$$

čiji su korijeni kompleksni brojevi:

$$k_1 = n_\theta i \ , \qquad k_2 = -n_\theta i$$

Opće rješenje jednadžbe je

$$\theta(t) = C_1\cos(n_\theta t) + C_2\sin(n_\theta t)$$

Uzimajući u obzir otpor tijekom kotrljanja u mirnoj vodi, jednadžba gibanja ima oblik

$$\theta" + 2\mu_\theta\theta' + {n_\theta}^2\theta = 0$$

gdje $\mu_\theta$je relativni koeficijent otpora.

Pomoćna jednadžba je

$$k^2 + 2\mu_\theta k + {n_\theta}^2 = 0,$$

čiji su korijeni

$$k_1 = -\mu_\theta + i\sqrt{{\mu_\theta}^2 - {n_\theta}^2}\ , \qquad k_2 = -\mu_\theta - i\sqrt{{\mu_\theta}^2 - {n_\theta}^2}$$

$$\theta(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-\mu_\theta t}\text{cos}(\omega_\theta\cdot t) + C_2\,\mathrm{e}^{-\mu_\theta t}\text{sin}(\omega_\theta\cdot t)$$

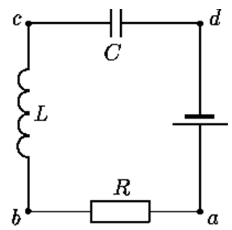
gdje

$\omega_\theta = \sqrt{{\mu_\theta}^2 - {n_\theta}^2}$je prirodna (njihova) frekvencija tijekom kotrljanja s otporom.

Slične diferencijalne jednadžbe opisuju i gibanje nagiba i uzdizanja plovila.

Primjer 2:

Niti jedan moderni brod nije potpun bez električnih i elektro-mehaničkih sustava. Električni krug izmjenične struje sastavni je dio svakog takvog sustava. Takvi su sklopovi opisani diferencijalnom jednadžbom. Kao primjer možemo razmotriti jedan od najjednostavnijih električnih krugova: krug otpornik-induktor-kondenzator (RLC).



sl.2. Krug otpornik-induktor-kondenzator

U slučaju izvora nepromjenjivog napona, sljedeća diferencijalna jednadžba drugog reda opisuje krug:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

gdje

t je vrijeme,

i(t) je struja propuštena kroz krug,

R je efektivni otpor kombiniranog opterećenja, izvora i komponenti,

L je induktivnost komponente induktora ,

C je kapacitet kondenzatorske komponente.

Ovo je homogena obična diferencijalna jednadžba drugog reda čija *karakteristična jednadžba je*

$$Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$$

ili

$$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0$$

Korijeni su

$$k_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad and \quad k_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$i(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$$

gdje C_1iC_2 su pojmovi amplitude .

Primjer 3:

Brodovi često nose kontejnere s raznim tekućinama, tako da su problemi s curenjem tekućine bitni. S tim u vezi razmatramo problem istjecanja tekućine iz cilindričnog spremnika široke baze polumjera *R* kroz malu rupu polumjera *r* na dnu posude.

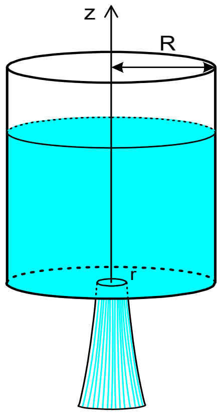


Fig.3.

Sljedeća diferencijalna jednadžba opisuje tekućinu koja istječe iz cilindričnog spremnika:

$$R^2\frac{dz}{dt}+r^2\sqrt{2\mathrm{g}z}=0$$

gdje

t je vrijeme

g je gravitacijsko ubrzanje (g= 9,80665 m/s ^{2}),

z je visina tekućine iznad rupe (z=z(t) je funkcija vremena).

Ovo je jednadžba odvojivih varijabli:

$$R^2\frac{dz}{dt}=-r^2\sqrt{2\mathrm{g}}\cdot\sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2\mathrm{g}}dt$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2\mathrm{g}}\int dt$$

$$2\sqrt{z}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2\mathrm{g}}\cdot t+C$$

Uz pretpostavku da je u početnom trenutku t=0 visina tekućine u posudi bila H, dobivamo

$$2\sqrt{H}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2\mathrm{g}}\cdot 0+C$$

$$C=2\sqrt{H}$$

$$2\sqrt{z}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2\mathrm{g}}\cdot t+2\sqrt{H}$$

Neka razina tekućine padne na 0 za vrijeme T. Uz pretpostavku da je u trenutku t=T visina tekućine u posudi z=0, dobivamo ovisnost vremena o visini tekućine

$$2\sqrt{0}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2\mathrm{g}}\cdot T+2\sqrt{H}$$

$$\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2\mathrm{g}}\cdot T=2\sqrt{H}$$

$$T=\frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2H}{\mathrm{g}}}$$

Primjer 4:

Postoji mnogo morskih ekoloških problema u kojima su korisne diferencijalne jednadžbe. Razmotrimo, na primjer, matematički model za razmnožavanje i izumiranje riblje populacije koji je važan za kontrolu ulova ribe.

Populacija riba *P(t)* u jezeru može se opisati diferencijalnom jednadžbom prvog reda

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

gdje je *k* parametar rasta, a M nosivost, što predstavlja najveću populaciju koju okolina može podržati. Ako iz nekog razloga populacija premaši nosivost, ona će se smanjiti; i sve dok je populacija manja od nosivosti, ona će se povećavati. Ova je jednadžba poznata kao logistička jednadžba.

Populacija P(t) bakalara u određenom morskom ribolovu modelirana je modificiranom logističkom jednadžbom

$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - H$$

gdje je H stopa po kojoj se riba lovi.

Važno pitanje u ovom problemu je kako sudbina riblje populacije ovisi o parametru H.

Primjer 5:

Diferencijalne se jednadžbe koriste u teoriji greda koja je važan alat u znanostima, posebice u konstrukciji i strojarstvu . Također je vrlo važno u dizajnu broda. Na primjer, razmatramo Euler-Bernoullijevu jednadžbu. Ova jednadžba opisuje odnos između otklona grede i primijenjenog opterećenja. Greda je konstruktivni element sposoban izdržati teška opterećenja pri savijanju. U slučaju malih otklona, oblik grede može se opisati linearnom diferencijalnom jednadžbom četvrtog reda

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = q(x)$$

gdje je *q(x)* vanjsko opterećenje koje djeluje na gredu,

E je modul elastičnosti grede,
I je drugi moment površine poprečnog presjeka grede.

Krivulja w(x) opisuje otklon grede u smjeru *z* na nekom položaju *x* .
Često je proizvod EI konstanta, poznata kao krutost na savijanje .
Ova jednadžba pod odgovarajućim rubnim uvjetima određuje otklon opterećene grede.

Primjer 6:

Obične diferencijalne jednadžbe se široko koriste za probleme hlađenja. Na primjer, pretpostavimo da je zagrijano tijelo postavljeno u okolinu. Neka nam je temperatura tijela kao funkcija vremena dana s T(t), a temperatura okoline s E(t). U ovom slučaju hlađenje tijela opisuje se sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - E(t))$$

gdje je *k* fizikalna konstanta ovisno o materijalima i veličinama tijela.

Ako predmet čija se temperatura modelira sadrži izvor topline, tada se hlađenje tijela opisuje diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - E(t)) + mH(t)$$

gdje je *m* pozitivna konstanta, obrnuto proporcionalna toplinskom kapacitetu objekta, a H(t) označava brzinu stvaranja topline unutar objekta. (H(t) bi bio negativan u nekim slučajevima, kao što je klima uređaj).