# 7. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE I-GO RZĘDU

## OPIS:

Równania różniczkowe są w dzisiejszym stechnicyzowanym świecie jedną z najbardziej żywotnych dziedzin nauki, są też stąd główną teoretyczną bazą w studiach politechnicznych. Po kilku wiekach rozwoju teoria równań różniczkowych jest nauką ogromną, jednak jej poznanie musi się zacząć od elementów, niemal tak, jak powstała w swym naturalnym rozwoju. Zagadnienia fizyki, mechaniki, techniki często prowadzą do związku pomiędzy nieznaną funkcją jednej zmiennej a jej pochodną. Takie zależności nazywają się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi.

**CEL**: Zdobycie umiejętności rozwiązywania równań różniczkowych. Zrozumienie faktu, że równania różniczkowe są ważne nie tylko przy rozwiązywaniu problemów matematycznych, ale także w wielu rzeczywistych zastosowaniach

## Zdobyte umiejętności:

1. Umiejętność rozwiązywania równań różniczkowych I-go rzędu.
2. Zapoznanie się z zastosowaniami równań różniczkowych w modelowaniu matematycznym wybranych procesów występujących w praktyce .

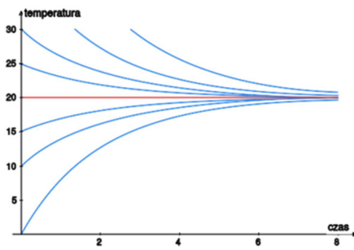
**Wymagania wstępne:** Wiedza z zakresu analizy matematycznej, równań różniczkowych. Wiedza z zakresu algebry liniowej i geometrii analitycznej.

**Zastosowania funkcji w rzeczywistych problemach**: Równania różniczkowe, będące ważną częścią matematyki, wyróżniają się wszechstronnym zastosowaniem. Doskonale sprawdzają się do rozważania mnóstwa zagadnień, a większość modeli matematycznych jest opisywana właśnie dzięki nim. Dzięki temu są obecne w różnych naukach – fizyce, chemii, biologii czy medycynie. Równania, o których mówimy pozwalają określić współczynnik kierunkowy stycznej, prędkość zmiany funkcji w czasie, a ponadto przydają się, chociażby podczas prowadzenia badań nad populacją. Podamy kilka zastosowań równań różniczkowych:

- *Datowanie izotopem węgla $^{14}C$* .W archeologii stosuje się metodę wyznaczania wieku próbki za pomocą pomiaru zawartości izotopu węgla $^{14}C$. Jest to metoda opracowana przez Willarda Libbiego w latach czterdziestych. Stosunek izotopu węgla $^{14}C$ do węgla $^{12}$C utrzymuje się na stałym i znanym poziomie przez całe życie organizmu. Z momentem śmierci w węgiel zaczyna się rozpadać z czasem półżycia równym 5568 lat (czyli okresem po jakim rozpadła się połowa próbki –patrz rozdział Funkcje wykładnicze i Logarytmiczne). Niech $Q(t)$ oznacza stosunek ilości węgla $^{14}C$ do węgla $^{12}$C, w chwili śmierci zakładamy, że stosunek ten wynosił $Q_0$. Rozpad promieniotwórczy może być opisany równaniem $Q' = -rQ$. *(Jaskinie w Lascaux: W tych francuskich jaskiniach znaleziono słynne malowidła naskalne wykonane węglem drzewnym. Kiedy przeprowadzono badania okazało się, że stosunek węgla $^{14}C$ do węgla $^{12}C$ w tych malowidłach jest 8 razy mniejszy niż w przypadku organizmów żywych.)*

- *Model Gompertza* . Benjamin Gompertz zaproponował model opisujący rozwój guzów w ciele człowieka. Wyraża się on za pomocą równania $y' = ry\, ln\left(\frac{K}{y}\right)$, gdzie $y = y(t)$ określa rozmiar guza.

- *Model populacji ze zmienną szybkością wzrostu)* .Wyobraźmy sobie, że pewien gatunek insekta rozmnaża się z okresowo zmiennym tempem opisanym równaniem $y' = 0.2(0.5 + sint)y$.



Jakob Bernoulli

*[https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Analiza_matematyczna_2/Wyk%C5%82ad_13:_R%C3%B3wnania_r%C3%B3%C5%BCniczkowe_zwyczajne]*

- *Model logistyczny ze zmienną pojemnością środowiska.* Jeśli pojemność środowiska zmienia się w czasie, czyli $K = K(t)$, to równanie logistyczne przyjmuje postać: $y' = ry\left(1 - \frac{y}{K(t)}\right)$.

## Spis treści



### 7.1. Równania różniczkowe I-go rzędu

Rozważmy równanie różniczkowe (RR)

$$y' = y. \tag{1}$$

Naszym zadaniem jest znalezienie takiej funkcji $y = \varphi(x)$, która spełnia to równanie. Odpowiedź jest prosta: szukana funkcja, to $y = e^x$, a ogólniej rozwiązaniem jest rodzina funkcji

$$y = Ce^x, \tag{2}$$

gdzie $C$ jest dowolną stałą. ( $(Ce^x)' = Ce^x$). Wszystkie rozwiązania postaci (2) nazywamy *całką ogólną* lub *rozwiązaniem ogólnym* równania różniczkowego. Jeżeli w (2) wstawimy konkretną stałą $C$, to powstała odpowiedź będzie *całką szczególną* (*rozwiązaniem szczególnym*) równania (1)

np. $$y = -2e^x.$$

Czasami należy wyznaczyć rozwiązanie szczególne równania spełniające warunek postaci

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

gdzie $x_0$, $y_0$ są ustalonymi wartościami liczbowymi. Warunek (3) nazywamy *warunkiem początkowym.*

Przykłady równań różniczkowych:

$y' = x, \quad y' = 2cosx + 3,$

$y' = y + x, \quad y \cdot y' = x,$

$(y')^2 - 2y' + y = e^x.$

A zatem, jak wnioskujemy z powyższych przykładów, **równaniem różniczkowym (RR) nazywamy równanie zawierające pochodne funkcji niewiadomej. Rzędem równania nazywamy rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu.** Np. równanie $y" + y' - 2y = x$ jest równaniem różniczkowym rzędu drugiego.

Równaniem różniczkowym rzędu pierwszego nazywamy równanie

$$\boldsymbol{F(x, y(x), y'(x)) = 0}, \tag{4}$$

gdzie $F$ oznacza funkcję trzech zmiennych. Jest to tzw. *postać ogólna* równania różniczkowego zwyczajnego rzędu I.

Postać:

$$y' = f(x, y), \tag{5}$$

nazywamy *postacią normalną* równania różniczkowego.

Układ

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

nazywa się *zagadnieniem Cauchy'ego*.


*Augustin Louis Cauchy*

*[https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Analiza_matematyczna_2/Wyk%C5%82ad_13:_R%C3%B3wnania_r%C3%B3%C5%BCniczkowe_zwyczajne]*

*Całką ogólną (rozwiązaniem ogólnym)* równania (4) nazywamy funkcję $y = \varphi(x, C)$, zmiennej niezależnej $x \in (a, b)$ i stałej dowolnej $C$, która przy każdej ustalonej wartości $C$ wybranej dowolnie z pewnego przedziału spełnia w przedziale $(a, b)$ równanie $F(x, y, y') = 0$. Całka ogólna jest więc jednoparametrową rodziną krzywych całkowych danego równania.

*Całką szczególną* równania $F(x, y, y') = 0$ nazywamy każdą funkcję $y = \psi(x)$, która w przedziale $(a, b)$ ma pierwszą pochodną i spełnia to równanie dla każdego $x \in (a, b)$.

Mając całkę ogólną $y = \varphi(x, C)$ można rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania $F(x, y, y') = 0$.

*Zagadnienie Cauchy'ego* dla równania różniczkowego rzędu pierwszego polega na wyznaczeniu takiej całki szczególnej tego równania, która dla pewnej z góry danej wartości zmiennej niezależnej $x = x_0$ przyjmuje z góry daną wartość $y_0$, tzn. że $y(x_0) = y_0$. Uwzględniając w całce ogólnej

$y = \varphi(x, C)$, warunek początkowy $y(x_0) = y_0$ mamy $y_0 = \varphi(x_0, C)$ skąd obliczamy stałą dowolną *C*. Wstawiając obliczoną wartość liczbową stałej C do rozwiązania $\varphi(x, C)$ otrzymujemy szukaną całkę szczególną.

W interpretacji geometrycznej zagadnienie Cauchy'ego polega na wybraniu z rodziny krzywych całkowych, która jest dana równaniem $y = \varphi(x, C)$ , jednej krzywej, która przechodzi przez z góry dany punkt $(x_0, y_0)$ dla $x \in (a, b)$.

Twierdzenie 1.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ i jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ są ciągłe na obszarze D$\subseteq R^2$ oraz $(x_0,\ y_0) \in D$, to zagadnienie Cauchyego (6) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

## 7.2. Równanie o zmiennych rozdzielonych

Postać normalna równania o zmiennych rozdzielonych

$$y' = h(x) \cdot g(y). \tag{7}$$

Metoda rozwiązania: równanie zapisujemy w postaci:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y), \tag{8}$$

a następnie - przy założeniu, że $g(y) \neq 0$ – „rozdzielamy zmienne” tzn.

$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$ ,

*(równanie (8) podzieliliśmy obustronnie przez g(y) i jednoczenie pomnożyliśmy przez dx).*

Teraz obustronnie całkujemy tzn.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx.$$

PRZYKŁAD 1.

Rozwiązać równanie $y' = y^2 e^{2x}$.

Rozwiązanie: równanie to zapisujemy

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{2x}.$$

Następnie rozdzielamy zmienne ( po lewej stronie zapisujemy wszystkie wyrażenia zawierające zmienną *y*, a po stronie prawej – wszystkie wyrażenia zawierające zmienną *x:*

$\frac{dy}{y^2} = e^{2x} dx$

UWAGA

*Zakładamy, że $y \neq 0$. Założenie to sugeruje, aby sprawdzić, czy funkcja stała y=0 jest rozwiązaniem równania. Podstawiając y=0, widzimy, że jest. Taką całkę równania nazywamy **całką osobliwą (rozwiązaniem osobliwym).***

Całkujemy obustronnie: $\int \frac{dy}{y^2} = \int e^{2x} dx.$

Otrzymujemy: $\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{e^{2x}}{2} + C, \quad -\frac{1}{y} = \frac{e^{2x}}{2} + C,$ czyli

$$y = -\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2}+C}$$

jest to całka ogólna (rozwiązanie ogólne) równania różniczkowego (w skrócie będziemy pisać CORR lub RORR).

Odpowiedź: $y = -\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2}+C}$ CORR oraz $y = 0$ – całka osobliwa.

*Można sprawdzić, czy uzyskana odpowiedź jest poprawna podstawiając y do lewej i prawej strony równania: $y' = y^2 e^{2x}$:*

$L=y'=\left(\frac{e^{2x}}{2} + C\right)^{-2} \cdot \frac{e^{2x}}{2} \cdot 2 = \frac{e^{2x}}{\left(\frac{e^{2x}}{2}+C\right)^2}$

*oraz*

$P=y^2 e^{2x} = \left(-\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2}+C}\right)^2 \cdot e^{2x} = \frac{1}{\left(\frac{e^{2x}}{2}+C\right)^2} \cdot e^{2x} = \frac{e^{2x}}{\left(\frac{e^{2x}}{2}+C\right)^2}.$

*Ponieważ L=P, co zachodzi również dla y=0, zatem podana odpowiedź jest poprawna.*

PRZYKŁAD 2.

Znaleźć nieosobliwe rozwiązanie równania $(1 + x^2)y' = 2xy$.

Rozwiązanie:
Zapiszemy równanie w postaci

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy,$$

a następnie rozdzielimy zmienne: po lewej stronie zmienne *y*, a po prawej zmienne *x* (*pamiętać należy, że zarówno dx jak i dy muszą być w liczniku!*) :

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{(1+x^2)},$$

następnie całkujemy obustronnie:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{(1+x^2)},$$

otrzymujemy

$$\ln|y| = \ln(1+x^2) + \ln C$$

*zapisaliśmy zamiast stałej C - ln C, ponieważ jeśli C jest stałą dowolną, to ln C też jest stałą dowolną . Taki zapis pomoże nam skorzystać z własności logarytmów i otrzymamy:*

$$\ln|y| = \ln C(1+x^2).$$

Opuszczając logarytmy dostaniemy odpowiedź:

$y = C\,(1+x^2)$ - CORR.

PRZYKŁAD 3.

Rozwiązać równanie różniczkowe przy podanym warunku początkowym:

$$y' = e^{x+y} \quad , \quad y(0) = 0.$$

Rozwiązanie: zapiszmy równanie

$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \;\; | \frac{dx}{e^y},$

$\frac{dy}{e^y} = e^x dx\,,$

$\int e^{-y} dy = \int e^x dx,$

$-e^{-y} = e^x + C,$

$\ln e^{-y} = \ln(-e^x + C),$

$-y = \ln(-e^x + C)$

$y = -\ln(-e^x + C)$ CORR.

Teraz podstawiamy warunek początkowy $y(0) = 0$:
$0 = -\ln(-e^0 + C), \quad 0 = -\ln(C-1)$, stąd $1 = C - 1,$ czyli $C = 2.$
Zatem całka szczególna tego równania będzie postaci: $y = -\ln(2 - e^x)$ CSRR.

PRZYKŁAD 4.

Rozwiązać równanie różniczkowe przy podanym warunku początkowym

$$y' = y\,ctgx \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Rozwiązanie:

Zapiszmy równanie w postaci

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{cosx}{sinx}$$

i rozdzielmy zmienne: $\frac{dy}{y} = \frac{cosx}{sinx}dx,$

całkujemy obustronnie: $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{cosx}{sinx}dx,$

czyli $\ln|y| = \ln|sinx| + \ln C$ *- patrz uwaga z PRZYKŁADU 3.*

Ostatecznie, korzystając z własności logarytmów dostajemy: $\ln|y| = \ln(|sinx| \cdot C),$

czyli $y = C\sin x,$ CORR.

I podstawiamy warunek początkowy: $1 = C\sin\frac{\pi}{2}$, a stąd $C = 1$.

Zatem rozwiązanie szczególne równania różniczkowego przedstawia się następująco:

$y = \sin x$ CSRR.

## 7.3. Równania różniczkowe liniowe .

Równanie postaci

$$\boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x),} \tag{9}$$

gdzie *P* i *Q* są funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale nazywamy ***równaniem różniczkowym liniowym (rzędu pierwszego)***, przy czym mówimy, że jest to ***równanie jednorodne*** (RJ) jeśli

*Q( x ) ≡ 0,*

**zaś** ***niejednorodne (RN)***, gdy funkcja *Q* nie jest tożsamościowo równa zeru.

Całka ogólna (rozwiązanie ogólne) równania jednorodnego

$$y' + P(x)y = 0 \quad \text{RJ} \quad (\textit{Równanie Jednorodne}) \tag{10}$$

opisana jest wzorem

$y = e^{\int -P(x)dx+C} = e^{\int -P(x)dx} \cdot e^C = C_1 e^{\int -P(x)dx},$ ($C_1$ - stała dowolna)

( jeśli $C$ jest stałą dowolną, to $e^C = C_1$ też jest stałą dowolną. Rozwiązanie ogólne – otrzymujemy rozdzielając zmienne tak jak w PRZYKŁADACH 1.- 4.

$$y = C_1 e^{\int -P(x)dx}$$ CORJ *Całka Ogólna Równania Jednorodnego* (11)

Całka ogólna (rozwiązanie ogólne) równania niejednorodnego

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

można znaleźć uzmienniając we wzorze (11) stałą $C_1$, tj. szukając rozwiązania w postaci

$y = C_1(x)e^{\int -P(x)dx}$ .

FAKT:

CORN=CORJ+CSRN (12)

Całka Ogólna Równania Niejednorodnego jest sumą Całki Ogólnej Równania Jednorodnego i Całki Szczególnej Równania Niejednorodnego.

CSRN poszukujemy *metodą uzmienniania stałej* (MUS) w postaci

$$y_s = C_1(x)e^{\int -P(x)dx}. \quad (13)$$

Po zróżniczkowaniu

$$y_s' = C_1'(x)e^{\int -P(x)dx} - P(x)C_1(x)e^{\int -P(x)dx}$$

i wstawieniu do równania (9) otrzymujemy

$$C_1'(x)e^{\int -P(x)dx} - P(x)C_1(x)e^{\int -P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{\int -P(x)dx} = Q(x),$$

czyli

$C_1'(x)e^{\int -P(x)dx} = Q(x)$,

$C_1'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$,

co po scałkowaniu daje

$$C_1(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\,.$$

Stałą całkowania wybraliśmy równą 0, gdyż interesuje nas rozwiązanie szczególne, więc możemy wybrać najdogodniejszą postać funkcji pierwotnej.

CSRN : $y_s = (\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx) \cdot e^{\int -P(x)dx}$ *( podstawiamy do wzoru (13))*

CORN: $y = C_1 e^{\int -P(x)dx} + (\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx) \cdot e^{\int -P(x)dx}$

Sposób wyznaczenia nieznanej funkcji $C_1(x)$ wyjaśnimy na przykładzie.

PRZYKŁAD 5.

Rozwiązać równanie

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Rozwiązanie:

Znajdujemy najpierw całkę ogólną równania jednorodnego

$$y' + 2xy = 0 \qquad \text{RJ}$$

Rozdzielając zmienne dostajemy

$$\frac{dy}{y} = -2xdx,$$

a po scałkowaniu

$$\ln|y| = -x^2 + C$$

i ostatecznie

$$y = e^{-x^2+C},$$

czyli

$$y = C_1 e^{-x^2} \qquad \text{CORJ.}$$

Uzmienniając stałą $C_1$ mamy

$$y_s = C_1(x)e^{-x^2},$$

a stąd

$$y_s' = C_1'(x)e^{-x^2} - 2xC_1(x)e^{-x^2}.$$

Wstawiając prawe strony dwóch ostatnich równań do $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ dostajemy

$$C_1'(x)e^{-x^2} - 2xC_1(x)e^{-x^2} + 2xC_1(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

i po uproszczeniu

$$C_1'(x) = x.$$

Zatem

$$C_1(x) = \frac{x^2}{2}$$

i ostatecznie

CSRN : $y_s = \frac{x^2}{2}e^{-x^2}$,

a poszukiwana całka ogólna przyjmie postać:

CORN: $y = C_1 e^{-x^2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2} = \left(C_1 + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x^2}$.

PRZYKŁAD 6.

Znaleźć całkę szczególną równania $y' - \frac{y}{x} = 2x^2$ spełniającą warunek początkowy $y(1) = 3$.

Rozwiązanie:

Najpierw rozwiązujemy równanie liniowe jednorodne

$$y' - \frac{y}{x} = 0. \quad \text{RJ}$$

Stąd

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

$\ln|y| = \ln|x| + \ln C$,
czyli
$y = Cx$, CORJ
i następnie

$$y_s = C(x) \cdot x.$$

Różniczkując obustronnie otrzymujemy:

$$y_s' = C'(x)x + C(x).$$

Wstawiając tę funkcję do równania $y' - \frac{y}{x} = 2x^2$
mamy $C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)\cdot x}{x} = 2x^2$, a następnie $C'(x)x = 2x^2$, czyli $C'(x) = 2x$.
Po scałkowaniu dostajemy: $C(x) = x^2$.

Zatem

CSRN : $y_s = x^2 \cdot x = x^3$,

a poszukiwana całka przyjmie postać

CORN: $y = Cx + x^3$.

Przy warunku początkowym $y(1) = 3$, $3 = C \cdot 1 + 1^3$, a zatem $C = 2$.

Poszukiwana całka szczególna ma postać: $y = 2x + x^3$.

**Metoda przewidywań.** Metoda ta polega na *odgadnięciu* CSRN, a następnie skorzystaniu z twierdzenia, że

$$\text{CORN=CORJ+CSRN,} \tag{14}$$

przy czym CORJ obliczamy tak jak poprzednio. Metoda ta jest łatwiejsza do niż MUS, jednakże nie zawsze możemy tę metodę stosować. Jeżeli CSRN nie umiemy przewidzieć-wówczas stosujemy metodę MUS, która jest uniwersalną do ro rozwiązywania równań różniczkowych liniowych I -go rzędu.

**Metodę przewidywań** stosujemy wówczas, gdy funkcja $P(x)$ występująca w równaniu (9) **jest stała** tzn. $P(x) = p$, a ponadto funkcja $Q(x)$ występująca w (9) jest:

1) wielomianem $W_n(x)$ stopnia $n$ , $Q(x) = W_n(x)$,
2) sumą postaci $Q(x) = \alpha sin\omega x + \beta cos\omega x$,
3) funkcją postaci $ae^{bx}$, gdy $b \neq -p$,
4) sumą lub iloczynem funkcji typów 1) – 3).

W każdym z wymienionych przypadków CSRN należy przewidzieć w tej samej postaci co $Q(x)$ , zachowując odpowiednio: stopień wielomianu, liczbę $\omega$, liczbę $b$, przyjmując w miejsce pozostałych stałych (współczynniki wielomianu, $\alpha, \beta$ oraz $a$) pewne stałe ($A$, $B$, $C, \dots$) chwilowo nieokreślone, które następnie wyznaczymy z warunku

$$y' + p \cdot y = Q(x). \tag{15}$$

Rozwiązywanie za pomocą metody przewidywań wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 7 .
Znaleźć całkę ogólną równania $y' + 4y = x^2 + 2x - 3$.

Rozwiązanie:

Najpierw rozwiązujemy RJ : $y' + 4y = 0$.

Mamy:

$$\frac{dy}{dx} = -4y, \quad \frac{dy}{y} = -4dx\,, \ \ln|y| = -4x + C, \ \ y = C_1 e^{-4x} \quad - \quad \text{CORJ}$$

Ponieważ $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ - *wielomian stopnia 2,* zatem CSRN przewidujemy w postaci

$$y_s = Ax^2 + Bx + C,$$

stąd

$$y'_s = 2Ax + B.$$

Wstawiając $y_s$ oraz $y_s'$ do równania $y' + 4y = x^2 + 2x - 3$ otrzymamy:

$2Ax + B + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 2x - 3.$

I dalej $\quad 4Ax^2 + x(2A + 4B) + B + 4C = x^2 + 2x - 3.$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach $x$ otrzymujemy:

$4A = 1 \quad => \quad A = \frac{1}{4},$

$2A + 4B = 2 \quad => \quad B = \frac{3}{8},$

$B + 4C = -3 \quad => \quad C = -\frac{27}{32}.$

Zatem funkcja $y_s = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{27}{32}$ jest CSRN i wobec wzoru (14) mamy ostateczne rozwiązanie CORN postaci:

$$y = C_1 e^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{27}{32}.$$

PRZYKŁAD 8.

Znaleźć całkę szczególną równania $y' + 2y = xe^x$ spełniającą warunek początkowy $y(0) = 2$.

Rozwiązanie:

Najpierw rozwiązujemy RJ : $y' + 2y = 0$.

Mamy:

$$\frac{dy}{dx} = -2y, \quad \frac{dy}{y} = -2dx\,, \quad \ln|y| = -2x + C, \quad y = C_1 e^{-2x} \quad - \quad \text{CORJ}$$

CSRN przewidujemy w postaci iloczynu wielomianu stopnia I-go oraz funkcji wykładniczej $e^x$:

$$y_s = (Ax + B)e^x,$$

Stąd $y_s' = Ae^x + (Ax + B)\, e^x$.

Wstawiamy $y_s$ oraz $y_s'$ do $y' + 2y = xe^x$ i dostajemy

$$Ae^x + (Ax + B)e^x + 2(Ax + B)e^x = xe^x,$$

czyli

$$A + (Ax + B) + 2(Ax + B) = x, \quad \textit{obustronnie podzieliliśmy przez } e^x$$

i dalej

$$3Ax + A + 3B = x.$$

Zatem

$3A = 1 \quad => \quad A = \frac{1}{3},$

$A + 3B = 0 \quad => \quad B = -\frac{1}{9}.$

CSRN ma postać: $y_s = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) e^x$.

CORN: $y = C_1 e^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) e^x$.

Uwzględniając warunek początkowy $y(0) = 2 \Rightarrow \quad 2 = C_1 - \frac{1}{9}$ stąd $C_1 = \frac{19}{9}$ . Szukaną całką szczególną jest więc funkcja

$$y = \frac{19}{9} e^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) e^x.$$

PRZYKŁAD 9.

Znaleźć całkę szczególną równania $y' - 3y = -cos3x$ spełniającą warunek początkowy $y(0) = 1$.

Rozwiązanie:

Najpierw rozwiązujemy RJ : $y' - 3y = 0$.

Mamy:

$$\frac{dy}{dx} = 3y, \quad \frac{dy}{y} = 3dx\,, \quad \ln|y| = 3x + C, \quad y = C_1 e^{3x} \quad - \quad \text{CORJ}$$

CSRN przewidujemy w postaci:

$$y_s = Asin3x + Bcos3x.$$ *przewidujemy pełną postać wyrażenia mimo, ze w przykładzie występuje tylko* $-cos3x$.

Stąd: $y_s' = 3Acos3x - 3Bsin3x$.

Wstawiamy $y_s$ oraz $y_s'$ do $y' - 3y = -cos3x$ i otrzymujemy:

$$3Acos3x - 3Bsin3x - 3(Asin3x + Bcos3x) = -cos3x.$$

Porównujemy tym razem współczynniki przy sin*3x* i cos*3x:*

*cos3x:* $3A - 3B = -1$
*sin3x:* $-3A - 3B = 0$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy: $A = -\frac{1}{6} \quad B = \frac{1}{6}$.

CSRN ma postać: $y_s = -\frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{6}\cos 3x$.

CORN: $y = C_1 e^{3x} - \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{6}\cos 3x$.

Uwzględniając warunek początkowy $y(0) = 1$ => $1 = C_1 - 0 + \frac{1}{6}$ => $C_1 = \frac{5}{6}$.

Szukaną całką szczególną jest więc funkcja $y = \frac{5}{6}e^{3x} - \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{6}\cos 3x$

Podamy teraz twierdzenie pozwalające rozwiązywać równanie jeśli funkcja $Q(x)$ jest sumą funkcji.

TWIERDZENIE 1. Suma całki szczególnej równania

$$y' + P(x)y = Q_1(x)$$

i całki szczególnej równania

$$y' + P(x)y = Q_2(x)$$

jest całką szczególną równania

$$y' + P(x)y = Q_1(x) + Q_2(x).$$

I rozwiążemy kilka przykładów ilustrujących Twierdzenie 1.

PRZYKŁAD 10.

Znaleźć całkę szczególną równania $y' + 3y = x^2 + 2cos3x + \sin 3x$ spełniającą warunek początkowy $y(0) = \frac{49}{54}$.

Rozwiązanie:

_Najpierw rozwiązujemy RJ : $y' + 3y = 0$.

Mamy:

$$\frac{dy}{dx} = -3y, \quad \frac{dy}{y} = -3dx, \ \ln|y| = -3x + C, \ y = C_1e^{-3x} \quad - \quad \text{CORJ}$$

Z Twierdzenia 1. wynika, że suma CRSN

$$y' + 3y = x^2 . \qquad (*)$$

i suma CSRN

$$y' + 3y = 2\cos 3x + \sin 3x. \qquad (**)$$

będzie rozwiązaniem naszego wyjściowego równania.

CSRN (*) przewidujemy w postaci: $y_s = Ax^2 + Bx + C$,

stąd $y'_s = 2Ax + B$,

zatem podstawiając $y_s$ oraz $y_s'$ do $y' + 3y = x^2$ otrzymujemy

$2Ax + B + 3(Ax^2 + Bx + C) = x^2$.

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach $x$ otrzymujemy:

$x^2$: $3A = 1$
$x$: $2A + 3B$=0
$x^0$: $B + 3C = 0$

Rozwiązujemy układ równań i otrzymujemy: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{9}$, $C = \frac{2}{27}$.

Czyli CSRN (*) otrzymaliśmy w postaci: $y_s = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}$.

CSRN (**) przewidujemy w postaci:

$$y_s = A\sin 3x + B\cos 3x.$$

Stąd: $y_s' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$.

Wstawiamy $y_s$ oraz $y_s'$ do $y' + 3y = 2\cos 3x + \sin 3x$ i otrzymujemy:

$3A\cos 3x - 3B\sin 3x - 3(A\sin 3x + B\cos 3x) = 2\cos 3x + \sin 3x$ .

Porównujemy tym razem współczynniki przy sin*3x* i cos*3x,*
cos*3x:* $3A - 3B = 2$
sin*3x:* $-3A - 3B = 1$
Rozwiązując układ równań otrzymujemy: $A = \frac{1}{6}$ $B = -\frac{1}{2}$.
CSRN ma postać: $y_s = \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x$.
CORN: $y = C_1 e^{3x} - \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{6}\cos 3x$.

Uwzględniając warunek początkowy $y(0) = \frac{49}{54}$ dostajemy

$C_1 e^0 - \frac{1}{6}\sin 0 + \frac{1}{6}\cos 0 = \frac{49}{54}$,

$C_1 + \frac{1}{6} = \frac{49}{54}$ => $C_1 = \frac{40}{54} = \frac{20}{27}$

Szukaną całką szczególną jest więc funkcja $y = \frac{20}{27}e^{3x} - \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{6}\cos 3x$.

ĆWICZENIA.

1. Stosując metodę przewidywań znaleźć całkę szczególną równania, spełniającą podany obok warunek początkowy:
   a. $y' + y = \cos x, \quad y(0) = 0.5$
   b. $y' - 5y = -x^2, \quad y(0) = 0.25$
   c. $y' + y = 2x, \quad y(0) = -1$
   d. $y' - 3y = e^{2x} - x, \quad y(1) = 0$
   e. $y' - 6y = \sin x + x^3, y(0) = 1$
   f. $y' + 0.5y = -2\cos x,\ y(0) = 1$
   g. $y' + y = (x+2)(\frac{1}{2}\cos 2x), \quad y(0) = \frac{1}{2}$
   h. $y' - 2y = e^x \cos x, \quad y(0) = 2$ .

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO OBLICZENIA.

1. Znaleźć nieosobliwe rozwiązania równań o zmiennych rozdzielonych:
   a) $y' tgx - y = -2$
   b) $y^2 y' = 1 - 2x$
   c) $y' = cos^2 y$
   d) $y' + (1 - y^2) tgx = 0$.

2. Rozwiązać równania liniowe:
   a) $y' + y = e^{-x}$
   b) $y' - 2xy = x^3$
   c) $y' - 3y = e^{3x}$
   d) $y' + y = cosx$.

3. Rozwiązać równania różniczkowe przy podanych warunkach początkowych:
   a) $y' + y = \frac{x}{y}$ , $\quad y(0) = 1$
   b) $y' + ytgx = cos^2 x$ , $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
   c) $y' - 3y = e^{-2x},\ y(0) = 2$
   d) $y' - \frac{1}{x} y = x + 1,\ y(1) = 2$.

# 8. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE II-GO RZĘDU O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

OPIS:
Istnieją metody rozwiązywania równań różniczkowych pewnych szczególnych typów, jednak wiele równań różniczkowych nie ma rozwiązań, które dałyby się wyrazić w postaci jawnej. W praktyce matematycznej często ważniejszą informacją od samej postaci rozwiązania jest informacja o jego istnieniu (gdyż nie każde równanie różniczkowe musi je mieć). W przypadku równań różniczkowych, o których wiadomo, że mają rozwiązanie, często (szczególnie w zastosowaniach) wystarczające jest znalezienie rozwiązania przybliżonego (np. stosując metodę aproksymacji). Obecnie prowadzi się wiele badań nad kolejnymi schematami rozwiązywania równań różniczkowych, gdyż mają one wiele zastosowań praktycznych. Przy wielu uniwersytetach powstają specjalne katedry równań różniczkowych zajmujące się praktycznie tylko szukaniem rozwiązań kolejnych przełomowych równań . W rozdziale tym zajmiemy się pewnym szczególnym przypadkiem równań różniczkowych wyższego rzędu, a mianowicie równaniami liniowymi rzędu $n$ o stałych współczynnikach, dla których to równań możemy opisać metodę prowadzącą do znalezienia rozwiązań. Należy bowiem zdawać sobie sprawę, że nie ma metod umożliwiających dokładne rozwiązanie dowolnego równania różniczkowego.
W praktyce często zadowalamy się rozwiązaniami przybliżonymi. Szukaniem rozwiązań przybliżonych zajmuje się dział matematyki zwany metodami numerycznymi.

CEL: Zdobycie umiejętności rozwiązywania równań różniczkowych liniowych II-go rzędu metodą uzmienniania stałej i metodą przewidywań ( współczynników nieoznaczonych). Zrozumienie faktu, że równania różniczkowe są ważne nie tylko przy rozwiązywaniu problemów matematycznych, ale także w wielu rzeczywistych zastosowaniach

## Zdobyte umiejętności:

1. Umiejętność rozwiązywania równań różniczkowych liniowych II-go rzędu.
2. Zapoznanie się z zastosowaniami równań różniczkowych w modelowaniu matematycznym wybranych procesów występujących w praktyce .

Wymagania wstępne: Wiedza z zakresu analizy matematycznej - pochodnych , całek, równań różniczkowych I-go rzędu. Wiedza z zakresu algebry liniowej i geometrii analitycznej.

Zastosowania funkcji w rzeczywistych problemach: Równania różniczkowe, będące ważną częścią matematyki, wyróżniają się wszechstronnym zastosowaniem. Doskonale sprawdzają się do rozważania mnóstwa zagadnień, a większość modeli matematycznych jest opisywana właśnie dzięki nim. Dzięki temu są obecne w różnych naukach – fizyce, chemii, biologii czy medycynie. Przykłady zastosowań równań różniczkowych w praktyce, w różnych dziedzinach nauki:

- równania Cauchy'ego-Riemanna w analizie zespolonej
- równania Einsteina-Infelda-Hoffmanna
- równania Hamiltona w mechanice klasycznej
- równania Maxwella
- równania opisujące konwekcję swobodną w termodynamice
- równania opisujące zasady dynamiki Newtona
- równania związane z czasem połowicznego rozpadu izotopów w fizyce jądrowej

- równania Cauchy'ego-Riemanna w analizie zespolonej
- równania Einsteina-Infelda-Hoffmanna
- równania Hamiltona w mechanice klasycznej
- równania Maxwella
- równania opisujące konwekcję swobodną w termodynamice
- równania opisujące zasady dynamiki Newtona
- równania związane z czasem połowicznego rozpadu izotopów w fizyce jądrowej
- równanie Einsteina w teorii względności
- równanie falowe
- równanie Naviera-Stokesa w mechanice płynów
- równanie Poissona-Boltzmanna
- równanie przewodnictwa cieplnego w termodynamice
- równanie Laplace'a opisujące harmoniki
- równanie Poissona
- równanie Schrödingera w mechanice kwantowej

## Spis treści



## 7.1. Równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach

*Równanie różniczkowe n-tego rzędu* zawiera n-tą pochodną $y^{(n)}$ oraz ewentualnie również pochodne niższych rzędów, funkcję niewiadomą $y = y(x)$ i zmienną niezależną $x$.

Zatem *równanie liniowe n-tego rzędu o stałych współczynnikach,* to równanie postaci:

$$\boldsymbol{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = f(x)}, \qquad (1)$$

gdzie $a_n \neq 0,\ a_i \in R,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$

*Rozwiązaniem* jest rodzina zmiennej $x$, w której występuje $n$ stałych dowolnych. Takie rozwiązanie nazywa się *rozwiązaniem ogólnym* albo *całką ogólną.* Każda konkretna funkcja z tej rodziny nazywa się rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną). Zamiast stałych dowolnych mamy teraz konkretne liczby. Czasami chcemy wyznaczyć całkę szczególną równania spełniającą warunki początkowe:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \qquad y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

$x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} -$ konkretne liczby. (2)

Warunki takie nazywamy *warunkami początkowymi* (zagadnienie Cauchy'ego)

## 8.2. Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach

Rozwiązywanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego drugiego rzędu polega na wyznaczeniu CORJ, a następnie zastosowaniu metody uzmiennienia stałej, bądź przewidywań. Na wykładzie uwzględnimy tylko metodę przewidywań. (Dla równań wyższych rzędów schemat postępowania jest taki sam.)

*Równanie liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach*

*Równanie liniowe jednorodne rzędu II o stałych współczynnikach* ma postać

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3}$$

gdzie *a, b, c* są dowolnymi liczbami i $a \neq 0$.

Jego rozwiązania poszukujemy w postaci

$$y(x) = e^{rx} \tag{4}$$

gdzie *r* dobieramy tak, aby funkcja (4) spełniała równanie (3).

Po wyznaczeniu pochodnych $y'(x) = re^{rx}, \quad y''(x) = r^2e^{rx}$

i podstawieniu do równania (3) dostajemy

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

Dzielimy obustronnie to równanie przez $e^{rx}$ i dostajemy

$$\boldsymbol{ar^2 + br + c = 0}. \tag{5}$$

Zatem równanie różniczkowe będzie spełnione dla każdego *x* wtedy i tylko wtedy, gdy r będzie pierwiastkiem otrzymanego równania kwadratowego. Równanie (5) nazywamy ***równaniem charakterystycznym*** równania (3).

Pierwiastki równania charakterystycznego są zdeterminowane wartością wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$.

*Przypadek I* ($\Delta > 0$)

Równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste $r_1$ i $r_2$. Zatem każda z funkcji

$$y_1 = e^{r_1x}, \qquad y_2 = e^{r_2x}$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego. Funkcje te tworzą tzw. **układ podstawowy całek** równania, a to oznacza, że CORJ ma postać

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}} \tag{6}$$

gdzie $C_1$ i $C_2$ są dowolnymi stałymi.

*Przypadek II* ( Δ= 0)

Równanie ma dwukrotny pierwiastek rzeczywisty $r_0$. Można sprawdzić (wstawiając do równania), że oprócz funkcji

$$y_1 = e^{r_0 x}$$

również funkcja

$$y_2 = x e^{r_0 x}$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego. Ponadto obie funkcje stanowią układ podstawowy całek, zatem CORJ ma w tym przypadku postać

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{r_0 x} + C_2\, x e^{r_0 x}} \tag{7}$$

gdzie $C_1$ i $C_2$ są dowolnymi stałymi.

*Przypadek III* (Δ< 0)

Równanie ma dwa różne pierwiastki zespolone, sprzężone $r_1 = \alpha + i\beta$ oraz $r_2 = \alpha - i\beta$. Można wykazać, że CORJ ma w tym przypadku postać

$$\boldsymbol{y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)} \tag{8}$$

gdzie $C_1$ i $C_2$ są dowolnymi stałymi.

PRZYKŁADY : Rozwiązać równania

1. $y" - y = 0$

Równanie charakterystyczne: $r^2 - 1 = 0$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste $r_1 = 1$ i $r_2 = -1$, więc CORJ jest postaci

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ .

**2**. $y'' + 2y' + y = 0$

Równanie charakterystyczne $r^2 + 2r + 1 = 0$

ma pierwiastek dwukrotny $r_0$ = -1, więc CORJ jest postaci

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

3. $y'' + y = 0$

Równanie charakterystyczne $r^2 + 1 = 0$

ma dwa różne pierwiastki zespolone $r_1 = i$ oraz $r_2 = -i$ ($\alpha$= 0, $\beta$ = 1), więc CORJ jest postaci

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \ .$$

*Równanie liniowe niejednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach.*

Równanie liniowe niejednorodne rzędu II o stałych współczynnikach ma postać

$$ay'' + by' + cy = f(x)\ , \tag{9}$$

gdzie *a, b, c* są dowolnymi liczbami i $a \neq 0$.

Schemat postępowania prowadzącego do znalezienia CORN jest analogiczny jak w przypadku równania liniowego rzędu pierwszego. W pierwszej kolejności wyznaczamy CORJ, a następnie metodą przewidywań znajdujemy CORN. Zagadnienie Cauchy'ego rozwiązujemy dobierając stałe w CORN.

Rozwiązanie równania (9) jest w postaci

$$\boldsymbol{y(x) \ = \ C_1\, y_1(x) \ + C_2\, y_2(x) \ + \ y_s(x)}, \quad \text{CORN=CORJ+CSRN} \tag{10}$$

gdzie $y_1(x)$, $y_2(x)$ obliczamy w sposób opisany dla jednorodnego równania liniowego (3), a $y_s(x)$ jest rozwiązaniem szczególnym dla $f(x) \ \neq \ 0$.

W metodzie przewidywań (nieoznaczonych współczynników) zakładamy (zgadujemy) postać rozwiązania $y_s(x)$ w zależności od postaci funkcji $f(x)$:

<u>ZASADA 1.</u>

$\boldsymbol{f(x) = W_s(x) e^{px}}$ ,

gdzie $W_s(x)$ jest wielomianem stopnia $s$, wówczas $y_s(x)$ przewidujemy w postaci:

$\boldsymbol{y_s(x) = \ Q_s(x) x^k e^{px}}$ , gdzie $Q_s(x)$ jest też wielomianem stopnia $s$, natomiast $k$ jest krotnością pierwiastka $p$ wielomianu charakterystycznego.

ZASADA 2.

$$\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x}(m\ \sin\beta x + n\cos\beta x)},$$

wówczas $y_s(x)$ przewidujemy w postaci:

$$\boldsymbol{y_s(x) = e^{\alpha x}(A\ \sin\beta x + B\cos\beta x)x} \quad ,$$

gdzie $\alpha \pm \beta i$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego.

ZASADA 3.

Jeżeli $f(x)$ jest sumą kilku funkcji opisanych w ZASADACH 1. oraz 2., to dla każdej z tych funkcji oddzielnie przewidujemy i obliczamy całkę szczególną, a następnie wszystkie otrzymane całki szczególne sumujemy.

WNIOSEK 1.

Jeżeli $\boldsymbol{f(x) = W_s(x)}$ i jeżeli 0 jest *k*-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to

$y_s(x)$ przewidujemy w postaci $\boldsymbol{y_s(x) = Q_s(x)x^k}$ , gdzie $Q_s(x)$ jest wielomianem stopnia $s$ .

WNIOSEK 2.

Jeżeli $\boldsymbol{f(x) = qe^{px}}$ i jeżeli *p* jest *k*-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to

$y_s(x)$ przewidujemy w postaci $\boldsymbol{y_s(x) = Ae^{px}x^k}$ .

ZASADY 1.-3. zilustrujemy na poniższych przykładach.

PRZYKŁADY :

Rozwiązać następujące równania różniczkowe drugiego rzędu, tam gdzie podano warunki początkowe wyznaczyć stałe $C_1, C_2$:

1. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$.

Rozwiązanie:

Równanie charakterystyczne: $r^2 - 4r = 0$ ma dwa pierwiastki $r_1 = 0,\ r_2 = 4$ .

CORJ : $y = C_1 + C_2e^{4x}$.

Przewidujemy CSRN: $y_s = x(Ax^2 + Bx + C)$ , bo $r$ = 0 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego.

Obliczamy pochodne:

$y'_s = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y''_s = 6Ax + 2B,$

A następnie $y'_s,\ y''_s$ wstawiamy do równania $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$. Dostajemy:

$6Ax + 2B - 12Ax^2 - 8Bx - 4C = -12x^2 + 6x - 4.$

Porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach $x$ :

$x^2$: $-12A = -12 \quad => \quad A = 1$

$x$: $6A - 8B = 6 \quad => \quad B = 0$

$x^0$: $2B - 4C = -4 \quad => \quad C = 1.$

Zatem $y_s = x(x^2 + 1)$ CSRN.

I ostatecznie $\boldsymbol{y = C_1 + C_2e^{4x} + x(x^2 + 1)}$ CORN.

2. $y'' - 2y' + y = 3e^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

Rozwiązanie:

Równanie jednorodne: $y'' - 2y' + y = 0$.

Równanie charakterystyczne: $r^2 - 2r + 1 = 0$ ma pierwiastek dwukrotny $r_0 = 1.$ Zatem CORJ jest postaci

$$y = C_1e^x + C_2xe^x.$$

Przewidujemy CSRN: $y_s = Ae^{2x}$ - *2 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego.*

Obliczamy pochodne :

$y'_s = 2Ae^{2x}$

$y''_s = 4Ae^{2x}.$

A następnie $y_s$ , $y_s'$, $y''_s$ wstawiamy do równania $y'' - 2y' + y = 3e^{2x}$:

$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = 3e^{2x}$.

Zatem $A = 3$ i wtedy $y_s = 3e^{2x}$ CSRN,

Wobec tego $y = C_1e^x + C_2xe^x + 3e^{2x}$ CORN.

Ponieważ mamy warunki początkowe: , $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, musimy wyznaczyć stałe $C_1, C_2$. W tym celu musimy policzyć pochodną $y = C_1e^x + C_2xe^x + 3e^{2x}$:

$y' = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x + 6e^{2x}$.

I teraz mamy układ równań: $\begin{cases} 1 = C_1 + 3 \\ 3 = C_1 + C_2 + 6 \end{cases}$ , a stąd $C_1 = -2$, $C_2 = -1$.

Wobec tego rozwiązanie równani a przedstawia się następująco:

$\boldsymbol{y = -2e^x - xe^x + 3e^{2x}}$.

3. $y'' + 9y = \sin 3x$

Rozwiązanie:

RJ : $y'' + 9y = 0$;

Równanie charakterystyczne: $r^2 + 9 = 0$.

Widzimy, że $\Delta < 0$, $\Delta = -39$ stąd $r_1 = 3i$, $r_1 = -3i$ , zatem $\alpha = 0, \beta = 3$.

CORJ: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

Przewidujemy $y_s = (A\cos 3x + B\sin 3x)x$ - *bo 0+3i jest pierwiastkiem równania charakterystycznego*

Obliczamy

$y'_s = (-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)x + (A\cos 3x + B\sin 3x)$

$y''_s = (-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)x + (-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + (-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)$, czyli

$y''_s = (-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)x + (-6A\sin 3x + 6B\cos 3x)$.

Wstawiając $y_s, y''_s$ do równania $y'' + 9y = sin3x$ otrzymujemy

$6B\cos 3x - 6A\sin 3x = \sin 3x.$

Zatem $-6A = 1, \quad A = -\frac{1}{6}$

$6B = 0, \ \ B = 0.$

CSRN: $y_s = \left(-\frac{1}{6}\cos 3x\right)x$

CORN : $\boldsymbol{y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \frac{1}{6}(\cos 3x)x}$.

4. $y'' - 4y' + 4y = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x).$

Rozwiązanie:

RJ: $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Równanie charakterystyczne: $r^2 - 4r + 4 = 0, \ \ r_0 = 2,$

CORJ: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

Ponieważ prawa strona $8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$ jest suma trzech funkcji, więc stosując ZASADĘ 3. będziemy szukać całek szczególnych równań:

1) $y'' - 4y' + 4y = 8x^2,$
2) $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x},$
3) $y'' - 4y' + 4y = 8\sin 2x.$

Ad. 1)
Stosujemy WNIOSEK 1. Ponieważ 0 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc przewidujemy $y_s = Ax^2 + Bx + C$.

Obliczamy:
$y'_s = 2Ax + B$

$y''_s = 2A$

i wstawiamy do równania $y'' - 4y' + 4y = 8x^2$:

$2A - 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2.$

Porównując współczynniki otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4A = 8 & => A = 2 \\ -8A + 4B = 0 & => B = 4 \\ 2A - 4B + 4C = 0 & => C = 3 \end{cases}$$

CSRN 1) : $y_s = 2x^2 + 4x + 3$.

Ad. 2)

2 jest pierwiastkiem dwukrotnym równania charakterystycznego, zatem przewidujemy

$y_s = De^{2x}x^2$.

Obliczamy

$y'_s = D(2e^{2x}x^2 + 2e^{2x}x)$

$y''_s = D(4e^{2x}x^2 + 4e^{2x}x + 4e^{2x}x + 2e^{2x})$.

Wstawiamy do równania $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$ i otrzymujemy

$De^{2x}(4x^2 + 8x + 2) - 4De^{2x}(2x^2 + 2x) + 4De^{2x}x^2 = 8e^{2x}$,

czyli

$$D(4x^2 + 8x + 2) - 4D(2x^2 + 2x) + 4Dx^2 = 8.$$

Porównując współczynniki dostajemy:

$x^2$: $\quad 4D - 8D + 4D = 0$,

$x$: $\quad 8D - 8D = 0$, *dwa pierwsze równania są tożsamościami*

$x^0$: $\quad 2D = 8 \quad => D = 4$ .

Zatem CSRN 2): $y_s = 4e^{2x}x^2$.

Ad. 3)

Ponieważ $\Delta$ nie jest ujemna zatem przewidujemy

$y_s = E\cos 2x + F\sin 2x$.

Następnie obliczamy:

$y'_s = -2E\sin 2x + 2F\cos 2x$

$y''_s = -4E\cos 2x - 4F\sin 2x$.

W rezultacie

$y'' - 4y' + 4y = (-4E - 8F + 4E)\cos 2x + (-4F + 8E + 4F)\sin 2x = 8\sin 2x$.

$\cos 2x$: $-4E - 8F + 4E = 0$

$\sin 2x$: $8E - 4F + 4F = 8$,

a stąd $E = 1, \ F = 0$.

Zatem CSRN 3): $y_s = \cos 2x$.

Stosując ZASADĘ 3. Przewidywania całki szczególnej otrzymujemy

CORN: $\boldsymbol{y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 2x^2 + 4x + 3 + 4e^{2x}x^2 + \cos 2x}$.

PRZYKŁADOWE ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

[http://wyznacznik.pl/rownania-rzedu-drugiego-o-stalych-wspolczynnikach-zadania]

Rozwiąż równanie rzędu II metodą przewidywań:
1) $y'' - 2y' + y = x^3$,

Rozwiązanie
1. Rozwiązujemy równanie jednorodne:
$y'' - 2y' + y = 0$
Równanie charakterystyczne:
$r^2 - 2r + 1 = 0$
$(r-1)^2 = 0$
$r_0 = 1$ – pierwiastek podwójny
Rozwiązanie równania jednorodnego:
$y_j = C_1 e^x + C_2 x e^x$
2. Szukamy rozwiązania szczególnego metodą przewidywań. Ponieważ prawa strona jest postaci $f(x) = x^3$ – wielomian stopnia trzeciego, to również rozwiązanie szczególne będzie takiej postaci. Wobec tego:
$y_{sz} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
Liczymy pierwszą i drugą pochodną:
$y'_{sz} = 3Ax^2 + 2Bx + C$
$y''_{sz} = 6Ax + 2B$
Wstawiamy do wyjściowego równania $y'' - 2y' + y = x^3$:

Wymnażamy i grupujemy przy odpowiednich potęgach $x$:
$Ax^3 + x^2(-6A + B) + x(6A - 4B + C) + 2B - 2C + D = x^3$
Porównujemy współczynniki po lewej i prawej stronie:

Wyliczając kolejno $A, B, C, D$ otrzymujemy:
$\begin{cases} A = 1 \\ B = 6 \\ C = 18 \\ D = 24 \end{cases}$
Zatem rozwiązanie szczególne ma postać:
$y_{sz} = x^3 + 6x^2 + 18x + 24$
3. Rozwiązanie końcowe równania $y'' - 2y' + y = x^3$ to:
$y = y_j + y_{sz}$
$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$

2) $y'' - y = 2e^{2x}$,

Rozwiązanie

1. Rozwiązujemy równanie jednorodne tak jak w poprzednich zadaniach:

$y'' - y = 0$

Równanie charakterystyczne:

$r^2 - 1 = 0$

$(r+1)(r-1) = 0$

$r_1 = -1 \ \vee \ r_2 = 1$

Rozwiązanie równania jednorodnego:

$y_j = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$

2. Szukamy rozwiązania szczególnego metodą przewidywań. Ponieważ prawa strona jest postaci $f(x) = 2e^{2x}$, to również rozwiązanie szczególne będzie takiej postaci. Wobec tego:

$y_{sz} = Ae^{2x}$

Liczymy pierwszą i drugą pochodną:

$y'_{sz} = 2Ae^{2x}$

$y''_{sz} = 4Ae^{2x}$

Wstawiamy do wyjściowego równania $y'' - y = 2e^{2x}$:

$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = 2e^{2x}$

$3Ae^{2x} = 2e^{2x}$

$3A = 2$

$A = \frac{2}{3}$

Zatem rozwiązanie szczególne ma postać:

$y_{sz} = \frac{2}{3}e^{2x}$

3. Rozwiązanie końcowe równania $y'' - y = 2e^{2x}$ to:

$y = y_j + y_{sz}$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{2}{3}e^{2x}$

3) $y'' - 6y' = \cos 2x$,

Rozwiązanie

1. Rozwiązujemy równanie jednorodne tak jak w poprzednich zadaniach:

$y'' - 6y' = 0$

Równanie charakterystyczne:

$r^2 - 6r = 0$

$r(r-6) = 0$

$r_1 = 0 \ \vee \ r_2 = 6$

Rozwiązanie równania jednorodnego:

$y_j = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{6x}$

$y_j = C_1 + C_2 e^{6x}$

2. Szukamy rozwiązania szczególnego metodą przewidywań. Ponieważ prawa strona jest postaci $f(x) = \cos 2x$, to rozwiązanie szczególne będzie postaci:

$y_{sz} = A \sin 2x + B \cos 2x$

Liczymy pierwszą i drugą pochodną:

$y'_{sz} = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$

$y''_{sz} = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$

Wstawiamy do wyjściowego równania $y'' - 6y' = \cos 2x$:

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 6\cdot(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) = \cos 2x$$

Wymnażamy i grupujemy przy $\sin 2x$ i $\cos 2x$:

$$\sin 2x\,(-4A + 12B) + \cos 2x\,(-4B - 12A) = \cos 2x$$

Porównujemy odpowiednie współczynniki:

$$\begin{cases} -4A + 12B = 0 \\ -4B - 12A = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy powyższy układ równań dowolną metodą i otrzymujemy:

$$\begin{cases} A = -\frac{3}{40} \\ B = -\frac{1}{40} \end{cases}$$

Zatem rozwiązanie szczególne ma postać:

$$y_{sz} = -\frac{3}{40}\sin 2x - \frac{1}{40}\cos 2x$$

3. Rozwiązanie końcowe równania $y'' - 6y' = \cos 2x$ to:

$$y = y_j + y_{sz}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{6x} - \frac{3}{40}\sin 2x - \frac{1}{40}\cos 2x$$

4) $5y'' - 6y' + 5y = 6\sin x - 12\cos x,$

Rozwiązanie

1. Rozwiązujemy równanie jednorodne tak jak w poprzednich zadaniach:

$$5y'' - 6y' + 5y = 0$$

Równanie charakterystyczne:

$$5r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4\cdot 5\cdot 5 = -64 = 64i^2, \quad \sqrt{\Delta} = 8i$$

$$r_1 = \frac{6 - 8i}{2\cdot 5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$r_2 = \frac{6 + 8i}{2\cdot 5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

Rozwiązanie równania jednorodnego:

$$y_j = e^{\frac{3}{5}x}\cdot\left(C_1\sin\frac{4}{5}x + C_2\cos\frac{4}{5}x\right)$$

2. Szukamy rozwiązania szczególnego metodą przewidywań. Ponieważ prawa strona jest postaci $f(x) = 6\sin x - 12\cos x$, to rozwiązanie szczególne będzie postaci:

$$y_{sz} = A\sin x + B\cos x$$

Liczymy pierwszą i drugą pochodną:

$$y'_{sz} = A\cos x - B\sin x$$

$$y''_{sz} = -A\sin x - B\cos x$$

Wstawiamy do wyjściowego równania $5y'' - 6y' + 5y = 6\sin x - 12\cos x$ -*ćwiczenie dla studentów*

Wymnażamy i grupujemy przy $\sin x$ i $\cos x$:

$$\sin x\,(-5A + 6B + 5A) + \cos x\,(-5B - 6A + 5B) = 6\sin x - 12\cos x$$

$$\sin x\cdot 6B + \cos x\cdot(-6A) = 6\sin x - 12\cos x$$

Porównujemy odpowiednie współczynniki:

$$\begin{cases} 6B = 6 \\ -6A = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

Zatem rozwiązanie szczególne ma postać:
$y_{sz} = 2\sin x + \cos x$
3. Rozwiązanie końcowe równania $5y'' - 6y' + 5y = 6\sin x - 12\cos x$ to:
$y = y_j + y_{sz}$

5) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x,$

Rozwiązanie
1. Rozwiązujemy równanie jednorodne tak jak w poprzednich zadaniach:
$y'' - 5y' + 6y = 0$
Równanie charakterystyczne:
$r^2 - 5r + 6 = 0$
$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
$r_1 = \frac{5-1}{2 \cdot 1} = 2$
$r_2 = \frac{5+1}{2 \cdot 1} = 3$
Rozwiązanie równania jednorodnego:
$y_j = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$
2. Szukamy rozwiązania szczególnego metodą przewidywań. Ponieważ prawa strona jest postaci $f(x) = 13\sin 3x$, to rozwiązanie szczególne będzie postaci:
$y_{sz} = A\sin 3x + B\cos 3x$
Liczymy pierwszą i drugą pochodną:
$y'_{sz} = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$
$y''_{sz} = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x$
Wstawiamy do wyjściowego równania $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$:- *ćwiczenie dla studentów*
Wymnażamy i grupujemy przy $\sin x$ i $\cos x$:
$\sin x(-5A + 6B + 5A) + \cos x(-5B - 6A + 5B) = 6\sin x - 12\cos x$
$\sin x \cdot 6B + \cos x \cdot (-6A) = 6\sin x - 12\cos x$
Porównujemy odpowiednie współczynniki:
$$\begin{cases} 6B = 6 \\ -6A = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$
Zatem rozwiązanie szczególne ma postać:
$y_{sz} = 2\sin x + \cos x$
3. Rozwiązanie końcowe równania $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$ to:
$y = y_j + y_{sz}$
$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 2\sin x + \cos x$

6) $y'' - 4y = 3e^{-2x},$ ważny!!!

Rozwiązanie
1. Rozwiązujemy równanie jednorodne tak jak w poprzednich zadaniach:
$y'' - 4y = 0$
Równanie charakterystyczne:
$r^2 - 4 = 0$

$(r+2)(r-2)=0$
$r_1=-2 \vee r_2=2$
Rozwiązanie równania jednorodnego:
$y_j=\underline{C_1e^{-2x}}+C_2e^{2x}$
2. Szukamy rozwiązania szczególnego metodą przewidywań. Ponieważ prawa strona jest postaci $f(x)=3e^{-2x}$, to rozwiązanie szczególne powinno być postaci:
$y_{sz}=\underline{Ae^{-2x}}$
Powtarza się ono już w rozwiązaniu ogólnym równania jednorodnego, wobec tego należy je pomnożyć przez $x$, aby uzyskać inną postać. Zatem rozwiązanie szczególne będzie postaci:
$y_{sz}=Axe^{-2x}$
Liczymy pierwszą i drugą pochodną (uważamy na iloczyn):
$y'_{sz}=Ae^{-2x}+Ax\cdot\left(-2e^{-2x}\right)=Ae^{-2x}-2Axe^{-2x}$
$y''_{sz}=-2Ae^{-2x}-2Ae^{-2x}-2Ax\cdot\left(-2e^{-2x}\right)=-4Ae^{-2x}+4Axe^{-2x}$
Wstawiamy do wyjściowego równania $y''-4y=3e^{-2x}$:
$-4Ae^{-2x}+4Axe^{-2x}-4Axe^{-2x}=3e^{-2x}$
$-4Ae^{-2x}=3e^{-2x}$
Porównujemy odpowiednie współczynniki:
$-4A=3$
$A=-\frac{3}{4}$
Zatem rozwiązanie szczególne ma postać:
$y_{sz}=-\frac{3}{4}xe^{-2x}$
3. Rozwiązanie końcowe równania $y''-4y=3e^{-2x}$ to:
$y=y_j+y_{sz}$
$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{3}{4}xe^{-2x}$

PRZYKŁADOWY EGZAMIN Z ROZDZIAŁU

1. Rozwiązać podane równania różniczkowe:

a. $y''-3y'+2y=5x+2$.
b. $y''-5y'+6y=2e^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
c. $y''+4y=\sin 5x$, $y(\pi)=1$, $y'(\pi)=1$.
d. $y''+9y=\sin x+e^{2x}$.
e. $y''+2y'+y=x^2e^x$.
f. $y''+6y'+10y=8e^{-2x}+x^3-x+4$.
g. $y''+4y=\sin 2x$ $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
h. $y''+y'-12y=e^{0.5x}-x$.