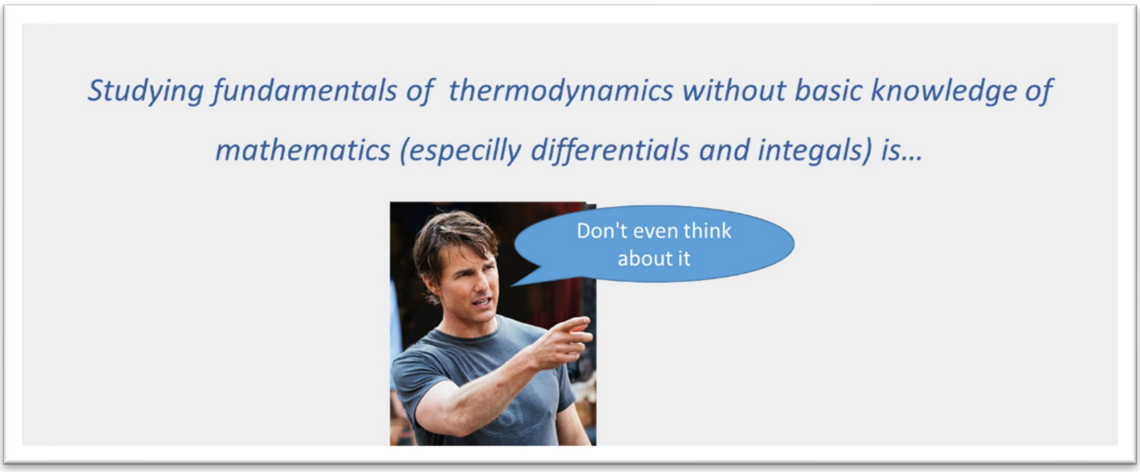
7 INTEGRALI



Termodinamika je samo jedna od grana fizike u kojoj se koriste integrali. Zapravo, integrali se koriste u raznim mehaničkim, elektrotehničkim i fizikalnim izračunima kao i u nautičkoj navigaciji. Ovo poglavlje sadrži teoriju integralnog računa i neke osnovne tehnike integriranja, te određene i neprave integrale. U znanosti, poslovanju i pomorstvu integrali se koriste za određivanje površina ravninskih likova, duljine luka ravninskih krivulja, volumena rotacijskih tijela, ...

Ishodi učenja:

1. Izračunati jednostavne integrale elementarnih funkcija.
2. Primijeniti pravila za izračunavanje određenih integrala.
3. Primijeniti integralni račun pri računanju površine ravninskih likova.
4. Primijeniti integralni račun pri određivanje volumena čvrstih tijela.
5. Primijeniti integrale pri rješavanju problema u pomorstvu.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

SADRŽAJ

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.1 Uvod u neodređene integrale

DETALJAN OPIS:

Ovaj dio sadrži uvodne pojmove o neodređenim integralima. Razmotrit će se odnos integrala i derivacija. Definirat će se antiderivacija i neodređeni integral. Poglavlje sadrži primjere sa geometrijskom interpretacijom antiderivacija, te zadatke i njihova rješenja.

GeoGebra, DESMOS grafički kalkulator, MS Excel ili neki drugi slični alat može se koristiti za crtanje grafova.

Cilj: **Naučiti odnos između neodređenih integrala i derivacija elementarnih funkcija. Geometrijski interpretirati i objasniti antiderivacije.**

Ishodi učenja:

1. Definirati primitivnu funkciju.
2. Odrediti antiderivacije jednostavnijih elementarnih funkcija.
3. Konstruirati graf funkcije

Prethodno znanje: svojstva i grafovi elementarnih funkcija, osnovne algebarske i trigonometrijske formule, pravila deriviranja.

Odnos prema stvarnim pomorskim problemima: Poznavanje neodređenih integrala koristi se u računanju određenih integrala. Deriviranje i integriranje koriste se pri rješavanju različitih inženjerskih problema počevši od same konstrukcije plovila tj. u brodogradnji, npr. da bi se odredila krivulja trupa plovila, kao i površina ispod trupa; stabilnost plovila, ... Praktična primjena integrala dio je teorije navigacije; npr. integrali se koriste u dizajniranju Mercatorove karte. Derivacije i integrali pomogli su poboljšati razumijevanje koncepta Zemljine reljefnosti: određivanju najkraćeg puta plovidbe, posebice pri velikim udaljenostima kako bi plovila došla do određene lokacije. Linije ekvatora i meridijana kao jedne od linija velikog kruga površine Zemlje, istodobno su i ortodrome i loksodrome.

Sadržaj

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

7.1.1 Antiderivacija i neodređeni integral

U prethodnim poglavljima naučili smo derivirati neprekinute funkcije. Ako je zadana funkcija $F(x)$, njezina derivacija je funkcija $f(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

ili u obliku diferencijala

$$\frac{d(F(x)+C)}{dx} = f(x).$$

Zanima nas obrnuti postupak tj. koju smo funkciju derivirali da bismo dobili funkciju $f(x)$? Pogledajmo na primjeru funkcije $f(x) = \cos x$.

Prema formulama derivacije

$$sin'x = cosx$$

Uzimajući u obzir da je derivacija stalnog broja nula

$$C' \ = 0,$$

možemo odrediti nekoliko funkcija čija je derivacija kosinus funkcija

$$(sinx + 1)' = cosx; \quad (sinx - 1.5)' = cosx; \quad (sinx + 3)' = cosx$$

Možemo zaključiti da sve sinusne funkcije plus proizvoljni stalni broj C deriviranjem daju funkciju kosinus. Određujemo familiju glavnih funkcija funkcije $cosx$ za sve stvarne brojeve C

$$cosx = (sinx + C)', C \in R$$

Definicija 1.1 Za bilo koju funkciju $F(x)$ kaže se da je ***primitivna funkcija ili antiderivacija*** *funkcije* $f(x)$ ako je $F'(x) = f(x)$.

Proces pronalaženja antiderivacija je obrnuti postupak izvođenja. Mi to nazivamo integriranje.

Definicija 1.2 ***Neodređeni integral*** funkcije $f(x)$ skup je svih $F(x) + C$ takvih da je $F'(x) = f(x)$ za proizvoljni broj C i označava se

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

gdje

znak $\int$ naziva se ***integralni simbol (neodređeni integral)***,
$f(x)$ naziva se ***podintegralna funkcija***
x naziva se ***integracijska varijabla***,

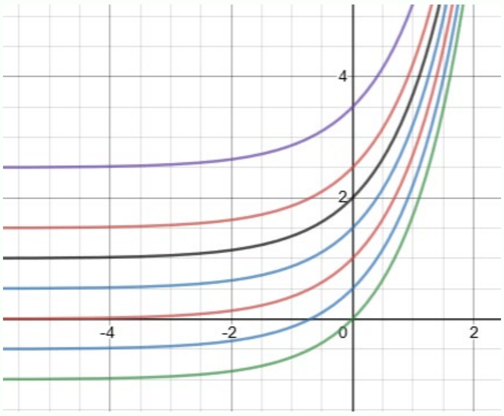
C naziva se ***konstanta integracije***.

Gore navedeni primjer može se napisati

$$\int cosx\, dx = sinx + C$$

7.1.2 Geometrijska interpretacija neodređenog integrala

Poznavajući geometrijsko značenje derivacije funkcije, zadana funkcija izražava brzinu promjene neke primarne funkcije. Geometrijsko rješenje integracije $f(x)$ predstavlja skup grafova koji u potpunosti pokrivaju ravninu. Na primjer, predstavnici cijele familije antiderivacija $F(x) = e^x + C$ prikazani su na slici 7.1.



Slika 7.1 Familija antiderivacija $F(x) = e^x + C$

Možemo dobiti jednu određenu funkciju skupa odgovora ako je zadan neki početni uvjet: to jest, imamo koordinate točke koja pripada krivulji.

Primjer 2.1 Pronađi funkciju $\omega(x)$ čija brzina promjene je $\omega'(x) = cosx$ i točka (0,2) pripada grafu funkcije.

Rješenje Riješit ćemo ovaj problem u dva koraka.

Korak 1. Pronalaženje antiderivacije funkcije $cosx$

$$\omega(x) = \int cosx\, dx = sinx + C$$

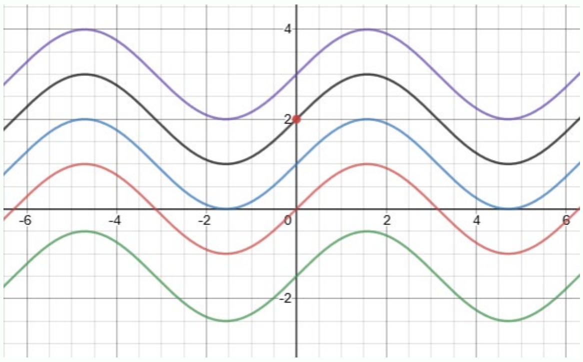
Korak 2. Izračunati određenu vrijednost konstante C prema vrijednosti funkcije u točki $(0,2)$

$$\omega(0) = sin0 + C = C$$

$$\omega(0) = 2;\ \ C = 2$$

Odgovor $\omega(x) = sinx + 2$.

Graf ove funkcije pripada familiji funkcija $\omega(x) = sinx + C$. (Slika 7.2)



Slika 7.2 Familija funkcija $\omega(x) = sinx + C$

Primjer 2.2 Baklja se izbacuje okomito prema gore od tla brzinom od 15 m/s. Pronađite visinu baklje nakon 2.5 s.

Komentar U rješenju ovog problema pretpostavljamo da nije teško primijeniti antiderivaciju kako bi se pronašla funkcija koja daje $-9.8t + 15$

Rješenje Brzina određenog objekta može se izraziti u ovisnosti o vremenu

$$v(t) = -9.8t + C$$

U početnom trenutku brzina je 15 m/s ($t = 0$). Izračunali smo $C = 15$.
Funkcija brzine u danom slučaju je $v(t) = -9.8t + 15$.
Da bismo pronašli visinu baklje $s(t)$, integriramo funkciju brzine

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (-9.8t + 15)dt =$$
$$= -4.9t^2 + 15t + C$$

Dakle, na početnom položaju $t = 0,\ s = 0$ kad je $C = 0$. Izračunavamo visinu baklje nakon 2.5 sekunde

$$s(2.5) = -4.92.5^2 + 15 \cdot 2.5 = 6.875\ m$$

7.1.3 Jedinstvenost antiderivacija

Postavlja se pitanje u potrazi za antiderivacijama zadane funkcije $f(x)$. Koliko se te antiderivacije razlikuju jedna od drugih? Slijedeći teorem kaže:

Teorem 2.1

Ako su funkcije $F_1(x)$ i $F_2(x)$ dvije različite antiderivacije funkcije $f(x)$, razlikuju se samo u konstantnom broju.

Ako je $[F_1(x)]' = f(x)$ i $[F_2(x)]' = f(x)$. Onda je razlika

$$[F_1(x)]' - [F_2(x)]' = 0 \text{ ili } [F_1(x) - F_2(x)]' = 0.$$

Zaključujemo da je $F_1(x) - F_2(x) = C$.

7.1.4 Vježbe

Koristeći tablicu elementarnih derivacija, nađite antiderivaciju f zadane funkcije f' prema početnim uvjetima. Konstruirajte graf funkcije f.

1. $f'(x) = 3x^2;\quad f(0) = 1$

2. $f'(x) = e^x;\quad f(1) = e$

3. $f'(x) = \dfrac{1}{2x};\quad f(1) = 1.5$

4. $f'(x) = 2\sin x\,;\quad f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -0.75$

5. $f'(x) = 4x - 3;\quad f(1) = 1$

6. Automobil sa mjesta kreće s ubrzanjem $a(t) = 2t - 5\ {}^{m}/_{s^2}$. Pronađite funkciju brzine automobila!

7.1.5 Rješenja

Rješenje zadatka 1. U tablici derivacija piše

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Kako je $f'(x) = 3x^2$, za $n = 3$ vrijedi $(x^3)' = 3x^2$, odnosno

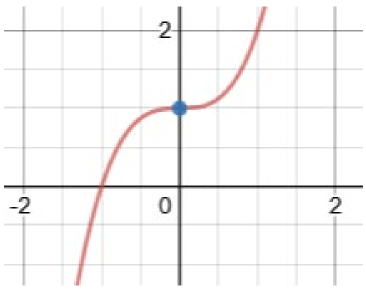
$$\int f'(x)dx = \int 3x^2dx = x^3 + C$$

Primjena početnog uvjeta $x = 0;\ \ y = 1$

$$0 + C = 1;\quad C = 1$$

Odgovor

$$f(x) = x^3 + 1$$



Slika 7.3 Funkcija $f(x) = x^3 + 1$ koja prolazi kroz točku (0,1)

Rješenje zadatka 2. Vrijedi formula

$$(e^x)' = e^x$$

pa je

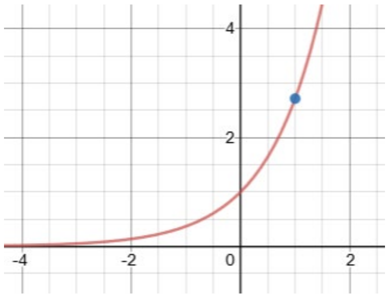
$$\int e^x dx = e^x + C$$

Primjenom početnog uvjeta $x = 1;\ \ y = e$

$$e^1 + C = e; \quad C = 0$$

Odgovor

$$f(x) = e^x$$



Slika 7.4 Funkcija $f(x) = e^x$ koja prolazi kroz točku (1,e).

Rješenje zadatka 3. Imamo formule

$(lnx)' = \frac{1}{x}$ a znamo da je $(af(x))' = a(f(x))'$, gdje je a konstanta.

Zatim

$$\left(\frac{1}{2}lnx\right)' = \frac{1}{2}(lnx)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

Integriranjem dobijemo

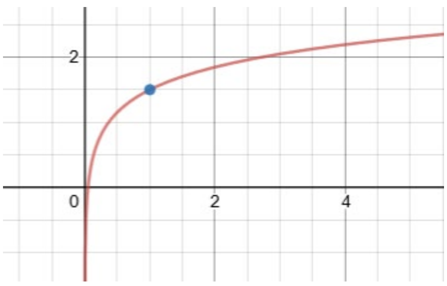
$$\int \frac{1}{2x}dx = \frac{lnx}{2} + C$$

Primjenom početnog uvjeta $x = 1;\ \ y = 1.5$

$$\frac{ln1}{2} + C = 0 + C = 1.5; \quad C = 1.5$$

Odgovor

$$f(x) = \frac{lnx}{2} + 1.5$$



Slika 4.3 Funkcija $f(x) = \frac{lnx}{2} + 1.5$ koja prolazi kroz točku (1,1.5).

Rješenje zadatka 4. Imamo formulu

$$(cosx)' = -sinx$$

Koristeći integral dobivamo

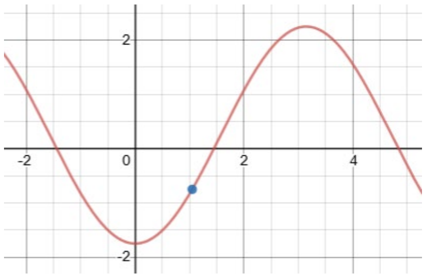
$$\int 2sinx\,dx = 2\int sinx\,dx = -\,2cosx + C$$

Primjenom početnog uvjeta $x = \frac{\pi}{3};\ \ y = -0.75$

$$-2cos\frac{\pi}{3} + C = -2\cdot\frac{1}{2} + C = -0.75;\quad C = 0.25$$

Odgovor

$$f(x) = -2cosx + 0.25$$



Slika 4.4 Funkcija $f(x) = -2cosx + 0.25$ koja prolazi kroz točku $\left(\frac{\pi}{3}, -0.75\right)$.

Rješenje zadatka 5. Znamo da

$$(x^2)' = 2x;\quad (3x)' = 3$$

i

$$(2x^2 - 3x)' = 2(x^2)' - (3x)' = 4x - 3$$

Koristeći integral dobivamo

$$\int (4x - 3)dx = 2x^2 - 3x + C$$

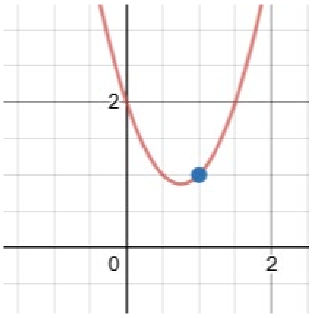
Primjenom početnog uvjeta $x = 1;\ \ y = 1$

$$2 - 3 + C = 1;\quad C = 2$$

Odgovor

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$



Slika 4.5 Funkcija $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ koja prolazi kroz točku (1,1).

Rješenje zadatka 6. Automobil kreće s ubrzanjem $a(t) = 2t - 5\ {}^{m}/_{s^2}$. Određujemo funkciju brzine automobila.

Odgovor

Brzina se može odrediti

$$v(t) = \int a(t)dt$$

Primjenjujući formulu derivacije funkcije, možemo otkriti da se izraz $2t - 5$ može izvesti iz; $2t$ iz funkcije t^2 i 5 iz $5t$. Zato je antiderivacija

$$F(t) = t^2 - 5t$$

Općenito, $v(t) = t^2 - 5t + C$

Na početku $t = 0, v(0) = 0$, kad je $C = 0$. Stoga je funkcija brzine

$$v(t) = t^2 - 5t$$

Ova jednadžba pomaže u određivanju brzine automobila nakon nekog vremenskog perioda, npr. nakon 10 sekundi

$$v(10) = 100 - 50 = 50\, m/s$$

7.2 Osnovna pravila integriranja

DETALJAN OPIS:

U ovom se poglavlju uvode osnovne formule integriranja elementarnih funkcija i glavna svojstva neodređenih integrala. U poglavlju se objašnjava kako se, koristeći već poznata pravila deriviranja, određuju formule integriranja. Isto je prikazano u nekoliko primjera s objašnjenjima. Dane su i vježbe za individualno savladavanje metode integriranja. Na kraju poglavlja nalazi se primjer kako provjeriti točnost rješenja nekog neodređenog integrala.

Cilj: **Naučiti osnovne formule i svojstva integrala; kada i kako koristiti neku od metoda integriranja**

Ishodi učenja:

1. Savladati osnovne formule integriranja.
2. Primijeniti svojstva neodređenih integrala.
3. Računati integrale elementarnih funkcija.
4. Transformirati podintegralne funkcije ako je potrebno.

Prethodno znanje: pravila deriviranja; značenje pojma antiderivacije; algebarske i trigonometrijske formule za transformaciju integranda.

Odnos prema stvarnim pomorskim problemima: Poznavanje neodređenih integrala koristi se u računanju određenih integrala. Deriviranje i integriranje koriste se pri rješavanju različitih inženjerskih problema počevši od same konstrukcije plovila tj. u brodogradnji, npr. da bi se odredila krivulja trupa plovila, kao i površina ispod trupa; stabilnost plovila, ... Praktična primjena integrala dio je teorije navigacije; npr. integrali se koriste u dizajniranju Mercatorove karte. Derivacije i integrali pomogli su poboljšati razumijevanje koncepta Zemljine reljefnosti: određivanju najkraćeg puta plovidbe, posebice pri velikim udaljenostima kako bi plovila došla do određene lokacije. Linije ekvatora i meridijana kao jedne od linija velikog kruga površine Zemlje, istodobno su i ortodrome i loksodrome.

Sadržaj

1. Formule integriranja
2. Popis osnovnih integracijskih formula
3. Svojstva neodređenih integrala
4. Transformacija podintegralne funkcije
5. Zadatci
6. Rješenja zadataka
7. Dodatna napomena

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.2.1 Formule integriranja

Shvaćajući da je integriranje obrnuti postupak deriviranja, napisat ćemo osnovne formule integrala. Bilo koja formula

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

može se dokazati derivacijom – izvedenica funkcije na desnoj strani formule mora biti jednaka podintegralnoj funkciji:

$$\frac{d(F(x)+C)}{dx} = f(x)$$

Na primjer, dokažimo formulu

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

Izvedenica desne strane formule

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' + C' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n + 0 = x^n$$

Posebni slučaj $n = -1$ daje drugu formulu

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = lnx + C$$

7.2.2 Popis osnovnih formula integriranja

Popis osnovnih formula deriviranja se ne odnosi na sve elementarne funkcije. Stoga ni osnovni popis formula integriranja ne sadrži integrale nekih osnovnih elementarnih funkcija (logaritamske funkcije, tangensa, kotangensa, arkus funkcija).

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$

3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

6. $\int sinx\, dx = -cosx + C$

7. $\int cosx\, dx = sinx + C$

8. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -cotx + C$

9. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tanx + C$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctanx + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C$

Obično je ovaj popis dopunjen dodatnim formulama koje se odnose na hiperboličke funkcije, ciklometrijske ili inverzne trigonometrijske funkcije i integrale sličnog oblika:

12. $\int sinhx\, dx = coshx + C$

13. $\int coshx\, dx = sinhx + C$

14. $\int \frac{dx}{sinh^2x} = -cothx + C$

15. $\int \frac{dx}{cosh^2x} = tanhx + C$

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctan \frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C$

18. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Naravno da osnovne formule vrijede i za druge zadane varijable, bilo da je zadana varijabla t; ω; s ili neka druga. Npr., sljedeće formule su istinite, kao što je istinita formula 6:

$$\int sint\, dt = -cost + C \text{ ili } \int sin\omega\, d\omega = -cos\omega + C$$

7.2.3 Svojstva neodređenih integrala

Pogledajmo najčešća svojstva integrala.

Svojstvo 1. Derivacija integrala jednaka je podintegralnoj funkciji

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Svojstvo 2. Integral zbroja dviju funkcija jednak je zbroju dvaju integrala danih funkcija

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Svojstvo 3. Za svaku proizvoljnu konstantu vrijedi

$$\int af(x)d = a\int f(x)dx$$

Svojstvo 4. Integral derivacije funkcije jednak je toj funkciji plus proizvoljna konstanta

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Prvo svojstvo proizlazi iz definicije neodređenog integrala. Ostala navedena svojstva mogu se dokazati na temelju prvog svojstva i pravila deriviranja.

Primjer 3.1 Izračunajte integral

$$\int (sinx + e^x)dx$$

Rješenje

Koristeći drugo svojstvo i formule 4 i 6 dobivamo

$$\int (sinx + e^x)dx = \int sinx\, dx + \int e^x dx =$$

$$= -cosx + e^x + C$$

Primjer 3.2 Izračunajte integral

$$\int \frac{5}{9+x^2}dx$$

Rješenje

Koristeći treće svojstvo i formulu 16 dobivamo

$$\int \frac{5}{9+x^2}dx = 5\int \frac{dx}{9+x^2} =$$

$$= 5\cdot\frac{1}{3}arctan\frac{x}{3} + C$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Primjer 3.3 Izračunajte integral

$$\int \left(4x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{3ln7}{x}\right) dx$$

Rješenje

$$\int \left(4x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{3ln7}{x}\right) dx = 4\int x^3 dx - 2\int x^{\frac{1}{2}} dx + 3ln7\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 4\frac{x^3}{4} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3ln7 \cdot ln|x| + C =$$

$$= x^3 - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 3ln7 \cdot ln|x| + C$$

7.2.4 Transformacija podintegralne funkcije

U većini slučajeva podintegralna funkcija je prilično komplicirana, pa su potrebne posebne tehnike integriranja. Međutim, postoje funkcije koje možemo transformirati tako da možemo koristiti osnovne formule. Pokažimo neke primjere gdje ćemo koristiti algebarske i trigonometrijske formule.

Primjer 4.1 Izračunajte integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{81 - 49x^2}}$$

Rješenje

Izraz ispod kvadratnog korijena mijenjamo da bismo primijenili osnovnu formulu integriranja 17

$$\int \frac{dx}{\sqrt{81 - 49x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{49\left(\frac{81}{49} - x^2\right)}} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{81}{49} - x^2}} = \frac{1}{7} arcsin\frac{7x}{9} + C$$

Primjer 4.2 Izračunajte integral

$$\int (2 - x)^2 dx$$

Rješenje

Proširit ćemo izraz

$$\int (2 - x)^2 dx = \int (4 - 4x + x^2) dx = 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + C$$

Primjer 4.3 Izračunajte integral

$$\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} dx$$

Rješenje

Faktoriziramo brojnik i pojednostavljujemo podintegralnu funkciju

$$\int \frac{x^2-5x+6}{x-2}dx = \int \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}dx = \int (x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

Primjer 4.4 Izračunajte integral

$$\int \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x}}dx$$

Rješenje

Ovdje koristimo svojstvo množenja i dijeljenja polinoma

$$\int \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x}}dx = \int x^{2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7}x^3 \cdot \sqrt{x} + C$$

Primjer 4.5 Izračunajte integral

$$\int cos^2\frac{x}{2}dx$$

Rješenje

Primjenom trigonometrijske formule dvostrukog kuta

$$\int cos^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1+cosx}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}sinx + C$$

Za složenije integrale koriste se posebne tehnike integriranja o kojima ćemo raspravljati u sljedećim odjeljcima.

7.2.5 Vježbe

Izračunajte sljedeće integrale koristeći osnovne formule i algebarske transformacije ako je potrebno.

1. $\int \left(6x^3 + \frac{2}{5x^3} - 12\right)dx$

2. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - x^{0.5} + \frac{4}{x}\right)dx$

3. $\int \left(3sinx + \frac{2}{sin^2x}\right)dx$

4. $\int \left(12^x - \frac{1}{cos^2x} + e^x\right)dx$

5. $\int \frac{16}{x^2+25}dx$

6. $\int \left(sinht - \frac{1}{\sqrt{t^2-64}}\right)dt$

7. $\int \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot \sqrt{x^3}}{x^{-\frac{1}{2}}}}dx$

8. $\int \frac{x^2-3x+4}{x+1}dx$

7.2.6 Rješenja

1. $\int\left(6x^3+\frac{2}{5x^3}-12\right)dx=6\int x^3dx+\frac{2}{5}\int x^{-3}dx-12\int dx=$

$$=\frac{6x^4}{4}-\frac{2}{5}\cdot\frac{x^{-2}}{2}-12x+C=1.5x^4-\frac{1}{5x^2}-12x+C$$

2. $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-x^{0.5}+\frac{4}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\int x^{-0.5}dx-\int x^{0.5}dx+4\int\frac{dx}{x}=$

$$=\frac{1}{2}\frac{x^{0.5}}{0.5}-\frac{x^{1.5}}{1.5}+4ln|x|+C=\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4ln|x|+C$$

3. $\int\left(3sinx+\frac{2}{sin^2x}\right)dx=3\int sinx\,dx+2\int\frac{dx}{sin^2x}=-3cosx-2cotx+C$

4. $\int\left(12^x-\frac{1}{cos^2x}+e^x\right)dx=\int 12^xdx-\int\frac{dx}{cos^2x}+\int e^xdx=$

$$=\frac{12^x}{ln12}-tanx+e^x+C$$

5. $\int\frac{16}{x^2+25}dx=16\int\frac{dx}{x^2+5^2}=16\cdot\frac{1}{5}arctan\frac{x}{5}+C$

6. $\int\left(sinht-\frac{1}{\sqrt{t^2-64}}\right)dt=\int sinht\,dt-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-64}}=$

$$=cosht-ln\left|t+\sqrt{t^2-64}\right|+C$$

7. $\int\sqrt[3]{\frac{x^4\cdot\sqrt{x^3}}{x^{-\frac{1}{2}}}}dx=\int\left(x^{4+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int x^{6\cdot\frac{1}{3}}dx=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$

8. $\int\frac{x^2+5x+4}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)(x+5)}{x+1}dx=\int(x+5)\,dx=$

$$=\int x\,dx+5\int dx=\frac{x^2}{2}+5x+C$$

7.2.7 Dodatna napomena

Svaki rezultat integriranja može se provjeriti deriviranjem. Na primjer, provjerimo rezultat primjera 3.2 primjenom pravila deriviranja funkcije

$$\left(5 \cdot \frac{1}{3} arctan \frac{x}{3} + C\right)' = \frac{5}{3}\left(arctan \frac{x}{3}\right)' + C' =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{9}} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{9 + x^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9 + x^2}$$

Dakle, dobivamo istu funkciju kao što je podintegralna funkcija.

7.3 Tehnike integriranja: Metoda zamjene (supstitucije)

DETALJAN OPIS:

U ovom poglavlju istražit će se metode integriranja kompozicije funkcija. Lančano pravilo deriviranja kompozicije funkcija koristit će se kao osnovni alat za integriranje. Naime, iz njega neposredno slijedi obrnuto lančano pravilo koje se koristi u rješavanju integrala. Metoda zamjene (supstitucije) može pojednostaviti zapisivanje integrala. Prikazano je nekoliko primjera. Razmatraju se integrali nekih složenih funkcija u kojima je unutarnja funkcija linearna ili nelinearna.

CILJ: **Naučiti koristiti metodu zamjene u rješavanju integrala složenih funkcija.**

Ishodi učenja:

1. Studenti će usvojiti tehniku integriranja metodom zamjene.
2. Studenti će moći provesti integriranje zamjenom.
3. Studenti će prepoznati da je metoda zamjene korisna u rješavanju integrala složene funkcije.

Prethodno znanje: pravila deriviranja i integriranja, osnovne formule deriviranja i integriranja, algebarske formule, poznavanje elementarne matematike

Povezanost s problemima u pomorstvu: Poznavanje neodređenih integrala koristi se u računanju određenih integrala. Deriviranje i integriranje koriste se pri rješavanju različitih inženjerskih problema počevši od same konstrukcije plovila tj. u brodogradnji, npr. da bi se odredila krivulja trupa plovila, kao i površina ispod trupa; stabilnost plovila, ... Praktična primjena integrala dio je teorije navigacije; npr. integrali se koriste u dizajniranju Mercatorove karte. Derivacije i integrali pomogli su poboljšati razumijevanje koncepta Zemljine reljefnosti: određivanju najkraćeg puta plovidbe, posebice pri velikim udaljenostima kako bi plovila došla do određene lokacije. Linije ekvatora i meridijana kao jedne od linija velikog kruga površine Zemlje, istodobno su i ortodrome i loksodrome.

Sadržaj

1. Integriranje kompozicije funkcije
2. Obrnuto lančano pravilo
3. Primjena obrnutog lančanog pravila
4. Promjena diferencijala argumenta
5. Metoda zamjene (supstitucije)
6. Primjeri
7. Zadatci
8. Rješenja zadataka

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.3.1 Integriranje kompozicije funkcija

U prethodnim odjeljcima smo rješavali integrale čije su podintegralne funkcije jednostavne elementarne funkcije. Postavlja se pitanje kako izračunati integral ako podintegralni izraz sadrži kompoziciju funkcija.

Kompozicija dviju funkcija je funkcija sastavljena od dvije funkcije pri čemu je jedna od tih funkcija argument druge. Tako je npr. funkcija

$$h = f \circ g$$

kompozicija funkcija g i f, a definirana je formulom

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big),$$

tj. kod te funkcije je $g(x)$ argument funkcije f.

Kažemo da je funkcija g unutarnja, a funkcija f vanjska funkcija kompozicije $h = f \circ g$.

Primjeri kompozicija funkcija

1)

$$h(x) = \sin 3x\,, \qquad g(x) = 3x, \qquad f(x) = \sin x$$

2)

$$h(x) = \cos(x^2)\,, \qquad g(x) = x^2, \qquad f(x) = \cos x$$

3)

$$h(x) = e^{\tan x}, \qquad g(x) = \tan x\,, \qquad f(x) = e^x$$

4)

$$h(x) = (6x + 7)^{13}, \qquad g(x) = 6x + 7, \qquad f(x) = x^{13}$$

7.3.2 Obrnuto lančano pravilo

Prisjetimo se ***lančanog pravila*** za derivaciju kompozicije funkcija.

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Iz njega direktno slijedi tzv. obrnuto lančano pravilo:

$$\int f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) dx = f\big(g(x)\big) + C.$$

Primjer:

$$\int \cos(x^2) \cdot 2x dx = \sin(x^2) + C$$

U tom primjeru je

$$g(x) = x^2, \qquad f(x) = \sin x,$$
$$g'(x) = 2x,$$
$$f\big(g(x)\big) = \sin x^2, \qquad f'\big(g(x)\big) = \cos x^2.$$

Označavanje u primjeru možemo pojednostavniti uvođenjem zamjene $u = x^2$. Tada je

$$du = dx^2 = (x^2)' dx = 2x dx$$

pa pišemo

$$\int \cos u \, du = \sin u + C,$$

gdje je $u = x^2$.

7.3.3 Primjena obrnutog lančanog pravila

Po definiciji derivacije funkcije, za funkciju $u = u(x)$ vrijedi

$$du = u' dx$$

pa, ako znamo funkciju F takvu da je $F' = f$, obrnuto lančano pravilo možemo pisati u jednostavnijem obliku

$$\boldsymbol{\int f(u) du = F(u) + C.}$$

Stoga se popis osnovnih integrala naveden u odjeljku „Osnovna pravila integriranja“ može primijeniti i za integriranje složenih funkcija. Npr., formule

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

mogu se modificirati tako da vrijede i za integriranje kompozicije funkcija s unutarnjom funkcijom u.

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$$

Primjer 3.1

$$\int \cos^5 x \, d(\cos x)$$

Rješenje

Znamo da vrijedi:

$$\int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C.$$

Ako u toj formuli uzmemo da je $u = \cos x$, odmah dobivamo rješenje zadanog integrala tj.

$$\int \cos^5 x \, d(\cos x) = \frac{\cos^6 x}{6} + C$$

Primjer 3.2

$$\int (8 - 11x)^5 d(8 - 11x)$$

Rješenje

Primijetite da možemo primijeniti istu formulu kao u primjeru 3.1 $(u = 8 - 11x)$ pa je

$$\int (8 - 11x)^5 d(8 - 11x) = \frac{(8 - 11x)^6}{6} + C$$

Primjer 3.3

$$\int \frac{d(4^x)}{\cos^2(4^x)}$$

Rješenje

$$\int \frac{d(4^x)}{\cos^2(4^x)} = \tan(4^x) + C$$

7.3.4 Promjena diferencijala argumenta

Primjeri u prethodnom poglavlju koriste metodu integriranja u kojoj izraz pod integralom ima unutarnju funkciju kao varijablu integracije. To su jednostavni slučajevi, posebice ako je argument podintegralne funkcije f linearna funkcija $g(x) = ax + b$.

$$\int f(ax + b)dx$$

Odredimo derivaciju linearne funkcije.

$$d(ax + b) = (ax + b)'dx = a \cdot dx$$

Ako znamo da je F primitivna funkcija funkcije f, onda je

$$\boldsymbol{\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax + b)d(ax + b) = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.}$$

Primjer 4.1

$$\int \sin 7x\,dx = \frac{1}{7}\int \sin 7x\,d(7x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + C$$

Primjer 4.2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} + C$$

Primjer 4.3

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x\,dx = \int \sin^5 x\,d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

7.3.5 Metoda zamjene (supstitucije)

U općenitijem slučaju, možemo pokušati pojednostaviti integriranje kompozicije funkcija koristeći zamjenu. Npr., u integralu

$$\int x^3(0.5x^4+21)^{10}dx$$

primjećujemo vezu između unutarnje funkcije i množitelja. Množitelj x^3 je dio derivacije unutarnje funkcije $g(x) = 0.5x^4 + 21x^3$ kompozicije $h(x) = (0.5x^4+21)^{10}$.

$$(0.5x^4+21)' = 2x^3$$

Stoga pod integralom unutarnju funkciju zamjenjujemo s u.

$$\begin{aligned}\int x^3(0.5x^4+21)^{10}dx &= \frac{1}{2}\int 2x^3(0.5x^4+21)^{10}dx = \begin{vmatrix} u = 0.5x^4+21 \\ du = 2x^3dx \end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\int u^{10}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{11}}{11} + C = \frac{(0.5x^4+21)^{11}}{22} + C\end{aligned}$$

Složenu funkciju $f(u)$, gdje je $u = u(x)$, znamo integrirati ako podintegralna funkcija sadrži kao faktor derivaciju funkcije argumenta u i ako znamo primitivnu funkciju funkcije f.

$$\int f(u)u'dx = \int f(u)du$$

Takvu metodu zovemo metoda ***u-zamjene***.

Primjer 6.1

$$\int \frac{dx}{5x+2}$$

Rješenje

$$\int \frac{dx}{5x+2} = \left| \begin{matrix} u = 5x+2 \\ du = (5x+2)'dx = 5dx \end{matrix} \right|$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5} \cdot \ln|u| + C = \frac{1}{5} \cdot \ln|5x+2| + C$$

Primjer 6.2

$$\int \frac{dx}{1+16x^2}$$

Rješenje

$$\int \frac{dx}{1+16x^2} = \int \frac{dx}{1+(4x)^2} = \left| \begin{matrix} u = 4x \\ du = 4dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \frac{1}{4}\arctan u + C = \frac{1}{4}\arctan(4x) + C$$

Primjer 6.3

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

Rješenje

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{matrix} u = \tan x \\ du = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx \end{matrix} \right| = \int e^u du = e^u + C = e^{\tan x} + C$$

Primjer 6.4

$$\int \frac{tdt}{(t+1)^3}$$

Rješenje

$$\int \frac{tdt}{(t+1)^3} = \left| \begin{matrix} u = t+1; \;\; t = u-1 \\ du = dt \end{matrix} \right|$$
$$= \int \frac{u-1}{u^3} du = \int u^{-2} du - \int u^{-3} du$$
$$= \frac{u^{-1}}{-1} - \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2(t+1)^2} + C$$

7.3.6 Vježbe

Riješite integrale prikladnom zamjenom

1. $\int \cos(8\pi x)\,dx$
2. $\int \frac{dx}{(3-2x)^4}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+6)^2}}$
4. $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$
5. $\int \sqrt{x}\left(3+8x^{\frac{3}{2}}\right)dx$
6. $\int e^{\theta}\cdot\sqrt{12+e^{\theta}}d\theta$
7. $\int \cot t\,dt$
8. $\int \frac{\arctan^7 x}{1+x^2}dx$

7.3.7 Rješenja

1. $\int \cos(8\pi x)\,dx$

Rješenje

$$\int \cos(8\pi x)\,dx = \begin{vmatrix} u = 8\pi x \\ du = 8\pi dx \end{vmatrix} = \frac{1}{8\pi}\int \cos u\,du$$
$$= \frac{1}{8\pi}\sin u + C = \frac{1}{8\pi}\sin(8\pi x) + C$$

2. $\int \frac{dx}{(3-2x)^4}$

Rješenje

$$\int \frac{dx}{(3-2x)^4} = \begin{vmatrix} u = 3-2x \\ du = -2dx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^4}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{6(3-2x)^3} + C$$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+6)^2}}$

Rješenje

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+6)^2}} = \begin{vmatrix} u = x+6 \\ du = dx \end{vmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$= \arcsin u + C = \arcsin(x+6) + C$$

4. $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$

Rješenje

$$\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \begin{vmatrix} u = lnx \\ du = \frac{1}{x} dx \end{vmatrix} = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\ln^6 x}{6} + C$$

5. $\int \sqrt{x}\left(3 + 8x^{\frac{3}{2}}\right) dx$

Rješenje

$$\int \sqrt{x}\left(3 + 8x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \begin{vmatrix} u = 3 + 8x^{\frac{3}{2}} \\ du = 12\sqrt{x}dx \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \int udu$$
$$= \frac{1}{12}\frac{u^2}{2} + C = \frac{\left(3 + 8x^{\frac{3}{2}}\right)^2}{24} + C$$

6. $\int e^\theta \sqrt{12 + e^\theta} d\theta$

Rješenje

$$\int e^\theta \sqrt{12 + e^\theta} d\theta = \begin{vmatrix} u = 12 + e^\theta \\ du = e^\theta d\theta \end{vmatrix} = \int \sqrt{u}\, du$$
$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{12 + e^\theta}^3 + C$$

7. $\int \cot t\, dt$

Rješenje

$$\int \cot t\, dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \begin{vmatrix} u = \sin t \\ du = \cos t\, dt \end{vmatrix}$$
$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin t| + C$$

8. $\int \frac{\arctan^7 x}{1 + x^2} dx$

Rješenje

$$\int \frac{\arctan^7 x}{1 + x^2} dx = \begin{vmatrix} u = \arctan x \\ du = \frac{dx}{1 + x^2} \end{vmatrix} = \int u^7 du$$
$$= \frac{u^8}{8} + C = \frac{\arctan^8 x}{8} + C$$

7.4 Tehnike integriranja: parcijalna integracija

DETALJAN OPIS:

Poglavlje započinje ponavljanjem pravila o deriviranju umnoška dviju funkcija. Integriranjem te formule dobiva se formula parcijalne integracije. Primjena metode parcijalne integracije je korisna ako je podintegralna funkcija umnožak dviju funkcija posebnoga tipa. Najčešći slučajevi će se opisati i pojasniti primjerima.

Cilj: **Naučiti metodu parcijalne integracije i prepoznati tip integrala koji se može riješiti tom metodom.**

Ishodi učenja:

1. Prepoznati integrale koji se mogu riješiti parcijalnom integracijom.
2. Primijeniti metodu parcijalne integracije u svrhu izračunavanja različitih tipova integrala.

Prethodno znanje: pravila deriviranja i integriranja, osnovne formule deriviranja i integriranja, metoda zamjene, algebra, trigonometrijske formule

Povezanost s problemima u pomorstvu: Primjenom parcijalne integracije računaju se koeficijenti Fourierovog reda. Fourierovi redovi imaju široke primjene u mnogim disciplinama. Koriste se za opisivanje povremenih fizičkih pojava, npr. u obradi signala, za otkrivanje i ispravljanje izvora vibracija u mehaničkim uređajima.

Sadržaj

1. Formula parcijalne integracije
2. Posebni slučajevi
3. Primjeri
4. Višestruka primjena metode
5. Zadatci
6. Rješenja zadataka

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

7.4.1 Formula parcijalne integracije

Razmotrit ćemo metodu koja je često korisna za računanje integrala ako je podintegralna funkcija umnožak dviju funkcija.

Pretpostavimo da imamo dvije derivabilne funkcije, $u = u(x)$ i $v = v(x)$. Po ***pravilu o derivaciji umnoška*** vrijedi

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Integriranjem ove jednakosti dobivamo

$$uv = \int vu'dx + \int uv'dx.$$

Kako je $u'dx = du$ i $v'dx = dv$, slijedi

$$uv = \int vdu + \int udv,$$

odnosno

$$\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}.$$

Ova formula izražava ***metodu integriranja po dijelovima*** ili ***parcijalno integriranje***. Metoda parcijalne integracije ima smisla samo ako integral na desnoj strani formule nije složeniji od zadanog integrala.

Primjer 1.1

$$\int xe^x dx$$

Rješenje

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x; \;\; dv = e^x dx \\ du = dx; \;\; v = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Komentar. Napomenimo da se ovdje koristi formula za diferencijal funkcije $v = v(x)$:

$$dv = v'dx$$

koju moramo integrirati da bismo odredili funkciju v.

7.4.2 Posebni slučajevi

Postoje neki posebni tipovi integrala za koje možemo primijeniti gore opisanu metodu. Oni uključuju polinome čiji se stupanj smanjuje pri deriviranju. S druge strane, postoje funkcije koje ne možemo pojednostavniti deriviranjem. Na primjer, eksponencijalna funkcija $y = e^x$ se deriviranjem ne mijenja. Ova zapažanja upućuju nas na neke standardne situacije za odabir funkcije $u = u(x)$.

Slučaj 1. Podintegralna funkcija je umnožak polinoma i trigonometrijske funkcije $y = \sin x$ ili $y = \cos x$

Pri rješavanju integrala $\int P_n(x) \sin x\, dx$ uzimamo da je $u = P_n(x)$ i $dv = \sin x\, dx$

Slučaj 2. Podintegralna funkcija je umnožak polinoma i eksponencijalne funkcije $y = e^x$ ili $y = a^x$

$\int P_n(x) a^x dx$; biramo $u = P_n(x)$ i $dv = a^x dx$

Slučaj 3. Podintegralna funkcija je umnožak polinoma i logaritamske funkcije $y = \log_a x$ ili $y = \ln x$

$\int P_n(x) \log_a x\, dx$; biramo $u = \log_a x$ i $dv = P_n(x) dx$

Slučaj 4. Podintegralna funkcija je ciklometrijska funkcija $y = \arctan x$ ili $y = \arcsin x$

$\int \arcsin x\, dx$; biramo $u = \arcsin x$ i $dv = dx$

Primjer 3.1

$$\int 2x \cos x\, dx$$

Rješenje

$$\int 2x \cos x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x; \;\; dv = \cos x\, dx \\ du = 2dx; \;\; v = \int \cos x\, dx = \sin x \end{array} \right|$$
$$= 2x \sin x - \int 2 \sin x\, dx = 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

Primjer 3.2

$$\int x^3 \ln x\, dx$$

Rješenje

$$\int x^3 \ln x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x\,; \quad dv = x^3 dx \\ du = \dfrac{1}{x}dx; \;\; v = \displaystyle\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} \end{array} \right|$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

Primjer 3.3

$$\int \arctan x\, dx$$

Rješenje

$$\int \arctan x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctan x\,; \;\; dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}; \;\; v = \displaystyle\int dx = x \end{array} \right|$$

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

U općenitijim slučajevima funkcije mogu biti složene, npr. $y = \sin ax$ ili $y = \arctan ax$.

Primjer 3.4

$$\int (x+1) \sin 4x\, dx$$

Rješenje

$$\int (x+1)\sin 4x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x+1; \;\; dv = \sin 4x\, dx \\ du = dx; \;\; v = \displaystyle\int \sin 4x\, dx = -\dfrac{1}{4}\cos 4x \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{4}(x+1)\cos 4x + \frac{1}{4}\int \cos 4x\, dx = -\frac{1}{4}(x+1)\cos 4x + \frac{1}{16}\sin 4x + C$$

7.4.3 Višestruka primjena metode

Kada polinomni faktor podintegralne funkcije nije linearan, parcijalnu integraciju moramo primijeniti više puta. Ako se radi o polinomu stupnja $n \geq 2$, metodu primjenjujemo n puta jer se tako u zadnjoj primjeni dobije polinom nultog stupnja, tj. konstanta.

Primjer 4.1 Treba riješiti integral

$$\int x^3 \sin x \, dx.$$

Rješenje

Parcijalna integracija se mora primijeniti 3 puta jer podintegralna funkcija kao faktor sadrži polinom trećeg stupnja ($n = 3$).

$$\begin{aligned}
\int x^3 \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{c} u = x^3; \;\; dv = \sin x \, dx \\ du = 3x^2 dx; \;\; v = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{array} \right| \\
&= -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2; \;\; dv = \cos x \, dx \\ du = 2x dx; \;\; v = \int \cos x \, dx = \sin x \end{array} \right| \\
&= -x^3 \cos x + 3 \left(x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \right) = \left| \begin{array}{c} u = x; \;\; dv = \sin x \, dx \\ du = dx; \;\; v = -\cos x \end{array} \right| \\
&= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \left(-x \cos x + \int \cos x \, dx \right) \\
&= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C
\end{aligned}$$

Primjer 4.2

$$\int (x^2 - 3x + 7) 2^x dx$$

Rješenje

$$\begin{aligned}
\int (x^2 - 3x + 7) 2^x dx &= \left| \begin{array}{c} u = x^2 - 3x + 7; \;\; dv = 2^x dx \\ du = (2x - 3) dx; \;\; v = \int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right| \\
&= (x^2 - 3x + 7) \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \int (2x - 3) 2^x dx \\
&= \left| \begin{array}{c} u = 2x - 3; \;\; dv = 2^x dx \\ u = 2dx; \;\; v = \int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right| \\
&= (x^2 - 3x + 7) \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \left[(2x - 3) \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \int 2^x dx \right] \\
&= (x^2 - 3x + 7) \frac{2^x}{\ln 2} - (2x - 3) \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + \frac{2 \cdot 2^x}{(\ln 2)^3} + C
\end{aligned}$$

7.4.4 Vježbe

Riješite integrale

1. $\int \frac{x}{8} \sin x \, dx$

2. $\int 5x \cdot 5^x dx$

3. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

4. $\int (x^2 + 1) \cos 2x \, dx$

5. $\int \arcsin x \, dx$

7.4.5 Rješenja

1. $\int \frac{x}{8} \sin x \, dx$

Rješenje

$$\int \frac{x}{8} \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u = \frac{x}{8}, \quad dv = \sin x \, dx \\ du = \frac{1}{8} dx, \quad v = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{vmatrix}$$
$$= -\frac{x}{8} \cos x + \frac{1}{8} \int \cos x \, dx = -\frac{x}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x + C$$

2. $\int 5x \cdot 5^x dx$

Rješenje

$$\int 5x \cdot 5^x dx = \begin{vmatrix} u = 5x, \ \ dv = 5^x dx \\ du = 5dx, v = \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} \end{vmatrix}$$
$$= 5x \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{5}{\ln 5} \int 5^x dx = 5x \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{5 \cdot 5^x}{\ln^2 5} + C$$

3. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

Rješenje

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x\,, \quad dv = \dfrac{dx}{x^2} \\ du = \dfrac{1}{x} dx, \quad v = \int x^{-2} dx = -x^{-1} \end{array} \right|$$
$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

4. $\int (x^2 + 1) \cos 2x \, dx$

Rješenje

$$\int (x^2 + 1) \cos 2x \, dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 + 1, \quad dv = \cos 2x \, dx \\ du = 2xdx; \; v = \int \cos 2x \, dx = \dfrac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right|$$
$$= \frac{x^2 + 1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{x^2 + 1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

5. $\int \arcsin x \, dx$

Rješenje

$$\int \arcsin x \, dx = \left| \begin{array}{c} u = \arcsin x\,, \quad dv = dx \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad v = x \end{array} \right|$$
$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \left| \begin{array}{c} u = 1 - x^2 \\ du = -2xdx \end{array} \right|$$
$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = x \arcsin x + \sqrt{u} + C = \; x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

U drugom integralu smo koristili metodu supstitucije kako bismo pojednostavnili podintegralnu funkciju.

7.5 Neodređeni integrali: Integriranje racionalnih funkcija

DETALJAN OPIS:

U ovom poglavlju ćemo raspravljati o načinu rješavanja neodređenih integrala racionalnih funkcija. Definirat ćemo prave i neprave racionalne funkcije, pokazati kako se neprava racionalna funkcija može napisati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije te kako se prave racionalne funkcije rastavljaju na parcijalne razlomke. Prikazat će se neki jednostavniji integrali racionalnih funkcija i izvesti formule za rješavanje takvih integrala.

Što se tiče rastava na parcijalne razlomke, studenti mogu istražiti primjere koje je predstavio Symbolab (URL: https://www.symbolab.com/solver/partial-fractions-calculator). S istim softverom moguće je i provjeriti dobivena rješenja – primjenom Symbolabovog kalkulatora za integrale.

Cilj: **Naučiti tehniku integriranja racionalnih funkcija.**

Ishodi učenja:

1. Rastaviti pravu racionalnu funkciju na parcijalne razlomke.
2. Nepravu racionalnu funkciju napisati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije.
3. Riješiti integrale racionalnih funkcija.

Prethodno znanje: algebarski identiteti, dijeljenje polinoma, faktorizacija polinoma, nadopuna do potpunog kvadrata, nultočke polinoma, osnovne formule i osnovna pravila integriranja, osnovne formule i osnovna pravila deriviranja

Povezanost s problemima u pomorstvu: Neodređeni integrali koriste se u računanju određenih integrala. Deriviranje i integriranje naširoko se koriste u rješavanju mnogih inženjerskih problema. Praktična primjena integrala dio je teorije navigacije. Tako se npr. integrali koriste u dizajniranju Mercatorove karte. Derivacije i integrali pomogli su u razumijevanju koncepta Zemljine zakrivljenosti: brodovi na duljim putovanjima su morali putovati po nekoj krivulji kako bi došli do određene lokacije. Infinitezimalni račun se već dugi niz godina koristi u brodogradnji kod određivanja krivulje trupa broda, kao i površine ispod trupa.

Sadržaj

7.5.1 Racionalne funkcije, prave i neprave racionalne funkcije

Racionalna funkcija ima oblik

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}},$$

gdje su P_n i Q_m polinomi stupnja n, odnosno m.

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$$

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m$$

Ako je n manji od m, onda se racionalna funkcija f naziva ***prava racionalna funkcija***; inače se naziva ***neprava racionalna funkcija***.

Primjer 1.1

$$f(x)=\frac{2}{x+3}$$

$$g(x)=\frac{2x-1}{x^2-4}$$

$$t(x)=\frac{x+1}{x-3}$$

$$s(x)=\frac{x^2+3x-4}{x+1}$$

Funkcije f i g su prave, a funkcije t i s neprave racionalne funkcije.

7.5.2 Osnovni integrali za jednostavne slučajeve

Za bilo koje realne brojeve A, B i D, racionalne funkcije

$$f(x)=\frac{A}{x+B}$$

$$g(x)=\frac{A}{(x+B)^m}$$

$$s(x)=\frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+D}$$

već znamo integrirati primjenom formula

$$\int\frac{dx}{x+B}=\ln|x+B|+C,$$

$$\int\frac{du}{u^m}=\frac{u^{-m+1}}{-m+1}+C.$$

Integral prve funkcije je

$$\int f(x)dx = \int \frac{A}{x+B}dx = A\int \frac{dx}{x+B} = A \cdot \ln|x+B| + C$$

Integral druge funkcije rješavamo zamjenom $u = x + B$.

$$\int g(x)dx = \int \frac{A}{(x+B)^m}dx = \begin{vmatrix} u = x+B \\ du = dx \end{vmatrix} = A\int \frac{du}{u^m}$$
$$= A\frac{u^{-m+1}}{-m+1} + C = A\frac{(x+B)^{-m+1}}{-m+1} + C$$

U integralu funkcije s ćemo koristiti zamjenu $u = Ax^2 + Bx + D$ i $du = 2Ax + B$.

$$\int s(x)dx = \int \frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+D}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|Ax^2+Bx+D| + C$$

Primjer 2.1

$$\int \frac{2}{x+3}dx = 2\int \frac{dx}{x+3} = 2\ln|x+3| + C$$

Primjer 2.2

$$\int \frac{dx}{(x-1)^7} = \frac{(x-1)^{-7+1}}{-7+1} + C = \frac{-1}{6(x-1)^6} + C$$

Primjer 2.3

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+10}dx = |u = x^2+5x+10, \qquad du = (2x+5)dx| = \ln|x^2+5x+10| + C$$

U nekim slučajevima je racionalnu funkciju, prije integriranja, nužno rastaviti na parcijalne razlomke.

7.5.3 Rastav na parcijalne razlomke

Neka je zadana prava racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \qquad n < m.$$

Ako se polinom Q_m da faktorizirati, onda se funkcija f može rastaviti na jednostavnije, tzv. parcijalne razlomke. Ovdje raspravljamo o tri slučaja rastava na parcijalne razlomke.

Slučaj 1: Svi faktori nazivnika su linearni i međusobno različiti.

Slučaj 2.: Jedan od faktora nazivnika je polinom drugog stupnja s kompleksnim nultočkama.

Slučaj 3: Nazivnik sadrži linearni faktor koji se ponavlja, tj. pojavljuje se (bar jedan) linearni faktor na potenciju veću od 1.

Slučaj 1. Svi faktori nazivnika su linearni i međusobno različiti

Sljedeći primjer pokazuje da funkciju možemo lakše integrirati ako je rastavimo na parcijalne razlomke s linearnim nazivnicima.

Primjer 3.1

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx = \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}\right)dx = \int \frac{3}{x-1}dx - \int \frac{2}{x+2}dx$$
$$= 3\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

Nazivnik $Q_m(x)$ ima realne korijene $x = -a$ i $x = -b$, pa se da faktorizirati.

$$Q_m(x) = k(x+a)(x+b)$$

Racionalnu funkciju onda možemo rastaviti na parcijalne razlomke na sljedeći način.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$$

Znamo koeficijente polinoma i nultočke nazivnika ($x = -a$ i $x = -b$). Da bismo odredili vrijednosti A i B, pomnožit ćemo zadnju jednakost s $Q_m(x)$. Tako se dobije

$$P_n(x) = kA(x+b) + kB(x+a).$$

Uvrštavanjem vrijednosti $x = -a$, a zatim i $x = -b$ u taj identitet dobivaju se jednadžbe

$$P_n(-a) = kA(b-a)$$

i

$$P_n(-b) = kB(a-b).$$

Iz tih jednadžbi lako određujemo nepoznanice A i B.

$$A = \frac{P_n(-a)}{k(b-a)}$$

$$B = \frac{P_n(-b)}{k(a-b)}$$

Primjer 3.2

$$\int \frac{4x+7}{x^2+x-6}dx$$

Rješenje

<u>Prvi dio:</u> Rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke

Korak 1. Faktorizirati nazivnik.

$$x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

Korak 2. Napisati rastav na parcijalne razlomke s nepoznatim konstantama.

$$\frac{4x+7}{x^2+x-6} = \frac{4x+7}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

Korak 3. Pomnožiti zadnju jednakost s nazivnikom podintegralne funkcije.

$$4x+7 = A(x+3) + B(x-2)$$

Korak 4. Uvrštavanjem $x = 2$ u tu jednakost (koja vrijedi za svaki x) izračunati A.

$$4 \cdot 2 + 7 = A(2+3) + B(2-2)$$

$$8 + 7 = 5A$$

$$A = 3$$

Korak 5. Uvrštavanjem $x = -3$ u istu jednakost izračunati B.

$$4 \cdot (-3) + 7 = A(-3+3) + B(-3-2)$$

$$-12 + 7 = -5B$$

$$B = 1$$

Drugi dio: Integriranje

$$\int \frac{4x+7}{x^2+x-6} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = 3 \ln|x-2| + \ln|x+3| + C$$

Odgovor

$$\int \frac{4x+7}{x^2+x-6} dx = 3 \ln|x-2| + \ln|x+3| + C$$

U ***općenitijem slučaju***, nazivnik može imati više od dva linearna faktora.

$$\frac{P_n(x)}{k(x+a_1)(x+a_2) \cdot \ldots \cdot (x+a_m)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \ldots + \frac{A_m}{x+a_m}$$

Slučaj 2. Nazivnik sadrži nesvodljivi kvadrat

Ako je nazivnik $Q_m(x)$ racionalne funkcije faktoriziran na sljedeći način

$$Q_m(x) = k(x+a)(x^2+b),$$

zadanu racionalnu funkciju možemo rastaviti na parcijalne razlomke

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+D}{x^2+b}$$

Slično tome, zapisujemo

$$P_n(x) = kA(x^2+b) + kBx(x+a) + kD(x+a)$$

ili, s obzirom na to da stupanj polinoma ne prelazi 2

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = kA(x^2 + b) + kBx(x + a) + kD(x + a)$$

Po definiciji, polinomi su jednaki samo ako su istog stupnja i svi odgovarajući koeficijenti su im jednaki.

Stoga, možemo napisati sustav jednadžbi i izračunati nepoznate konstante A, B i D.

$$\begin{cases} a_0 = kA + kB \\ a_1 = kBa + kD \\ a_2 = kAb + kDa \end{cases}$$

Primjer 3.3

$$\int \frac{4x^2 + 2x - 3}{(x-2)(x^2+1)} dx$$

Rješenje

<u>Prvi dio:</u> Rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke

Korak 1. Napisati parcijalne razlomke s nepoznatim konstantama.

$$\frac{4x^2 + 2x - 3}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + D}{x^2 + 1}$$

Korak 2. Pomnožiti zadnju jednakost s nazivnikom podintegralne funkcije.

$$4x^2 + 2x - 3 = A(x^2 + 1) + Bx(x - 2) + D(x - 2)$$

Korak 3. Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije napisati sustav jednadžbi.

$$\begin{cases} 4 = A + B \\ 2 = -2B + D \\ -3 = A - 2D \end{cases}$$

Korak 4. Izraziti npr. A iz prve jednadžbe pa dobiveni izraz uvrstiti u treću jednadžbu. Tako se dobije sustav dviju jednadžbi s nepoznanicama B i D.

$$A = 4 - B$$

$$-3 = 4 - B - 2D$$

$$\begin{cases} 2 = -2B + D \\ -7 = -B - 2D \end{cases}$$

Korak 5. Pomnožiti prvu jednadžbu sustava s 2 i zbrojiti jednadžbe.

$$-3 = -5B; \quad B = 0.6$$

Korak 6. Izračunati A i D.

$$A = 4 - 0.6 = 3.4$$

$$D = 2 + 2B = 2 + 1.2 = 3.2$$

<u>Drugi dio:</u> Integriranje

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+2x-3}{(x-2)(x^2+1)}dx &= \int \left(\frac{3.4}{x-2}+\frac{0.6x+3.2}{x^2+1}\right)dx\\ &= \int \frac{3.4}{x-2}dx + 0.3\int \frac{2xdx}{x^2+1} + 3.2\int \frac{dx}{x^2+1}\\ &= 3.4\ln|x-2| + 0.3\ln|x^2+1| + 3.2\arctan x + C\end{aligned}$$

Odgovor

$$\int \frac{4x^2+2x-3}{(x-2)(x^2+1)}dx = 3.4\ln|x-2| + 0.3\ln|x^2+1| + 3.2\arctan x + C$$

Slučaj 3. Nazivnik sadrži ponovljeni linearni faktor

Ako je nazivnik $Q_m(x)$ racionalne funkcije faktoriziran

$$Q_m(x) = k(x+a)^m = k(x+a)\cdot(x+a)\cdot\ldots\cdot(x+a),$$

možemo rastaviti zadani racionalni izraz na parcijalne razlomke

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x+a)^m}$$

Da bismo izračunali nepoznate konstante $A_1 A_2 A_m$, ..., možemo koristiti istu metodu kao u slučaju 2.

Primjer 3.4.

$$\int \frac{x^2-x-4}{(x-1)^3}dx$$

Rješenje

<u>Prvi dio:</u> Rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke

Korak 1. Napišite parcijalne razlomke s nepoznatim konstantama

$$\frac{x^2-x-4}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

Korak 2. Pomnožite sa zajedničkim nazivnikom i izjednačite brojnike

$$x^2-x-4 = A(x-1)^2 + B(x-1) + D$$

$$x^2-x-4 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + D$$

Korak 3. Napišite sustav jednadžbi

$$\begin{cases} 1 = A \\ -1 = -2A + B \\ -4 = A - B + D \end{cases}$$

Korak 4. Izračunajte *B* i *D*

$$B = -1 + 2 = 1$$

$$D = -4 - 1 + 1 = -4$$

<u>**Drugi dio:**</u> Integriranje

$$\int \frac{x^2 - x - 4}{(x-1)^3} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{(x-1)^3} \right) dx =$$
$$= ln|x-1| - (x-1)^{-1} - 4\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C$$

Odgovor

$$\int \frac{x^2 - x - 4}{(x-1)^3} dx = ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + C$$

7.5.4 Izračun nepravilnih racionalnih funkcija

Nepravilna racionalna funkcija može se izraziti kao polinom plus prava racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

gdje polinom $T_{n-m}(x)$ ima stupanj $n-m$ i $n \geq m$; $k < m$. Potrebno je izvršiti ***dugu podjelu polinoma*** kako bi se dobio ovaj rezultat.

Primjer 4.1.

$$\int \frac{4x^3 - 12x + 16}{x-2} dx$$

Rješenje

Korak 1. Podijelite polinome

$$\begin{array}{l} (4x^3 - 12x + 16) : (x-2) = 4x^2 + 8x + 4 \\ \underline{-(4x^3 - 8x^2)} \\ \quad 8x^2 - 12x + 16 \\ \quad \underline{-(8x^2 - 16x)} \\ \qquad 4x + 16 \\ \qquad \underline{-(4x - 8)} \\ \qquad\quad 24 \end{array}$$

Korak 2. Integrirajte korak po korak

$$\int \frac{4x^3 - 12x + 16}{x-2} dx = \int \left(4x^2 + 8x + 4 + \frac{24}{x-2} \right) dx =$$
$$\int 4x^2 dx + \int 8x dx + \int 4 dx + \int \frac{24}{x-2} dx =$$
$$= \frac{4x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + 4x + 24ln|x-2| + C$$

Odgovor

$$\int \frac{4x^3 - 12x + 16}{x-2} dx = \frac{4x^3}{3} + 4x^2 + 4x + 24ln|x-2| + C$$

7.5.5 Sažetak

Za procjenu integrala racionalne funkcije preporučuju se sljedeći koraci:

Početni korak. Procijenite zadanu racionalnu funkciju $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$

Slučaj 1. Zadana funkcija je nepravilna racionalna funkcija ($n \geq m$)

Korak 1.1. Izvršite dugu podjelu polinoma

Korak 1.2. Zapisati integral kao integral polinoma plus pravi racionalni dio

Korak 1.3. Integrirajte polinom

Korak 1.4. Za integriranje pravog racionalnog dijela dopuniti slučaj 2 ako je potrebno ili odmah integrirati

Slučaj 2. Zadana funkcija je prava racionalna funkcija ($n < m$)

Korak 2.1. Ako je potrebno, faktorizirajte nazivnik

Korak 2.2. Dovršite rastavljanje na parcijalne razlomke

Korak 2.3. Integrirajte jednostavne racionalne razlomke

Komentar. Postoje dvije metode kako dovršiti korak 2.2. Možemo dodati korisne vrijednosti varijable *x* u polinomnu jednadžbu (vidi primjer 3.2.) ili možemo izjednačiti koeficijente dvaju jednakih polinoma (vidi primjere 3.3. i 3.4.) ili možemo kombinirati obje metode.

Primjer 5.1.

$$\int \frac{x^4 + 12x - 6}{x^2(x-1)} dx$$

Rješenje

Slijedimo gore navedeni akcijski plan. Imamo **slučaj 1** (zadana funkcija je nepravilna racionalna funkcija) i završavamo **korak 1.1**

$$\begin{array}{l}
(x^4 + 12x - 6) : (x^3 - x^2) = x + 1 \\
\underline{-(x^4 - x^3)} \\
\qquad x^3 + 12x - 6 \\
\qquad \underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad\qquad x^2 + 12x - 6
\end{array}$$

Korak 1.2.

$$\int \frac{x^4 + 12x - 6}{x^2(x-1)} dx = \int \left(x + 1 + \frac{x^2 + 12x - 6}{x^2(x-1)} \right) dx$$

Korak 1.3.

$$\int\left(x+1+\frac{x^2+12x-6}{x^2(x-1)}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^2+12x-6}{x^2(x-1)}dx$$

Primjenjujemo **korak 2.2**.

$$\frac{x^2+12x-6}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$

Primijenimo metodu "plug-in". Riješite se svih nazivnika i napišite jednadžbu

$$x^2+12x-6=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

Možemo koristiti korijene nazivnika $x=0$ i $x=1$. Odaberite konstantu $x=-1$.

Ako je $x=0$ dobijemo jednadžbu

$$-6=-B;\quad B=6$$

Ako je $x=1$ dobijemo jednadžbu

$$1+12-6=C;\quad C=7$$

Ako je $x=-1$ dobijemo jednadžbu

$$1-12-6=A(-1)(-2)+B(-2)+C$$

$$A=-6$$

Dobivamo jednostavne racionalne razlomke i možemo ih integrirati

$$\frac{x^2+12x-6}{x^2(x-1)}=\frac{-6}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{7}{x-1}$$

$$\int\left(\frac{-6}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{7}{x-1}\right)dx=-6ln\,|x|+6\frac{x^{-1}}{-1}+7ln|x-1|+C$$

Odgovor

$$\int\frac{x^4+12x-6}{x^2(x-1)}dx=\frac{x^2}{2}+x-6ln|x|-\frac{6}{x}+7ln|x-1|+C$$

7.5.6 Vježbe

Riješite sljedeće neodređene integrale racionalnih funkcija

1. $\int \frac{dx}{1+7x}$
2. $\int \frac{2}{(x-1)(x+2)}dx$
3. $\int \frac{x-1}{x(x-2)(x-3)}dx$
4. $\int \frac{x}{4-x^2}dx$
5. $\int \frac{x+6}{x^2-8x}dx$
6. $\int \frac{x+5}{x^2-4x-12}dx$
7. $\int \frac{2x}{x^2-4x+20}dx$
8. $\int \frac{2x+1}{x^2(x+2)}dx$
9. $\int \frac{3}{x(1+x^2)}dx$
10. $\int \frac{3x}{x+1}dx$
11. $\int \frac{x^3}{x(x+3)}dx$

7.5.7 Rješenja

1. $\int \frac{dx}{1+7x}$

Rješenje

$$\int \frac{dx}{1+7x} = \frac{1}{7}\int \frac{d(7x)}{1+7x} = \frac{1}{7} ln|1+7x| + C$$

2. $\int \frac{2}{(x-1)(x+2)}dx$

Rješenje

Rastavimo na parcijalne razlomke

$$\frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$
$$2 = A(x+2) + B(x-1)$$
$$x = 1; \quad 2 = A \cdot 3; \quad A = \frac{2}{3}$$
$$x = -2; \quad 2 = B \cdot (-3); \quad B = \frac{-2}{3}$$
$$\frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+2}$$

Dobivamo jednostavne racionalne razlomke i možemo ih integrirati

$$\int \frac{2}{(x-1)(x+2)}dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= \frac{2}{3} ln|x-1| - \frac{2}{3} ln|x+2| + C$$

3. $\int \frac{x-1}{x(x-2)(x-3)}dx$

Rješenje

Rastavimo na parcijalne razlomke

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$
$$x-1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$
$$x = 0;\ \ -1 = A(-2)(-3);\ \ A = -\frac{1}{6}$$
$$x = 2;\ \ 1 = B \cdot 2 \cdot (-1);\ \ B = -\frac{1}{2}$$
$$x = 3;\ \ 2 = C \cdot 3;\ \ C = \frac{2}{3}$$

Izračunajmo integral

$$\int \frac{x-1}{x(x-2)(x-3)}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-3} =$$
$$= -\frac{1}{6}ln|x| - \frac{1}{2}ln|x-2| + \frac{2}{3}ln|x-3| + C$$

4. $\int \frac{x}{4-x^2}dx$

Rješenje

Faktorizirajmo nazivnik

$$\frac{x}{4-x^2} = \frac{x}{(2-x)(2+x)}$$

Rastavimo na parcijalne razlomke

$$\frac{x}{(2-x)(2+x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x}$$
$$x = A(2+x) + B(2-x)$$
$$x = 2;\ \ 2 = A \cdot 4;\ \ A = \frac{1}{2}$$
$$x = -2;\ \ -2 = B \cdot 4;\ \ B = -\frac{1}{2}$$

Izračunajmo integral

$$\int \frac{x}{4-x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2-x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2+x} = -\frac{1}{2}ln|2-x| - \frac{1}{2}ln|2+x| + C$$

Komentar

$$\int \frac{dx}{2-x} = -\int \frac{dx}{x-2} = -ln|x-2| + C = -ln|2-x| + C$$

5. $\int \frac{x+6}{x^2-8x}dx$

Rješenje

Faktorizirajmo nazivnik

$$\frac{x+6}{x^2-8x} = \frac{x+6}{x(x-8)}$$

Rastavimo na parcijalne razlomke

$$\frac{x+6}{x(x-8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-8}$$
$$x+6 = A(x-8) + Bx$$
$$x = 0;\ \ 6 = A \cdot (-8);\ \ A = -\frac{3}{4}$$
$$x = 8;\ \ 14 = B \cdot 8;\ \ B = \frac{7}{4}$$

Izračunajmo integral

$$\int \frac{x+6}{x^2-8x}dx = -\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x-8} = -\frac{3}{4}ln|x| + \frac{7}{4}ln|x-8| + C$$

6. $\int \frac{x+5}{x^2-4x-12}dx$

Rješenje

Faktorizirajmo nazivnik

$$\frac{x+5}{x^2-4x-12} = \frac{x+5}{(x-6)(x+2)}$$

Rastavimo na parcijalne razlomke

$$\frac{x+5}{(x-6)(x+2)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+2}$$
$$x+5 = A(x+2) + B(x-6)$$
$$x = 6;\ \ 11 = A \cdot 8;\ \ A = \frac{11}{8}$$
$$x = -2;\ \ 3 = B \cdot (-8);\ \ B = -\frac{3}{8}$$

Izračunajmo integral

$$\int \frac{x+5}{x^2-4x-12}dx = \frac{11}{8}\int \frac{dx}{x-6} - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= \frac{11}{8}ln|x-6| - \frac{3}{8}ln|x+2| + C$$

7. $\int \frac{2x}{x^2-4x+20}dx$

Rješenje

Ovdje ne možemo faktorizirati nazivnik. Koristit ćemo drugi pristup: zamjenu.

Konstrirajmo jednostavne racionalne razlomke koje možemo integrirati

$$\frac{2x}{x^2-4x+20} = \frac{2x-4+4}{x^2-4x+20} = \frac{2x-4}{x^2-4x+20} + \frac{4}{x^2-4x+20}$$

Integriramo:

$$\int \frac{2x}{x^2-4x+20}dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+20}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4x+20} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} za\ prvi\ integral & za\ drugi\ integral \\ u = x^2-4x+20; & u = x-2;\ \ x^2-4x+4+16 = u^2+16 \\ du = (2x-4)dx & du = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u} + 4\int \frac{du}{u^2+16} = ln|u| + 4\cdot\frac{1}{4}arctan\frac{u}{4} + C =$$
$$= ln|x^2-4x+20| + arctan\frac{x-2}{4} + C$$

8. $\int \frac{2x+1}{x^2(x+2)}dx$

Rješenje

Rastavimo na parcijalne razlomke

$$\frac{2x+1}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\begin{gathered} 2x+1 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2 \\ x=0; \quad 1 = 2B; \quad B = 0.5 \\ x=-2; \quad -4+1 = 4C; \quad C = -0.75 \\ x=-1; \quad -2+1 = -A+B+C; \\ -1 = -A-0.25; \quad A = 0.75 \end{gathered}$$

Dobivamo jednostavne racionalne razlomke koje možemo integrirati

$$\int \frac{2x+1}{x^2(x+2)}dx = 0.75\int \frac{dx}{x} + 0.5\int \frac{dx}{x^2} - 0.75\int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= 0.75ln|x| - 0.5\frac{1}{x} - 0.75ln|x+2| + C$$

9. $\int \frac{3}{x(1+x^2)}dx$

Rješenje

Rastavimo na parcijalne razlomke

$$\frac{3}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$
$$3 = A(1+x^2) + Bx^2 + Cx$$
$$x = 0;\ \ 3 = A$$

Za ostale koeficijente stvaramo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \end{cases};\quad B = -3$$

Integriramo

$$\int \frac{3}{x(1+x^2)}dx = 3\int \frac{dx}{x} - 3\int \frac{xdx}{1+x^2} =$$
$$= 3ln|x| - 1.5\int \frac{2xdx}{1+x^2} = 3ln|x| - 1.5ln(1+x^2) + C$$

10. $\int \frac{3x}{x+1}dx$

Rješenje

Podintegralna funkcija je neprava racionalna funkcija. Transformirat ćemo je na sljedeći način

$$\frac{3x}{x+1} = 3\frac{x+1-1}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$$

Integriramo

$$\int \frac{3x}{x+1}dx = 3\int dx - 3\int \frac{dx}{x+1} = 3x - 3ln|x+1| + C$$

11. $\int \frac{x^3}{x(x+3)}dx$

Rješenje

Pojednostavljujemo izraz, a zatim dijelimo polinome

$$\frac{x^3}{x(x+3)} = \frac{x^2}{x+3}$$

$$\begin{array}{l} x^2 : (x+3) = x - 3 \\ \underline{-(x^2 + 3x)} \\ \quad -3x \\ \quad \underline{-(-3x - 9)} \\ \qquad\quad 9 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{x+3} = x - 3 + \frac{9}{x+3}$$

Integriramo

$$\int \frac{x^3}{x(x+3)}dx = \int \frac{x^2}{x+3}dx = \int xdx - 3\int dx + 9\int \frac{dx}{x+3} = \frac{x^2}{2} - 3x + 9ln|x+3| + C$$

7.6 Tehnike integriranja: Integriranje trigonometrijskih funkcija

DETALJAN OPIS:

Trigonometrijskim funkcijama mogu se opisati različiti titrajni procesi. Istraživanje takvih procesa zahtijeva izračunavanje integrala gdje su podintegralne funkcije kompozicije funkcija. Trigonometrijski identiteti korisni su za modificiranje ovakvih integrala. U ovom će se poglavlju predstaviti primjena trigonometrijskih formula i odgovarajuća zamjena za rješavanje integrala. Dodatno će se uvesti metoda trigonometrijske supstitucije.

Cilj: **Naučiti koristiti trigonometrijske identitete i posebne slučajeve zamjene trigonometrijskih podintegralnih funkcija.**

Ishodi učenja:

1. Studenti će moći rješavati integrale trigonometrijskih funkcija primjenjujući neke trigonometrijske identitete.
2. Studenti će znati primijeniti trigonometrijsku zamjenu.

Prethodno znanje: pravila integriranja i deriviranja; metode zamjene kod integrala; algebarske i trigonometrijske formule.

Odnos prema stvarnim pomorskim problemima: trigonometrijski integrali korisni su za opisivanje i rješavanje različitih problema na sinusoidnim procesima – npr. za konstruiranje lopatica brodskog propelera ili za izračunavanje otpora valova pri plovnosti broda.

Sadržaj

1. Kompozicija trigonometrijske funkcije sa linearnom podintegralnom funkcijom
2. Umnožak sinusa i kosinusa
3. Potencije trigonometrijskih funkcija
4. Trigonometrijski identitet sa dvostrukim kutom
5. Trigonometrijska zamjena
6. Zadatci
7. Rješenja zadataka

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.6.1 Kompozicije trigonometrijske funkcije sa linearnom podintegralnom funkcijom

Neki od najjednostavnijih slučajeva u kojima integrali uključuju funkcije sinusa i kosinusa su sljedeći

$$\int sinax\,dx\,;\ \int cosax\,dx\,;\ \int tanax\,dx$$

U takvim slučajevima možemo koristiti jednostavnu zamjenu, npr.

Primjer 1.1 Izračunajte integral

$$\int sinax\,dx$$

Rješenje

$$\int sinax\,dx = \begin{vmatrix} u = ax \\ du = adx \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\int sinu\,du = -\frac{1}{a}cosu + C = -\frac{1}{a}cosax + C$$

Nešto složeniji slučaj je kad je podintegralna funkcija tangens.

Primjer 1.2 Izračunajte integral

$$\int tanaxdx$$

Rješenje

$$\int tanax\,dx = \int \frac{sinax}{cosax}dx = \begin{vmatrix} u = cosax \\ du = -a\,sinax\,dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{a}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{a}ln|u| + C = -\frac{1}{a}ln|cosax| + C$$

Vrijedi:

$$\boldsymbol{\int sinax\,dx = -\frac{1}{a}cosax + C}$$

$$\boldsymbol{\int cosax\,dx = \frac{1}{a}sinax + C}$$

$$\boldsymbol{\int tanax\,dx = -\frac{1}{a}ln|cosax| + C}$$

$$\boldsymbol{\int ctgax\,dx = \frac{1}{a}ln|sinax| + C}$$

7.6.2 Umnožak sinusa i kosinusa

Integrali oblika:

$$\int sinax \cdot cosbx \, dx$$

$$\int cosax \cdot cosbx \, dx$$

$$\int sinax \cdot sinbx \, dx$$

rješavaju se pomoću trigonometrijskih identiteta:

$$\boldsymbol{sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(sin(ax+bx) + sin(ax-bx))}$$

$$\boldsymbol{cosax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(cos(ax+bx) + cos(ax-bx))}$$

$$\boldsymbol{sinax \cdot sinbx = \frac{1}{2}(cos(ax-bx) - cos(ax+bx))}$$

Primjer 2.1 Izračunajte integral

$$\int sin5x \cdot sin2x \, dx$$

Rješenje

$$\int sin5x \cdot sin2x \, dx = \frac{1}{2}\int (cos3x - cos7x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int cos3x \, dx - \frac{1}{2}\int cos7x \, dx =$$

$$= \frac{1}{6} sin3x - \frac{1}{14} sin7x + C$$

7.6.3 Potencije trigonometrijskih funkcija

Integrali oblika $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, pri čemu su m i n racionalni brojevi, svode se na integriranje elementarnih funkcija u ova tri slučaja:

Slučaj 1. Ako je m **neparan broj**, uvodi se zamjena $\cos x = t$.

Slučaj 2. Ako je n **neparan broj**, uvodi se zamjena $\sin x = t$.

Slučaj 3. **Ako je $\boldsymbol{m + n}$ paran negativan broj, uvodi se zamjena $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x = t}$.**

Primjer 3.1 Izračunajte integral

$$\int cos^5x \cdot sin^3x \, dx$$

Primijetimo da obje funkcije imaju neparne eksponente i da funkcija kosinus ima veći eksponent od funkcije sinus. Stoga ćemo zamijeniti kosinus, ali prvo rastavimo potenciju sinusa kako bismo mogli koristiti trigonometrijski identitet

$$\boldsymbol{sin^2x + cos^2x = 1}$$

Rješenje

$$\int cos^5x \cdot sin^3x \, dx = \int cos^5x \cdot sin^2x \cdot sinx \, dx =$$

$$= \int cos^5x \cdot (1 - cos^2x) \cdot sinx \, dx = \begin{vmatrix} u = cosx \\ du = -sinx \, dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\int u^5(1 - u^2)du = -\int u^5du + \int u^7du =$$

$$= -\frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{8} + C = -\frac{cos^6x}{6} + \frac{cos^8x}{8} + C$$

Primjer 3. 2 Izračunajte integral

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^3 x} dx$$

Rješenje

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{cosx}{sinx \cdot sin^3x} dx = \int \frac{cosx}{sin^4x} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{vmatrix} = \int \frac{du}{u^4} = \int u^{-4}du =$$

$$= \frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{sin^{-3}x}{-3} + C = -\frac{1}{3sin^3x} + C$$

7.6.4 Trigonometrijski identiteti s dvostrukim kutom

U nekim slučajevima možemo primijeniti identitete dvostrukog kuta, kao što su

$$\boldsymbol{sin^2x = \frac{1 - cos2x}{2}}$$

$$\boldsymbol{cos^2x = \frac{1 + cos2x}{2}}$$

Primjer 4.1 Izračunajte integral

$$\int cos^2x\,dx$$

Rješenje

$$\int cos^2x\,dx = \int \frac{1+cos2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int cos2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sin2x + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin2x + C$$

Primjer 4.2 Izračunajte integral

$$\int sin^4x\,dx$$

Rješenje

$$\int sin^4x\,dx = \int (sin^2x)^2dx = \int \left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2cos2x + cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2cos2x\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+cos4x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int cos2x\,d2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int cos4x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}sin4x + C =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin4x + C$$

Primijetite da se u rješenju primjera 4.2 više puta pojavljuje formula dvostrukoga kuta.

7.6.5 Trigonometrijska zamjena

Ovdje ćemo pogledati složenije integrale u kojima podintegralna funkcija sadrži kvadratni korijen kvadratnog izraza; npr.

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx; \quad \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3}dx$$

Trigonometrijska zamjena korisna je za pojednostavljenje podintegralne funkcije. Metoda zamjene temelji se na trigonometrijskom identitetu

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Dijeljenjem identiteta s $cos^2 x$ dobiva se posebni slučaj

$$\mathbf{tg^2\, x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Primjenjujemo gore navedene identitete u sljedećim slučajevima

Slučaj 1. Kod $\sqrt{a^2 - x^2}$ zamjenjujemo $x = a \sin u \quad \text{ili} \;\; x = a \cos u$

Slučaj 2. Kod $\sqrt{a^2 + x^2}$ zamjenjujemo $x = a \,\text{tg}\, u$

Slučaj 3. Kod $\sqrt{x^2 - a^2}$ zamjenjujemo $x = \frac{a}{\cos u}$

Primjer 5.1 Izračunajte integral

$$\int x\sqrt{4 - x^2}dx$$

Rješenje

Za rješavanje integrala, koristimo trigonometrijsku zamjenu, a zatim uvrštavamo dobivenu derivaciju:

$$\int x\sqrt{4 - x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = 2sinu, \;\; \text{pa je} \;\; dx = 2cosu\; du \\ 4 - x^2 = 4 - 4sin^2u = 4cos^2u \end{array} \right| =$$

$$= \int 2sinu\sqrt{4cos^2u}\, 2cosu \;\; du = 8\int cos^2u \;\; sinu \; du =$$

$$= -8\int cos^2u\, d(cosu) = -8\frac{cos^3u}{3} + C$$

Sada se vraćamo na funkciju s obzirom na argument x

$$cos^3u = cos^2u \cdot cosu = (1 - sin^2u)\sqrt{1 - sin^2u} =$$

$$= \left| x = 2sinu \;\text{slijedi}\;\; 1 - sin^2u = 1 - \frac{x^2}{4} \right| =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Rješenje integrala je

$$= -8\frac{cos^3u}{3} + C = -\frac{8}{3}\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)^3 + C = -\frac{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^3}{3} + C$$

Primjer 5.2 Izračunajte integral

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^3}dx$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Rješenje

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3}dx = \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{5}{cosu} \quad \text{pa je} \quad dx = \dfrac{2sinu}{cos^2u}du \\ 25 - x^2 = 25tan^2u \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{25tan^2u}\cdot cos^3u}{125}\frac{2sinu}{cos^2u}du \quad = \frac{2}{25}\int tanu\cdot cosu\cdot sinu\, du =$$

$$= \frac{2}{25}\int sin^2u\, du = \frac{1}{25}\int (1-cos2u)du = \frac{1}{25}\left(u - \frac{1}{2}sin2u\right) + C =$$

$$= \left|\text{kako je } cosu = \frac{5}{x} \quad \text{slijedi } sin2u = 2\cdot\frac{5}{x}\sqrt{1-\frac{25}{x^2}} = \frac{10}{x^2}\sqrt{x^2-25}\right| =$$

$$= \frac{1}{25}\left(arccos\frac{5}{x} - \frac{5}{x^2}\sqrt{x^2-25}\right) + C$$

Primjenjuje se sljedeća formula za $sin2u$

$$\boldsymbol{sin2x = 2sinxcosx}$$

7.6.6 Vježbe

Izračunajte integrale

1. $\int sin12x\, dx$

2. $\int ctg\frac{3x}{4}dx$

3. $\int sin5x\cdot cos4.5x\, dx$

4. $\int sin^{11}x\cdot cosx\, dx$

5. $\int \frac{cos^3x}{sin^5x}dx$

6. $\int 8(1-cos^2x)dx$

7. Primjena trigonometrijske zamjene $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

7.6.7 Rješenja

1. $\int sin12x\, dx$

Rješenje

$$\int sin12x\,dx = \frac{1}{12}\int sin12x\,d12x = -\frac{1}{12}cos12x + C$$

2. $\int cot\frac{3x}{4}dx$

Rješenje

$$\int cot\frac{3x}{4}dx = \int \frac{cos\frac{3x}{4}}{sin\frac{3x}{4}}dx = \left|\begin{matrix} u = sin\frac{3x}{4} \\ du = \frac{3}{4}cos\frac{3x}{4}dx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{4}{3}\int\frac{du}{u} = \frac{4}{3}ln|u| + C = \frac{4}{3}ln\left|sin\frac{3x}{4}\right| + C$$

3. $\int sin5x \cdot cos4.5x\,dx$

Rješenje

$$\int sin5x \cdot cos4.5x\,dx = \frac{1}{2}\int (sin9.5x + sin0.5x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{19}\int sin9.5x\,d9.5x + \frac{1}{2}\cdot 2\int sin0.5x\,d0.5x =$$

$$= -\frac{1}{19}cos9.5x - cos0.5x + C$$

4. $\int sin^{11}x \cdot cosx\,dx$

Rješenje

$$\int sin^{11}x \cdot cosx\,dx = \left|\begin{matrix} u = sinx \\ du = cosx\,dx \end{matrix}\right| = \int u^{11}du =$$

$$= \frac{u^{12}}{12} + C = \frac{sin^{12}x}{12} + C$$

5. $\int \frac{cos^3x}{sin^5x}dx$

Rješenje

$$\int \frac{cos^3x}{sin^5x}dx = \int\frac{(1-sin^2x)cosx}{sin^5x}dx = \left|\begin{matrix} u = sinx \\ du = cosx\,dx \end{matrix}\right| =$$

$$= \int\frac{1-u^2}{u^5}du = \int u^{-5}\,du - \int u^{-3}\,du =$$

$$= \frac{u^{-4}}{-4} - \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4sin^4x} + \frac{1}{2sin^2x} + C$$

6. $\int 8(1-cos^2x)dx$

Rješenje

$$\int 8(1-cos^2x)dx = 8\int sin^2x\ dx = 4\int (1-cos2x)\,dx =$$

$$= 4\int dx - 2\int cos2x\ d2x = 4x - 2sin2x + C$$

7. Primjena trigonometrijske zamjene

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Rješenje

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{vmatrix} let\ \ x = sinu \\ dx = cosu\ du \end{vmatrix} = \int \sqrt{1-sin^2u}\,cosu\ du =$$

$$= \int cosu \cdot cosu\ du = \int \frac{1+cos2u}{2}\ du = \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{4}\int cos2u\ d2u =$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}sin2u + C = \begin{vmatrix} u = arcsinx \\ sin2u = 2sinucosu = 2x\sqrt{1-x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}arcsinx + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

7.7 Određeni integral

DETALJAN OPIS:

Ovo poglavlje uvodi pojam određenog integrala. Počinje se s pitanjem: kako izračunati površinu područja omeđenog krivuljom s gornje strane i pravcima s donje, lijeve i desne strane? Raspravlja se o približnoj metodi računanja određenog integrala. Zatim se ova metoda generalizira i formulira definicija određenog integrala. Osnovna svojstva određenog integrala i Newton-Leibnizova formula koriste se za izračunavanje određenog integrala. Za studente možemo preporučiti https://www.integral-calculator.com/ i „Integralni kalkulator". Ovaj softver rješava zadani integral korak po korak te prikazuje interaktivne grafove dviju funkcija, podintegralne funkcije i njene antiderivacije. Tako studenti mogu provjeriti dobivena rješenja. Grafovi se mogu izraditi pomoću besplatnih softvera kao što su GeoGebra Classic, DESMOS grafički kalkulator, Microsoft Excel i drugi.

Cilj: **Naučiti definiciju određenog integrala kao limes zbroja.**

Ishodi učenja:

1. Razumjeti značenje određenog integrala.
2. Razumjeti i primijeniti pravila za računanje određenih integrala.

Prethodna znanja: osnovna pravila integriranja i deriviranja; poznavanje svojstava elementarnih funkcija i njihovih grafova; algebarske i trigonometrijske formule.

Odnos prema stvarnim pomorskim problemima: Određeni integrali imaju širok raspon primjena. Uz pomoć određenih integrala moguće je izračunati površine različitih oblika, volumene čvrstih tijela i riješiti druge geometrijske probleme. Određeni integrali koriste se za različite proračune pri konstrukciji plovila u brodogradnji. Primjenjuju se u teoriji stabilnosti, u elektrotehnici, u teoriji transporta tereta, u ekonomiji, u klasičnoj teoriji signala te u mnogim drugim djelatnostima.

Sadržaj

1. Određivanje problemskog područja
2. Definicija određenog integrala
3. Svojstva određenog integrala
4. Računanje određenog integrala
5. Zadatci
6. Rješenja zadataka

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

7.7.1 Određivanje problemskog područja

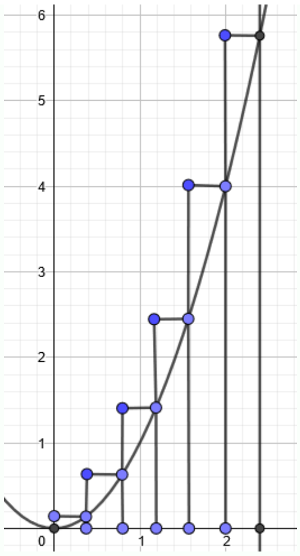
Pomoću rezultata euklidske geometrije znamo izračunati površinu pravokutnika, trokuta, kruga i drugih jednostavnih ravninskih figura. Ako je zadan poligon, njegovo se područje može pronaći tako da se poligon podijeli na konačan broj trokuta koji se ne preklapaju. Drugačiji je slučaj ako trebamo izračunati površinu regije zatvorene proizvoljnom krivuljom.

Primjer koji ćemo riješiti odnosi se na računanje površine kada su funkcije zadane u Kartezijevim koordinatama.

Primjer 1.1 Pronađite i izračunajte površinu područja zatvorenu parabolom $y = x^2$, dvjema okomitim ravnim crtama $x = 0$ i $x = 2.4$, i sa x-osi ($y = 0$).

Rješenje

Područje regije možemo približno izračunati. Podijelimo interval $[0, 2.4]$ na dijelove jednake duljine. Za svaki takav podinterval konstruiramo pravokutnik čija je visina jednaka vrijednosti zadane funkcije na krajnjoj točki odabranog podintervala:



Slika 7.5

Interval je dug 2.4 jedinice (Slika 7.5). Svaka podintervalna vrijednost duga je 0.4 jedinice. Možemo izračunati površinu svih pravokutnika na intervalu $[0, 2.4]$

$$0.4 \cdot 0.4^2 + 0.4 \cdot 0.8^2 + 0.4 \cdot 1.2^2 + 0.4 \cdot 1.6^2 + 0.4 \cdot 2^2 + 0.4 \cdot 2.4^2 = 5.824$$

Slika 7.5 pokazuje da je izračunata površina pravokutnika veća od površine područja koju trebamo pronaći. Podjela intervala $[0, 2.4]$ na kraće podintervale smanjit će grešku računa. Ako je duljina podintervale 0.01, dobivamo

$$0.01(0.01^2 + 0.02^2 + 0.03^2 + \cdots + 2.4^2) \approx 463.684$$

Korisno je, ovo vrlo dugačko zbrajanje, uraditi pomoću softverskog programa, npr. pomoću Microsoft Excela. Dakle, možemo podijeliti interval $[0, 2.4]$ na sve više i više dijelova, čime se smanjuje pogreška. U svakom slučaju, moramo pronaći točan odgovor.

7.7.2 Definicija određenog integrala

Neka je f nenegativna i omeđena funkcija na intervalu $[a,b]$. Želimo izračunati površinu P lika omeđenog grafom funkcije f, osi x i pravcima $x = a$, $x = b$ (Slika 7.6).

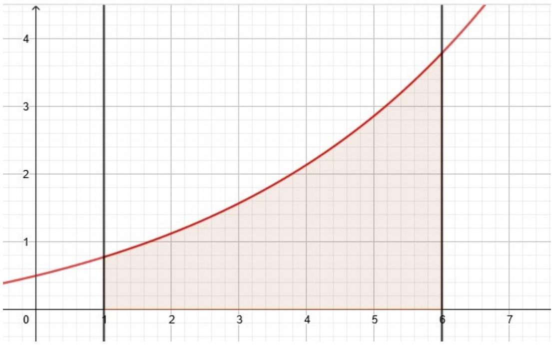
Odaberimo skup točaka unutar intervala $[a,b]$, npr.

$$\{x_1 = a, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}, \text{ gdje}$$

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$$

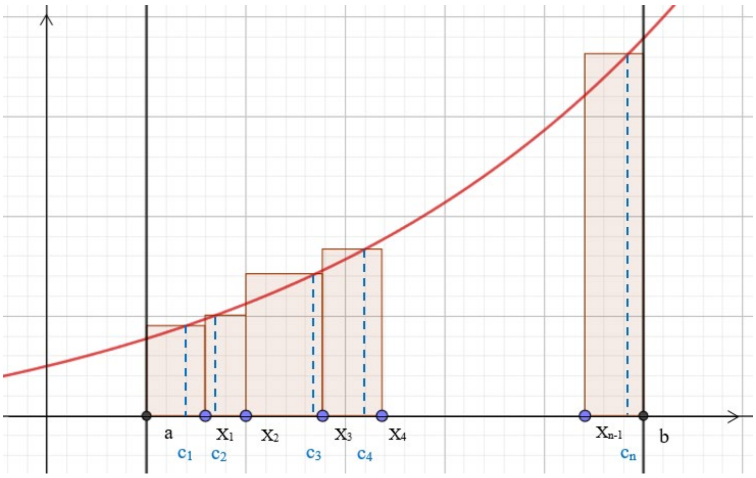
Tako se dobije n podintervala $[x_{i-1}, x_i]$, gdje je $i = 1,2,3,\dots,n$. Duljina bilo kojeg podintervala je

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



Slika 7.6

Za svaki $i = 1,2,3,\dots,n$ bira se točka c_i u intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ i konstruira pravokutnik sa stranicama čije su duljine Δx_i i $f(c_i)$ (Slika 7.7).



Slika 7.7

Nakon toga se računa površina svakog pravokutnika. Zbrajanjem svih površina dobiva se:

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Ta suma je približno jednaka površini područja omeđenog krivuljom $y = f(x)$ i pravcima $y = 0, x = a, x = b$. Ako broj dijelova na koje dijelimo interval $[a, b]$ teži u beskonačno, tako da duljina najvećeg podintervala teži u nulu,

$$\max \Delta x_i \to 0,$$

onda razlika između sume i stvarne površine P danog područja teži u nulu. Pomoću limesa to možemo jednostavno zapisati na sljedeći način:

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Definicija. Ako limes

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

postoji u skupu $\mathbb{R}$ te ne ovisi o izboru unutarnjih točaka c_i, onda taj limes nazivamo ***određenim integralom*** funkcije f na intervalu $[a, b]$ i označavamo ga simbolom

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}.$$

Tada kažemo da je funkcija f ***integrabilna*** na intervalu $[a, b]$.

Znak ∫ čita se "***(određeni) integral***", podsjeća na slovo S jer predstavlja limes sume.

Brojevi a i b nazivaju se ***granice integracije***; a je ***donja granica***, a b ***gornja granica***.

Funkcija f se naziva ***podintegralna funkcija***.

$d\boldsymbol{x}$ je ***diferencijal funkcije*** $\boldsymbol{y = x}$.

$\boldsymbol{x}$ je ***varijabla integriranja***.

Varijabla x se može zamijeniti bilo kojom drugom varijablom bez promjene vrijednosti integrala.

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \int_a^b \boldsymbol{f(t)dt}$$

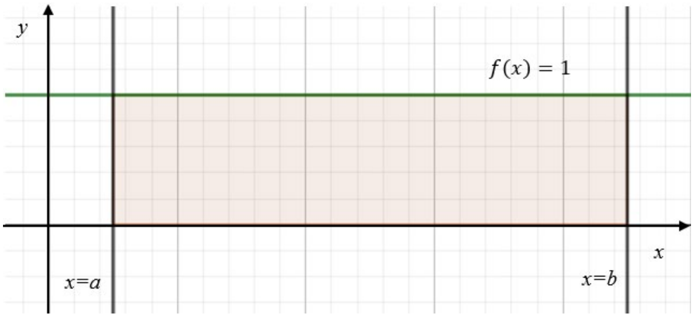
Primjer 2.1 Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = 1, x = a, x = b, y = 0$.

Rješenje

Površina zadanog područja može se izračunati integralom

$$\int_a^b 1 \cdot dx$$

Područje je omeđeno ravnim crtama koje definiraju pravokutnik (Slika 7.8).



Slika 7.8

Površina pravokutnika jednaka je rješenju integrala.

$$\int_a^b dx = (b-a) \cdot 1 = b - a$$

7.7.3 Svojstva određenog integrala

Ispod se navode najvažnija svojstva određenog integrala. Većina se dobije izravno iz definicije određenog integrala.

Za neprekinute funkcije f i g na intervalu $[a,b]$ vrijedi:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ za svaki $c \in [a,b]$
4. $\int_a^b \big(cf(x) + kg(x)\big)dx = c\int_a^b f(x)dx + k\int_a^b g(x)dx$, gdje su c i k proizvoljne konstante
5. Ako je $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in [a,b]$, onda je $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
6. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
7. Ako je f neparna funkcija na intervalu $[-a,a]$, tj. ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in [-a,a]$, onda je

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

8. Ako je f parna funkcija na intervalu $[-a,a]$, tj. ako je $f(-x)=f(x)$ za svaki $x\in[-a,a]$, onda je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Ostala svojstva predstavljaju metode vrednovanja određenog integrala.

9. $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$, gdje je m minimalna, a M maksimalna vrijednost funkcije f na intervalu $[a,b]$

10. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ za neki $c\in[a,b]$

Deseto svojstvo naziva se ***teorem srednje vrijednosti***.

Naime, $f(c)$ predstavlja prosječnu vrijednost funkcije f, integrabilne na $[a,b]$, koja se postiže u točki $c\in[a,b]$.

$$\boldsymbol{f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

7.7.4 Računanje određenog integrala

Formula Newton-Leibniz. Ako je f neprekinuta funkcija na intervalu $[a,b]$ s antiderivacijom F, onda je

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).}$$

Kako primijeniti ovu formulu? Najprije moramo riješiti pripadni neodređeni integral.

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Zatim moramo izračunati vrijednost (bilo koje) antiderivacije na gornjoj granici integrala i vrijednost iste antiderivacije na njegovoj donjoj granici. Na kraju, od prve vrijednosti moramo oduzeti drugu.

Provjerimo da za bilo koji izabrani $C\in\mathbb{R}$ dobivamo isti rezultat.

$$F(b)+C-(F(a)+C)=F(b)+C-F(a)-C=F(b)-F(a)$$

Pri rješavanju sređenog integrala koristi se sljedeći zapis:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).}$$

Sada možemo izračunati površinu područja definiranog u primjeru 1.1.

$$\int_{0}^{2.4} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2.4} = \frac{2.4^3}{3} - 0 = 4.608$$

Primjer 4.1

$$\int_{1}^{3} 2x dx$$

Rješenje

Primjenom Newton – Leibnizove formule dobiva se

$$\int_{1}^{3} 2x dx = x^2\Big|_{1}^{3} = 3^2 - 1 = 8.$$

Primjer 4.2

$$\int_{1}^{4} (3+\sqrt{x}) dx$$

Rješenje

Pri rješavanju koristimo 4. svojstvo određenih integrala.

$$\int_{1}^{4} (3+\sqrt{x}) dx = \int_{1}^{4} 3 dx + \int_{1}^{4} \sqrt{x} dx = \left(3x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_{1}^{4}$$
$$= 3(4-1) + \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - 1\right) = 9 + \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}$$

Primjer 4.3

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi$$

Rješenje

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \, d(2\varphi) = \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_{0}^{\pi/2}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi - (0 - \sin 0) = \frac{\pi}{4}$$

Primjer 4.4

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{2} \sqrt[3]{x^4} \cdot x^{\frac{2}{3}} dx$$

Rješenje

Primjenjujemo 3. svojstvo kako bismo pojednostavili zadatak.

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{2} \sqrt[3]{x^4} \cdot x^{\frac{2}{3}} dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{2} x^2 dx = \int_{-1}^{2} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

Primjer 4.5

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 2x\, dx = 0$$

jer je podintegralna funkcija neparna na intervalu $[-\pi, \pi]$ (vidi svojstvo 7).

Primjer 4.6 Izračunajte prosječnu vrijednost funkcije $f(x) = \tan^2 x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Rješenje

Primjenjujemo teorem srednje vrijednosti

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) dx.$$

Duljina intervala je

$$b - a = \frac{\pi}{4}.$$

Prosječna vrijednost funkcije $f(x) = \tan^2 x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ je

$$f(c) = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \frac{4}{\pi} (\tan x - x) \Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi} - 1$$

i postiže se u točki

$$c = \arctan\left(\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}\right) \approx 0.48166.$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.7.5 Vježbe

Izračunajte integrale

1. $\int_{0}^{2}(x^4 - x^3)dx$
2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin x\,dx$
3. $\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$
4. $\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{2^{3x}}{7}dx$
5. $\int_{-2}^{7}\frac{2dx}{x+3}$

7.7.6 Rješenja

1. $\int_{0}^{2}(x^4 - x^3)dx$

Rješenje

$$\int_{0}^{2}(x^4 - x^3)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \frac{32}{5} - 4 = \frac{12}{5} = 2.4$$

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin x\,dx$

Rješenje

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_{-\pi/4}^{0} = -\cos 0 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. $\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

Rješenje

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2}\Big|_{-1}^{1} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

4. $\int_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{2^{3x}}{7} dx$

Rješenje

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{2^{3x}}{7} dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \int_{0}^{\frac{1}{3}} 2^{3x} d(3x) = \frac{1}{21} \cdot \frac{2^{3x}}{\ln 2} \Big|_{0}^{1/3} = \frac{2}{21 \ln 2} - \frac{1}{21 \ln 2} = \frac{1}{21 \ln 2}$$

Evo još jedne metode izračuna koja koristi svojstva potencija i logaritama.

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{2^{3x}}{7} dx = \frac{1}{7} \int_{0}^{\frac{1}{3}} 8^{x} dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{8^{x}}{\ln 8} \Big|_{0}^{1/3} = \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt[3]{8}}{\ln 8} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\ln 8} = \frac{2}{7 \cdot 3 \ln 2} - \frac{1}{7 \cdot 3 \ln 2} = \frac{1}{21 \ln 2}$$

5. $\int_{-2}^{7} \frac{2dx}{x+3}$

Rješenje

$$\int_{-2}^{7} \frac{2dx}{x+3} = 2 \int_{-2}^{7} \frac{d(x+3)}{x+3} = 2 \ln|x+3| \Big|_{-2}^{7} = 2 \ln 10 - 2 \ln 1 = 2 \ln 10$$

7.8 Neke metode računanja određenog integrala

DETALJAN OPIS:

Osnovna pravila za izračunavanje određenog integrala razmatrana su u prethodnom odjeljku. U ovom dijelu prikazuju se metode integracije složenih funkcija i metoda parcijalne integracije u određenom integralu.

Cilj: **uvesti određene metode izračunavanja određenog integrala ako je podintegralna funkcija ne-trivijalna.**

Ishodi učenja:

1. Znati rješavati različite tipove određenih integrala koristeći različite metode integriranja.

Prethodno znanje: osnovna pravila integriranja i deriviranja, metode integriranja neodređenih integrala; Newton-Leibnizova formula.

Odnos prema stvarnim pomorskim problemima: Općenito, integrali imaju široku primjenu. Uz pomoć određenih integrala moguće je izračunati površine raznih oblika, volumene čvrstih tijela te riješiti druge geometrijske probleme. Određeni integrali se koriste za različite proračune konstrukcija u brodogradnji. Integrali se primjenjuju u teoriji stabilnosti, u elektrotehnici, u teoriji prijevoza tereta, u ekonomiji, u klasičnoj teoriji signala, itd.

Sadržaj

1. Parcijalna integracija
2. Metoda zamjene za određene integrale
3. Zadatci
4. Rješenja zadataka

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.8.1 Parcijalna integracija

Pretpostavimo da je zadan određeni integral čiji se pripadni neodređeni integral može riješiti parcijalnom integracijom. Antiderivaciju podintegralne funkcije nalazimo prema formuli

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Određeni integral onda možemo rješavati na dva načina:

$$\int_a^b udv = \left(uv - \int vdu\right)\Big|_a^b$$

ili

$$\boldsymbol{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.}$$

Primjer 1.1

$$\int_0^2 xe^x dx$$

Rješenje

$$\int_0^2 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx$$
$$= 2 \cdot e^2 - 0 - e^x\Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 + e^0 = e^2 + 1$$

Primjer 1.2

$$\int_4^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

Rješenje

$$\int_4^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \dfrac{1}{x} dx, & v = 2\sqrt{x} \end{vmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_4^{e^2} - 2\int_4^{e^2} \frac{\sqrt{x}}{x} dx$$
$$= 2\sqrt{e^2}\ln(e^2) - 2 \cdot 2\ln 4 - 2 \cdot 2\sqrt{x}\Big|_4^{e^2} = 4e - 4\ln 4 - 4\sqrt{e^2} + 8 = 8 - 4\ln 4$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.8.2 Metoda zamjene za određene integrale

Prisjetimo se metode zamjene za neodređene integrale. Ako podintegralna funkcija sadrži složenu funkciju $f \circ g$ pomnoženu derivacijom svog argumenta g, možemo pojednostaviti zapis integrala uvođenjem novog argumenta.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Neodređeni integral predstavlja skup antiderivacija $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$. Određeni integral je broj. Budući da određeni integral ima granice integriranja definirane na intervalu $[a, b]$ s obzirom na argument x, uvedeni argument u pripada novom intervalu $[\alpha, \beta]$. Slučaj je precizno izrečen sljedećim teoremom.

Teorem 2.1. Neka je g derivabilna funkcija na intervalu $[a, b]$ takva da je $g(a) = \alpha, g(b) = \beta$ i f neprekinuta funkcija definirana na slici funkcije g. Uvođenjem zamjene $u = g(x)$ slijedi

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du.$$

Primjer 2.1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx$$

Rješenje

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x, \quad du = \cos x\, dx \\ u_1 = \sin 0 = 0, \qquad u_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 e^u du = e^u \Big|_0^1 = e - 1$$

Primjer 2.2

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2 - 8x^5)^2 x^4 dx$$

Rješenje

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2 - 8x^5)^2 x^4 dx = \left| \begin{matrix} u = 2 - 8x^5, \quad du = -40x^4 dx \\ u_1 = 1.75, \quad u_2 = -6 \end{matrix} \right| = -\frac{1}{40} \int_{1.75}^{-6} u^2 du = \frac{1}{40} \int_{-6}^{1.75} u^2 du$$

$$= \frac{1}{40} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_{-6}^{1.75} = \frac{1}{120}\left(\frac{343}{64} - (-216)\right) = \frac{14167}{7680} \approx 1.845$$

Pri rješavanju ovog integrala obrnuli smo granice integracije.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Primjer 2.3

$$\int_1^2 \frac{2t^3}{t^2+1}dt$$

Rješenje

$$\int_1^2 \frac{2t^3}{t^2+1}dt = \int_1^2 \frac{2t\cdot t^2}{t^2+1}dt = \left|\begin{matrix} u = t^2+1,\ \ du = 2tdt \\ u_1 = 1+1 = 2,\ \ u_2 = 2^2+1 = 5 \\ t^2 = u-1 \end{matrix}\right|$$

$$= \int_2^5 \frac{u-1}{u}du = \int_2^5 du - \int_2^5 \frac{du}{u} = (u - \ln u)\Big|_2^5$$

$$= 5 - \ln 5 - 2 + \ln 2 = 3 - \ln 2.5$$

7.8.3 Vježbe

Riješite integrale

1. $\int_0^2 (x^2+1)xdx$
2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot\varphi\, d\varphi$
3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{5^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{0.75-16t^4}dt$
5. $\int_{-1}^{3} \frac{4dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

7.8.4 Rješenja

1. $\int_0^2 (x^2+1)xdx$

Rješenje

$$\int_0^2 (x^2+1)xdx = \left|\begin{matrix} u = x^2+1,\ \ du = 2xdx \\ u_1 = 1,\ \ u_2 = 5 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int_1^5 udu = \frac{u^2}{4}\Bigg|_1^5 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6$$

2. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot\varphi\, d\varphi$

Rješenje

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot\varphi\, d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = \left| \begin{array}{c} u = \sin\varphi\,, \quad du = \cos\varphi\, d\varphi \\ u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right|$$
$$= \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.5\ln 1.5$$

3. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{5^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Rješenje

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{5^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} u = \arcsin x\,, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ u_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad u_2 = 0 \end{array} \right| = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0} 5^u du$$

$$= \frac{5^u}{\ln 5} \Big|_{-\pi/6}^{0} = \frac{1}{\ln 5} - \frac{5^{-\frac{\pi}{6}}}{\ln 5}$$

4. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{0.75 - 16t^4} dt$

Rješenje

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{0.75 - 16\,t^4} dt = \left| \begin{array}{c} u = 0.75 - 16t^4, \quad du = -64t^3 dt \\ u_1 = 0.75, \quad u_2 = -0.25 \end{array} \right| = -\frac{1}{64} \int\limits_{0.75}^{-0.25} \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{64} \int\limits_{-0.25}^{0.75} \frac{du}{u} = \frac{1}{64} \ln u \Big|_{-0.25}^{0.75} = \frac{1}{64}(\ln 0.75 - \ln|-0.25|)$$
$$= \frac{1}{64}(\ln 0.75 - \ln 0.25) = \frac{1}{64}\ln\frac{0.75}{0.25} = \frac{\ln 3}{64}$$

5. $\int_{-1}^{3} \frac{4dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

Rješenje

$$\int_{1}^{3} \frac{4dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \left| \begin{array}{c} u=\sqrt{x}, \quad du=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \\ u_1=1, \ u_2=\sqrt{3} \\ x=u^2 \end{array} \right| = 4 \cdot 2 \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = 8 \arctan u \Big|_{1}^{\sqrt{3}}$$

$$= 8\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1\right) = 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

7.9 Nepravi integrali

DETALJAN OPIS:

Nepravi integral je svaki određeni integral koji ima najmanje jedno od sljedeća dva svojstva:

- bar jednu beskonačnu granicu
- podintegralna funkcija unutar područja integracije nije omeđena, tj. ima vertikalnu asimptotu.

Takvi integrali definiraju se pomoću limesa. Prikazuju se načini računanja nepravih integrala i razmatraju primjeri konvergentnih i divergentnih nepravih integrala.
Za crtanje grafova preporučuju se programi GeoGebra, DESMOS i Excel. Za provjeru dobivenih rješenja i bolje razumijevanje naučenog, studenti mogu koristiti *kalkulator određenih integrala* (https://www.emathhelp.net/calculators/calculus-2/definite-integral-calculator/)

Cilj: **prepoznati nepravi integral, ustanoviti konvergenciju ili divergenciju nepravog integrala i u slučaju konvergencije izračunati nepravi integral**

Ishodi učenja:

1. Naučiti metode računanja nepravih integrala tipa I.
2. Razlikovati neprave integrale tipa II i naučiti metode njihova izračuna.

Prethodno znanje: određeni integrali, limesi, određivanje domene funkcije, elementarne funkcije i njihovi grafovi

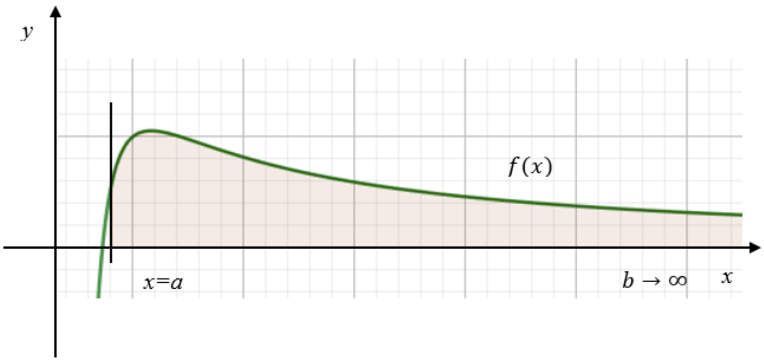
Povezanost s problemima u pomorstvu: Matematičkim opisivanjem oblika trupa broda moguće je istražiti valni otpor broda koji se može prikazati nepravim integralom. Nepravi integrali koriste se za izražavanje električnog potencijala. Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable je nepravi integral.

Sadržaj

1. Nepravi integrali s bar jednom beskonačnom granicom
2. Nepravi integrali neomeđenih funkcija
3. Zadatci
4. Rješenja zadataka

7.9.1 Nepravi integrali s bar jednom beskonačnom granicom

U prethodnim pospoglavljima upoznali smo se s određenim integralom čiji je integrand definiran na segmentu. Neka je f neprekinuta funkcija na intervalu $[a, \infty\rangle$ (Slika 7.9).



Slika 7.9

Tada se za svaki $b \in [a, \infty\rangle$ može izračunati vrijednost integrala

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Odabirom različitih vrijednosti broja b

$$a \leq b_1 < b_2 < b_3 < \cdots,$$

Dobiva se niz brojeva

$$\int_a^{b_1} f(x)dx\,, \qquad \int_a^{b_2} f(x)dx\,, \qquad \int_a^{b_3} f(x)dx\,, \ldots$$

koji može biti konvergentan ili divergentan.

Definicija 1.1 ***Nepravi integral tipa I*** (nepravi integral s bar jednom beskonačnom granicom)

Neka je funkcija f neprekinuta na $[a, \infty\rangle$. Tada se definira

$$\boldsymbol{\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.}$$

Ako je

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R},$$

onda nepravi integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ***konvergira***. U suprotnom, nepravi integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ***divergira***.

Računanje nepravog integrala slijedi poznata pravila: odrediti odgovarajuću antiderivaciju, primijeniti Newton-Leibnizovu formulu i izračunati limes kad b teži u beskonačno.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

Simbolički se zapisuje kao

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a),$$

gdje je $F(\infty)$ oznaka za $\lim_{b\to\infty} F(b)$.

Analogno se definira $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(-\infty),$$

gdje je $F(-\infty)$ oznaka za $\lim_{a\to-\infty} F(a)$.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ onda definiramo kao zbroj dva prethodno definirana neprava integrala.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx$$

za bilo koji $c \in \mathbb{R}$.

Nepravi integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergira samo ako oba integrala, $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ i $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$, konvergiraju.

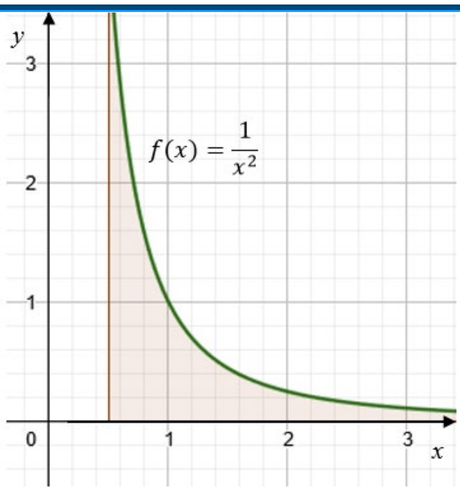
Primjer 1.1 Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_{0.5}^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Rješenje

Skicirajmo graf podintegralne funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$



Slika 7.10

Slika 7.10 pokazuje da se njen graf asimptotski približava osi x.

$$\int_{0.5}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_{0.5}^{b}x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{0.5}^{b}=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{0.5}^{b}=-\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}-2\right)=2$$

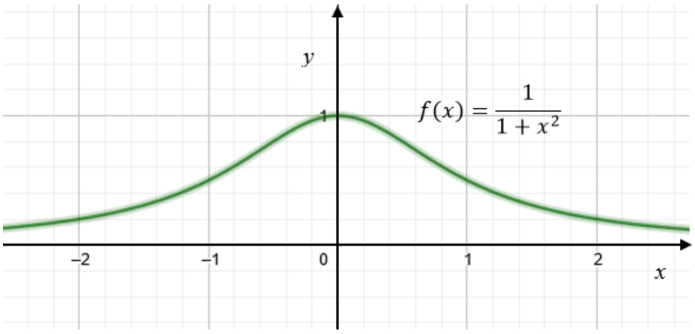
Odgovor: Integral konvergira.

Primjer 1.2 Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Rješenje

Graf podintegralne funkcije nacrtan je na slici 7.11.



Slika 7.11.

Vidimo da se radi o parnoj funkciji jer je njen graf simetričan s obzirom na os y. Kod ispitivanja konvergencije zadanog integrala, podijelit ćemo područje integracije na dva podintervala:

$$\langle-\infty,0],\qquad [0,\infty\rangle,$$

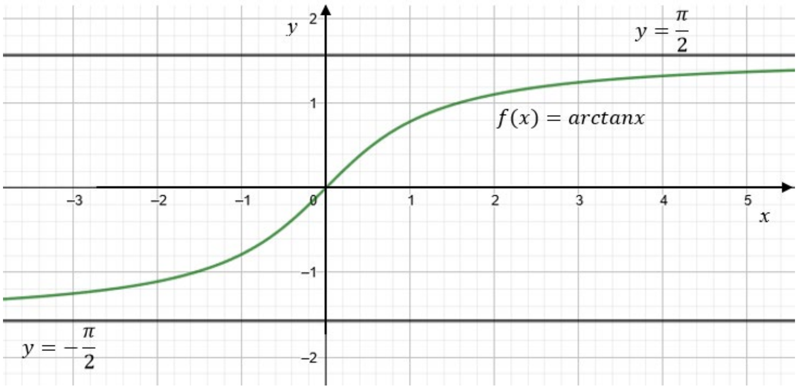
kako bismo mogli iskoristiti simetriju grafa funkcije f.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=2\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_{0}^{b}=2\lim_{b\to\infty}\arctan x-\arctan 0=2\frac{\pi}{2}=\pi$$

Slika 7.12 prikazuje graf funkcije $f(x)=\arctan x$ koji ima dvije horizontalne asimptote:

$$y=-\frac{\pi}{2}\quad \text{i}\quad y=\frac{\pi}{2}.$$



Slika 7.12

Odgovor: Integral konvergira.

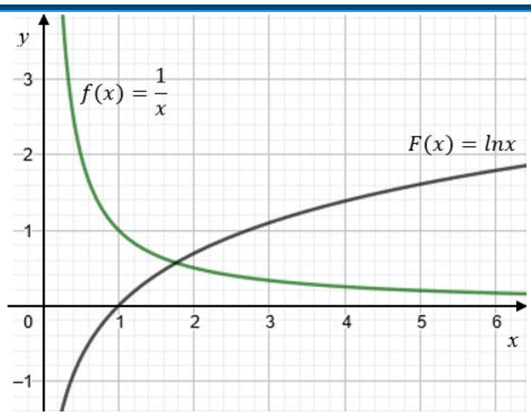
Primjer 1.3 Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_{0.2}^{\infty}\frac{dx}{x}.$$

Rješenje

$$\int_{0.2}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_{0.2}^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_{0.2}^{b}=\lim_{b\to\infty}\ln b-\ln 0.2=\infty$$

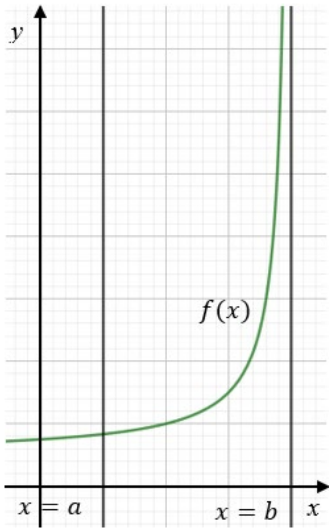
Grafovi integranda $f(x)=\frac{1}{x}$ i antiderivacije $F(x)=\ln x$ prikazani su na slici 7.13. Funkcija $F(x)$ neograničeno raste kad $x\to\infty$.



Slika 7.13.

Odgovor: Integral divergira.

7.9.2 Nepravi integrali neomeđenih funkcija



Slika 7.14

Definicija 2.1 Neka je funkcija f neprekinuta na intervalu $[a, b\rangle$ i neomeđena slijeva u točki b, tj. $x = b$ je lijeva vertikalna asimptota funkcije f (Slika 7.14). ***Nepravi integral tipa II*** definiran je na sljedeći način

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx}$$

Ako je $\lim\limits_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx \in \mathbb{R}$, onda kažemo da nepravi integral $\int_a^b f(x)dx$ ***konvergira***. U suprotnom kažemo da $\int_a^b f(x)dx$ ***divergira***.

Analogno, ako je f neprekinuta na $\langle a, b]$ i neomeđena zdesna u točki a (Slika 7.15), onda je

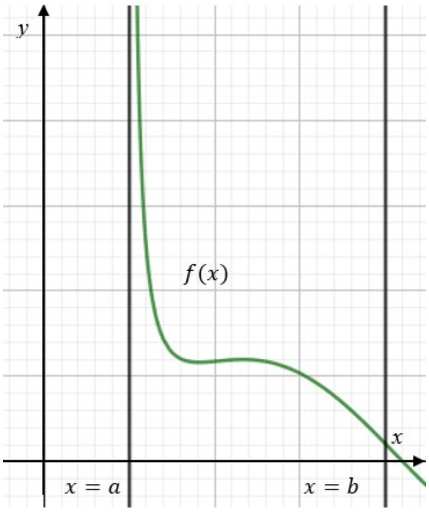
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)dx.$$

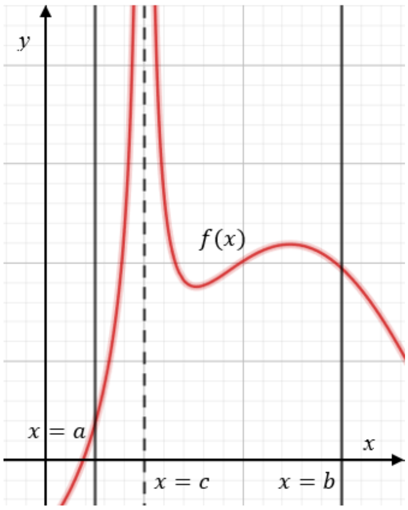
Ako je f neomeđena u okolini točke $c \in \langle a, b\rangle$, kao na slici 7.16, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\beta\to c^-} \int_a^\beta f(x)dx + \lim_{\alpha\to c^+} \int_\alpha^b f(x)dx.$$

Nepravi integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira samo ako oba integrala, $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, konvergiraju.



Slika 7.15



Slika 7.16

Primjer 2.1 . Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$$

Rješenje:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{\beta\to 1^-} \int_0^\beta (1-x)^{-\frac{1}{3}}dx = \begin{vmatrix} \text{let} \;\; u = 1-x, \;\; du = -dx \\ u_1 = 1, \;\; u_2 = 1-\beta \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\beta\to 1^-} \int_1^{1-\beta} u^{-\frac{1}{3}}du = -\frac{3}{2} \lim_{\beta\to 1^-} u^{\frac{2}{3}} \Big|_1^{1-\beta}$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\lim_{\beta\to 1^-} (1-\beta)^{\frac{2}{3}} - 1^{\frac{2}{3}}\right] = -\frac{3}{2}(0-1) = \frac{3}{2}$$

Odgovor: Integral konvergira.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Primjer 2.2 . Ispitajte konvergenciju integrala

$$\int_0^3 \frac{2dx}{(x-1)^2}$$

Rješenje Integrand nije definiran za $x = 1 \in [0,3]$ pa je potrebno podijeliti područje integracije, tj. interval $[0,3]$, na dva dijela.

$$\int_0^3 \frac{2dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{2dx}{(x-1)^2} + \int_1^3 \frac{2dx}{(x-1)^2} = \lim_{\beta\to1^-} \int_0^\beta \frac{2dx}{(x-1)^2} + \lim_{\alpha\to1^+} \int_\alpha^3 \frac{2dx}{(x-1)^2}$$

Integral konvergira samo ako su oba limesa realni brojevi. Kako je

$$\lim_{\beta\to1^-} \int_0^\beta \frac{2dx}{(x-1)^2} = \lim_{\beta\to1^-} \frac{-2}{x-1}\Big|_0^\beta = \lim_{\beta\to1^-} \frac{-2}{\beta-1} - 2 = \infty$$

zadani integral divergira.

7.9.3 Vježbe

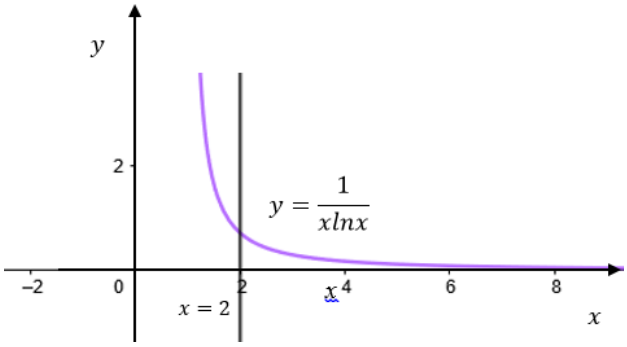
Ispitajte konvergenciju zadanog integrala te nacrtajte graf podintegralne funkcije i jedne njene antiderivacije.

1. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$
2. $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$
3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$
4. $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$
5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$

7.9.4 Rješenja

1. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$

Rješenje Kao što se vidi na slici 7.17., na području integracije podintegralna funkcija je padajuća.

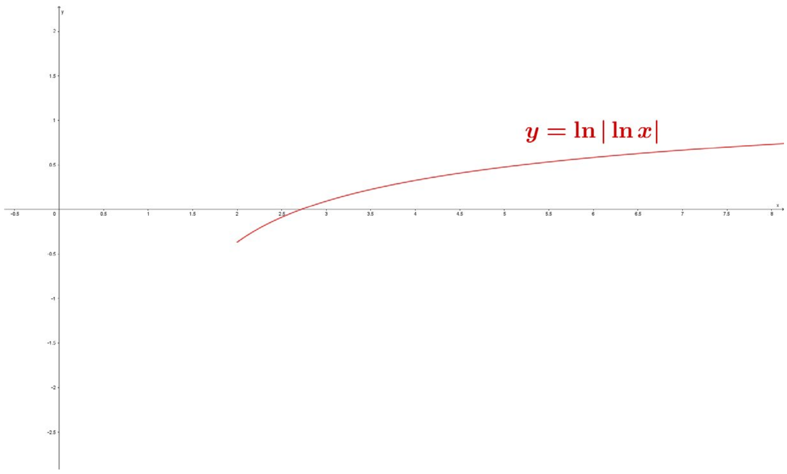


Slika 7.17

Gornja granica je beskonačna pa je zadani integral nepravi integral tipa 1. Odredimo neodređeni integral.

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$$

Graf antiderivacije $y = \ln|\ln x|$ prikazan je na slici Slika 7.18.



Slika 7.18

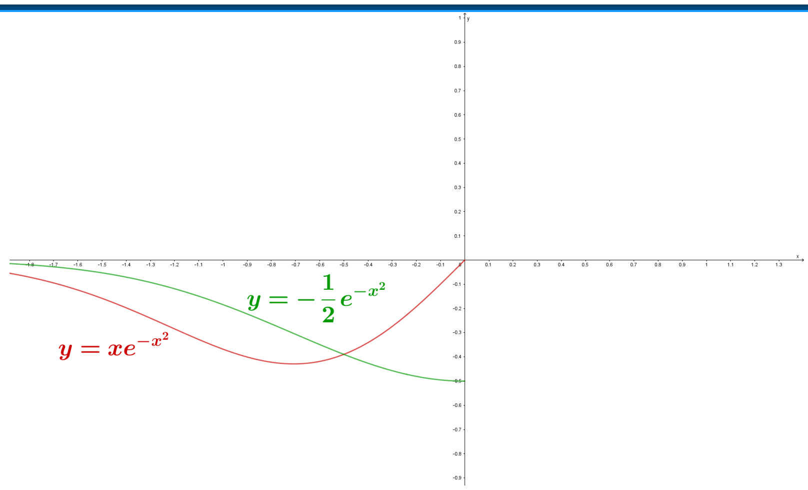
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \ln|\ln x|\,\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty} \ln\ln b - \ln\ln 2 = \infty$$

Integral divergira.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$

Rješenje

Slika 7.19 prikazuje graf integranda (crvena krivulja) i antiderivacije (zelena krivulja).



Slika 7.19

Donja granica nije konačna pa se radi o nepravom integralu tipa I.

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty} e^{-x^2}\Big|_a^0$$
$$= -\frac{1}{2}\left(e^0 - \lim_{a\to-\infty} e^{-a^2}\right) = -\frac{1}{2}(1-0) = -\frac{1}{2}$$

Integral konvergira.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

Rješenje

Integral s obje beskonačne granice je nepravi integral tipa I. Rastavit ćemo ga na dva integrala s istom podintegralnom funkcijom, ali s različitim integracijskim područjem.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Riješimo najprije pripadni neodređeni integral.

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+2} = \left|\begin{array}{l} x^2+2x+2 = (x^2+2x+1)+1 \\ \qquad\qquad\;\; = (x+1)^2+1 \end{array}\right|$$
$$= \int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1) + C$$

Onda je

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\arctan(x+1)\Big|_a^0$$
$$= \arctan 1 - \lim_{a\to-\infty}\arctan(a+1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

i

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty} \arctan(x+1)\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \arctan(b+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Dakle,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

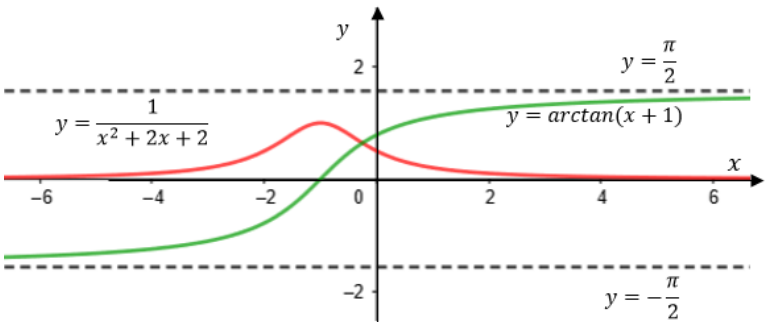
Integral konvergira.

Slika 7.20 prikazuje graf podintegralne funkcije

$$y = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

i njene antiderivacije

$$y = \arctan(x+1).$$



Slika 7.20

4. $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

Rješenje

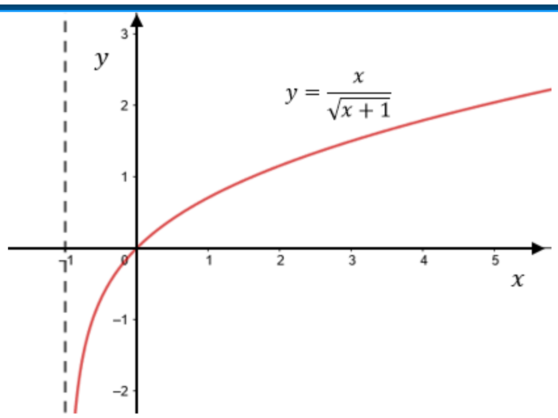
Za podintegralnu funkciju

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

vrijedi

$$D_f = \langle -1, \infty \rangle.$$

Dakle, podintegralna funkcija nije definirana na donjoj granici područja integracije pa je zadani integral nepravi integral tipa II. Graf ove funkcije (Slika 7.21).



Slika 7.21

Pripadni neodređeni integral računamo primjenom metode supstitucije.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{x+1}, & x = u^2 - 1 \\ & dx = 2udu \end{matrix} \right| = \int \frac{u^2-1}{u} 2udu$$

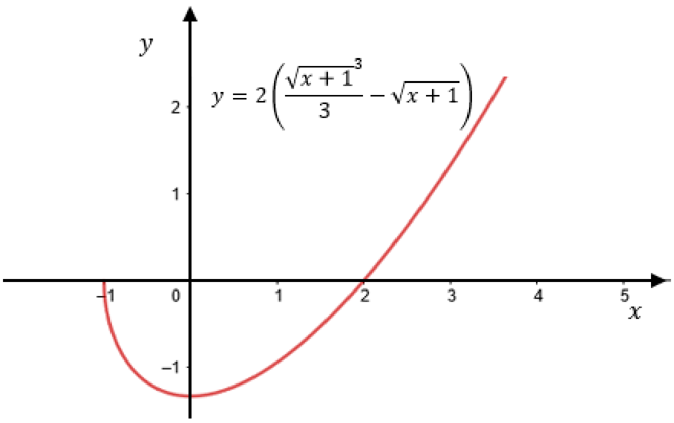
$$= 2\int (u^2-1)du = 2\left(\frac{u^3}{3} - u\right) + C = 2\left(\frac{\sqrt{x+1}^3}{3} - \sqrt{x+1}\right) + C$$

Povratak na nepravi integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \lim_{\alpha\to -1^+} \int_{\alpha}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \lim_{\alpha\to -1^+} 2\left(\frac{\sqrt{x+1}^3}{3} - \sqrt{x+1}\right)\Bigg|_{\alpha}^{2}$$

$$= 2\frac{\sqrt{3}^3}{3} - 2\sqrt{3} - 2\lim_{\alpha\to -1^+}\left(\frac{\sqrt{\alpha+1}^3}{3} - \sqrt{\alpha+1}\right) = 2\frac{\sqrt{3}^3}{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

Prema tome, zadani nepravi integral konvergira. Graf antiderivacije je prikazan na slici 7.22. Kao što se vidi iz njenog grafa, ta funkcija ima nultočke za $x = -1$ i $x = 2$, a u lijevoj nultočki $(-1,0)$ nije derivabilna.



Slika 7.22

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$

Rješenje

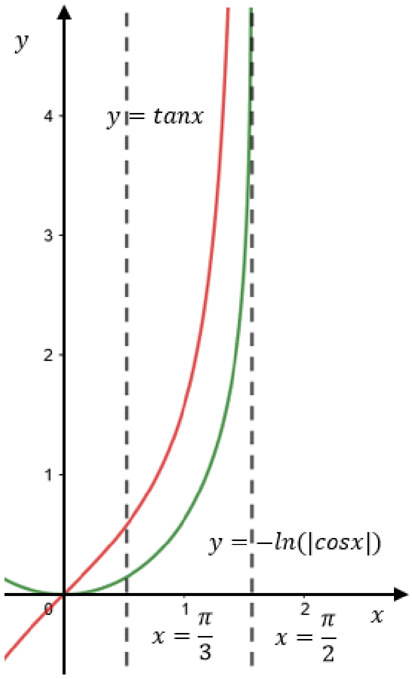
Funkcija $x \to \tan x$ nije definirana za $x = \frac{\pi}{2}$ pa se radi o nepravom integralu tipa II. Grafovi podintegralne funkcije i odgovarajuće antiderivacije prikazani su na sljedećoj slici (Slika 7.23).

Integral rješavamo promjenom diferencijala.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \lim_{\beta \to \frac{\pi}{2}^-} \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\beta} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\lim_{\beta \to \frac{\pi}{2}^-} \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\beta} \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$= -\lim_{\beta \to \frac{\pi}{2}^-} \ln \cos x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\beta} = -\lim_{\beta \to \frac{\pi}{2}^-} \ln \cos \beta + \ln \cos \frac{\pi}{3} = \infty$$

Zadani integral divergira.



Slika 7.23

7.10 Primjena određenog integrala. Površine ravninskih područja

DETALJAN OPIS:

Određeni integrali se koriste u rješavanju različitih problema. Jedna od uobičajenih primjena je izračun površine ravninskog područja omeđenog krivuljama. Ovo poglavlje predstavlja različite vrste područja i daje metode za izračunavanje njihovih površina. Dane su formule za računanje površine pomoću određenih integrala za krivulje zadane analitički, parametarskim jednadžbama, kao i za krivulje dane u polarnom koordinatnom sustavu. Pri skiciranju grafova funkcija i krivulja mogu se koristiti softverski programi GeoGebra Classic, Desmos Graphing Calculator ili neki drugi. Studenti mogu provjeriti dobivena rješenja integralnim kalkulatorom (https://www.integral-calculator.com/) koji također konstruira grafove integranda i antiderivacije.

CILJ: **istražiti metode izračuna površine ravninskih područja različitih tipova.**

Ishodi učenja:

1. Objasniti geometrijsko značenje određenog integrala.
2. Izračunati površinu ravninskih područja omeđenih krivuljama.
3. Identificirati slučajeve u kojima se područje, prije primjene formule za računanje površine, mora podijeliti na dva ili više dijelova.

Prethodno znanje: osnovna pravila integralnog i diferencijalnog računa, Newton-Leibnizova formula, svojstva funkcija, skiciranje grafa neprekidne funkcije, algebarske i trigonometrijske formule

Povezanost s problemima u pomorstvu: Izračun površine različitih specifičnih građevinskih dijelova jedno je od temeljnih pitanja u brodogradnji. Međutim, oblici su toliko složeni da se uglavnom koriste numerički izračuni. Računanje površine nekog područja dio je rješavanja problema iz fizike, npr. kod određivanja tlaka na neki objekt potrebno je izračunati površinu plohe tog objekta.

Sadržaj

1. Površina područja između grafa neprekinute funkcije i osi x
2. Površina između dvije krivulje
3. Problem složenog područja
4. Površina područja omeđenog grafom neprekinute parametarski zadane funkcije
5. Krivulja u polarnom koordinatnom sustavu
6. Zadatci
7. Rješenja zadataka

7.10.1 Površina područja između grafa neprekinute funkcije i osi x

Određeni integral nam služi kao alat za računanje površine područja u ravnini. Površina P područja omeđenog grafom neprekinute funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$, pravcima $x=a$, $x=b$ i osi x, može se izračunati formulom

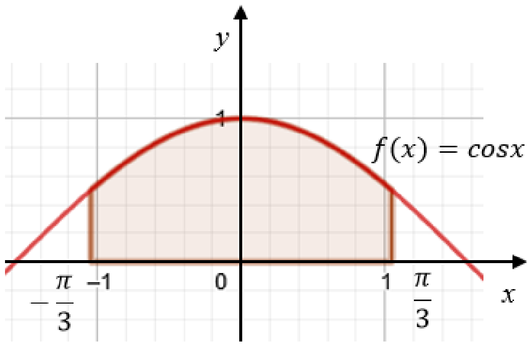
$$P=\int_a^b |f(x)|dx.$$

Primjer 1.1

Izračunajte površinu područja omeđenog krivuljama

$$x=-\frac{\pi}{3}, \qquad x=\frac{\pi}{3}, \qquad y=0, \qquad y=\cos x.$$

Rješenje: Područje je prikazano na slici 7.24.



Slika 7.24

$$P=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\cos x|dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sin\frac{\pi}{3}-0=\sqrt{3}$$

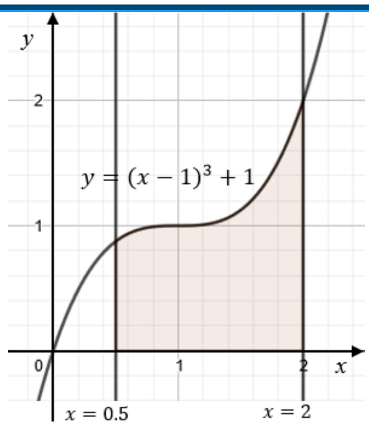
Naime, funkcija $x\to\cos x$ je parna na intervalu $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$, a znamo da za svaku parnu funkciju $f(x)$ na intervalu $[-a,a]$ (gdje je a bilo koji pozitivni broj) vrijedi

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

Primjer 1.2 Izračunajte površinu područja u ravnini omeđenog krivuljama

$$y=(x-1)^3+1, \qquad x=0.5, \qquad x=2, \qquad y=0.$$

Rješenje Područje je prikazano na sljedećoj slici.



Slika 7.25

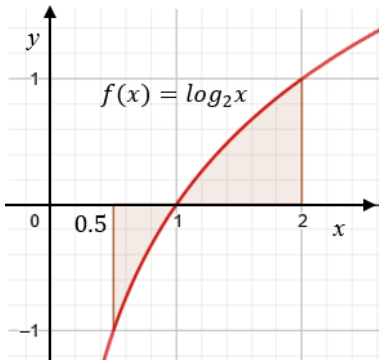
Površina P tog područja je

$$P = \int_{0.5}^{2} |(x-1)^3 + 1| dx = \int_{0.5}^{2} [(x-1)^3 + 1] dx = \int_{0.5}^{2} (x-1)^3 d(x-1) + \int_{0.5}^{2} dx$$
$$= \left[\frac{(x-1)^4}{4} + x\right]\Bigg|_{0.5}^{2} = \left(\frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{2}\right) \approx 1.73$$

Primjer 1.3 Izračunajte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x) = \log_2 x$ i pravcima

$$x = 0.5, \qquad x = 2, \qquad y = 0.$$

Rješenje Funkcija f nije pozitivna na intervalu $[0.5,1]$ i nije negativna na intervalu $[1,2]$ (Slika 7.26).



Slika 7.26

$$P = \int_{0.5}^{2} |\log_2 x| dx = \int_{0.5}^{1} |\log_2 x| dx + \int_{1}^{2} |\log_2 x| dx = \int_{0.5}^{1} (-\log_2 x) dx + \int_{1}^{2} \log_2 x \, dx$$
$$= \int_{1}^{2} \log_2 x \, dx - \int_{0.5}^{1} \log_2 x \, dx$$

Pripadni neodređeni integral rješavamo parcijalnom integracijom.

$$\int \log_2 x\,dx = \begin{vmatrix} u = \log_2 x\,, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x\ln 2}, & v = x \end{vmatrix} = x\log_2 x - \frac{1}{\ln 2}\int \frac{xdx}{x} = x\log_2 x - \frac{x}{\ln 2} + C$$

Sada koristimo dobivenu antiderivaciju za izračun površine P prema Newton-Leibnizovoj formuli.

$$P = \left(x\log_2 x - \frac{x}{\ln 2}\right)\Big|_1^2 - \left(x\log_2 x - \frac{x}{\ln 2}\right)\Big|_{0.5}^1$$
$$= \left(2 - \frac{2}{\ln 2}\right) - \left(-\frac{1}{\ln 2}\right) - \left[\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2}\right)\right] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\ln 2} \approx 0.78$$

Primjer 1.4 . Za koji $b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_1^b \frac{dx}{4\sqrt{x}} = 4\,?$$

Rješenje

$$\int_1^b \frac{dx}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - 1\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - 1\right) = 4 \quad \Big|\cdot 2$$

$$\sqrt{b} - 1 = 8$$

$$\sqrt{b} = 9 \quad \big|^2$$

$$b = 81$$

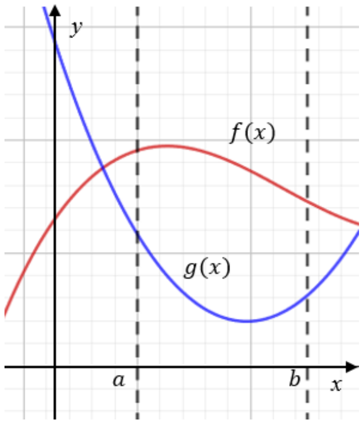
7.10.2 Površina između dvije krivulje

Ako su funkcije f i g neprekinute na intervalu $[a, b]$ i vrijedi

$$f(x) \geq g(x) \ \ za\ svaki\ x \in [a, b],$$

onda se površina P područja između krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$ na tom intervalu izražava integralom

$$\boldsymbol{P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.}$$

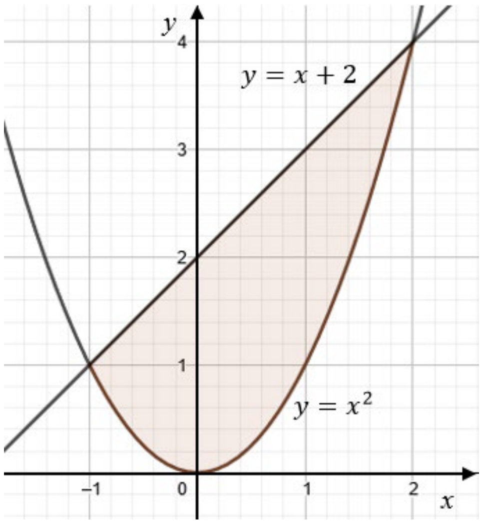


Slika 7.27

Primjer 2.2 Nađite površinu ravninskog područja omeđenog krivuljama

$$y = x^2, \qquad y = x + 2.$$

Rješenje Područje je označeno na slici 7.28. Granice integracije su apscise točaka presjeka zadanih krivulja.



Slika 7.28

Rješavamo sustav

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

izjednačavanjem ipsilona.

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Jednadžba ima dva korijena

$$x_1 = -1, \;\; x_2 = 2$$

Kako parabola $y = x^2$ omeđuje područje s donje strane, imamo

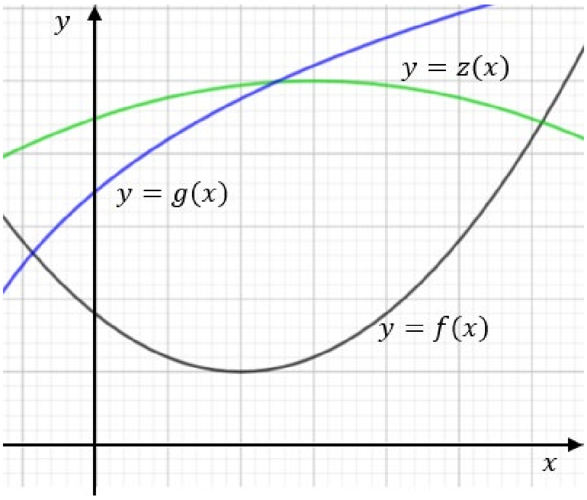
$$P = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

7.10.3 Problem složenog područja

Istražit ćemo slučaj područja omeđenog s više od dvije krivulje. Neka je npr. omeđeno krivuljama

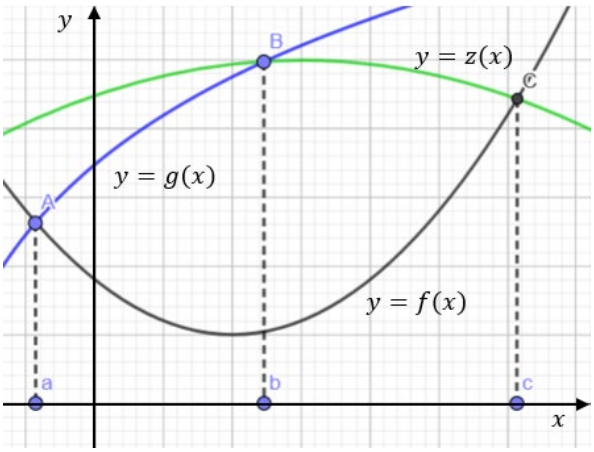
$$y = f(x), \qquad y = g(x), \qquad y = z(x)$$

kao na slici 3.1.



Slika 3.1

Uzet ćemo područje koje dvije različite krivulje, plava i zelena, omeđuju s gornje strane dok ga crna krivulja omeđuje s donje strane. Određujemo apscise sjecišta grafova koje definiraju dva zasebna područja. Prvo područje se nalazi između pravaca $x = a$ i $x = b$ te je omeđeno grafovima krivulja $y = g(x)$ i $y = f(x)$; drugo područje se nalazi između pravaca $x = b$ i $x = c$ te je omeđeno grafovima krivulja $y = z(x)$ i $y = f(x)$ (Slika 7.29).



Slika 7.29

Sastavljamo dva integrala za rješavanje problema površine cijelog područja.

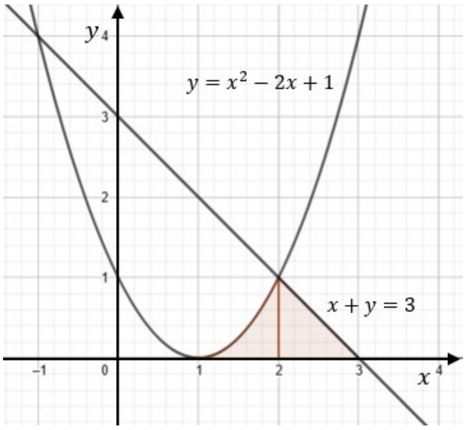
$$P = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx + \int_b^c \big(z(x) - f(x)\big)dx$$

Primjer 3.1 Izračunajte površinu područja omeđenog krivuljama

$$y = x^2 - 2x + 1, \qquad x + y = 3, \qquad y = 0.$$

Rješenje

Područje je označeno bojom na sljedećoj slici.



Slika 7.30

Rješenje tražimo u sljedeća 4 koraka:

Prvi korak. Određujemo granice područja

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x + y - 3 = 0, y = 0 \Rightarrow x = 3$$

Područje se nalazi između pravaca $x = 1$ i $x = 3$.

Korak 2.

Određujemo apscisu sjecišta krivulje $y = x^2 - 2x + 1$ i pravca $x + y = 3$

koja se nalazi unutar intervala $[1,3]$.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3 - x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Jednadžba ima dva korijena, $x = -1$ i $x = 2$. Samo za točku s apscisom $x = 2$ vrijedi

$$1 \leq x \leq 3.$$

Treći korak. Za izračunavanje površine područja, interval $[1,3]$ moramo razdijeliti na dva dijela:

$$[1,3] = [1,2] \cup [2,3]$$

i postaviti dva integrala s različitim gornjim funkcijama:

$$P = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx + \int_2^3 (3 - x)dx$$

Četvrti korak. Na kraju računamo površinu.

$$P = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx + \int_2^3 (3 - x)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Bigg|_1^2 + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3 = \left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) + \left(9 - \frac{9}{2}\right) - (6 - 2) = \frac{5}{6}$$

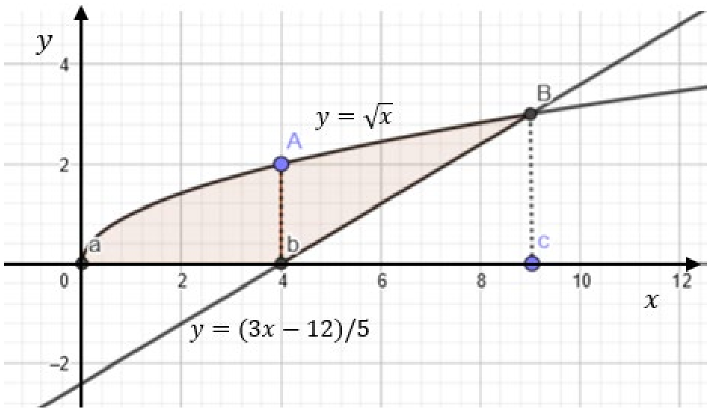
Primjer 3.2 Izračunajte površinu područja zatvorenog krivuljama

$$y = \sqrt{x}, \qquad 3x - 5y - 12 = 0, \qquad y = 0.$$

Izračunat ćemo površinu danog područja na dva različita načina.

Rješenje 1

Prvi korak. Crtamo zadano područje (Slika 7.31)



Slika 7.31

Korak 2. Određujemo granice integrala. Slika 3.4 predstavlja složeno područje čija je površina jednaka zbroju dvaju integrala. Interval integracije prvog integrala je $[0,4]$ jer pravac

$3x - 5y - 12 = 0$ siječe os x za $x = 4$. Interval integracije drugog integrala je $[4,9]$. Gornju granicu $x = 9$ možemo naći rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{3x - 12}{5} \end{cases}.$$

$$\sqrt{x} = \frac{3x-12}{5} \,\Big|\cdot 5$$

$$5\cdot\sqrt{x} = 3x - 12 \,\Big|^2$$

$$\left(5\cdot\sqrt{x}\right)^2 = (3x-12)^2$$

$$25x = 9x^2 - 72x + 144$$

$$9x^2 - 97x + 144 = 0$$

$$x \in \left\{9, \frac{16}{9}\right\}$$

Točka B ima koordinate $(9,3)$.

Treći korak. Postavljanje i rješavanje integrala

$$P = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{3x-12}{5}\right)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^9 - \left(\frac{3x^2}{10} - \frac{12}{5}x\right)\Big|_4^9$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 27 - \frac{3}{10}\cdot 65 + \frac{12}{5}\cdot 5 = 10.5$$

Rješenje 2

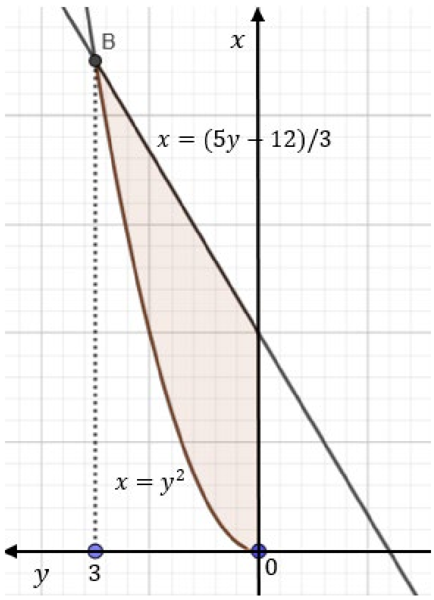
U prvom rješenju problem smo riješili izračunom dva integrala. Zarotirajmo sliku 7.31 za $90°$ u pozitivnom smjeru, tj. obrnuto od kazaljke na satu, pa zatim napišimo svaku od formula

$$y = \sqrt{x}, \qquad 3x - 5y - 12 = 0$$

u obliku $x = g(y)$ tako da y bude nezavisna, a x zavisna varijabla.

$$x = y^2, \qquad x = \frac{5y+12}{3}.$$

Tako dobivamo sliku 7.32.



Slika 7.32

Točka B ima koordinate $(9,3)$. Dakle, područje se nalazi između pravaca $y = 0$ i $y = 3$. Površinu područja možemo izračunati pomoću samo jednog integrala.

$$P = \int_0^3 \left(\frac{5y+12}{3} - y^2\right) dy = \left(\frac{5}{6}y^2 + 4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{5}{6}\cdot 9 + 12 - 9 = 10.5$$

7.10.4 Površina područja omeđenog grafom neprekinute parametarski zadane funkcije

Parametarske jednadžbe koriste se za opisivanje raznih tipova krivulja. Kružnica, elipsa, cikloida te razne vrste epicikloide i hipocikloide neke su od najpoznatijih krivulja koje se mogu izraziti parametarskim jednadžbama. Tražimo površinu područja koje je omeđeno pravcima $y = 0$, $x = a$, $x = b > a$ i grafom neprekinute funkcije $y = f(x)$ na $[a, b]$ koja je zadana parametarski jednadžbama

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

pri čemu je φ neprekinuta na $[t_1, t_2]$ i derivabilna na $\langle t_1, t_2\rangle$, $\varphi([t_1, t_2]) = [a, b]$, a

$$\varphi' > 0 \; na \; \langle t_1, t_2\rangle$$

ili

$$\varphi' < 0 \; na \; \langle t_1, t_2\rangle.$$

Krenut ćemo od formule

$$P = \int_a^b |f(x)| dx$$

i koristiti zamjenu $x = \varphi(t)$.

Ako je $\varphi' > 0$ na $\langle t_1, t_2\rangle$, onda je φ strogo rastuća funkcija na $\langle t_1, t_2\rangle$ i vrijedi

$$\varphi(t_1) = a, \qquad \varphi(t_2) = b$$

pa imamo

$$P = \int_a^b |f(x)| dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t), & f(x) = y = \psi(t) \\ & dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)| \cdot \varphi'(t) dt.$$

Ako je $\varphi' < 0$ na $\langle t_1, t_2\rangle$, onda je φ strogo padajuća funkcija na $\langle t_1, t_2\rangle$ i vrijedi

$$\varphi(t_1) = b, \qquad \varphi(t_2) = a$$

pa imamo

$$P=\int_a^b |f(x)|dx=\begin{bmatrix} x=\varphi(t), & f(x)=y=\psi(t) \\ & dx=\varphi'(t)dt \end{bmatrix}=\int_{t_2}^{t_1}|\psi(t)|\varphi'(t)dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}|\psi(t)|\cdot\left(-\varphi'(t)\right)dt.$$

Dakle, formula

$$P=\int_{t_1}^{t_2}|\psi(t)\cdot\varphi'(t)|dt$$

vrijedi u oba slučaja.

Uz oznake

$$y=\psi(t),\qquad \dot{x}=\varphi'(t),$$

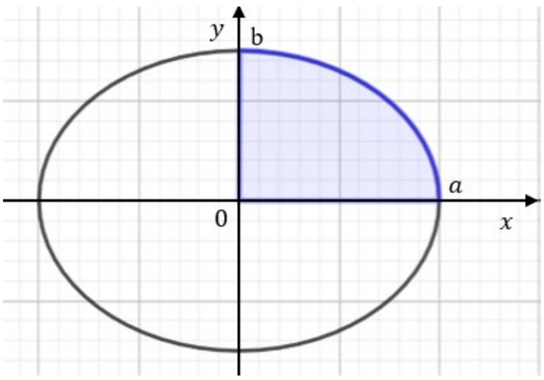
kraće pišemo

$$\boldsymbol{P=\int_{t_1}^{t_2}|y\cdot\dot{x}|dt.}$$

Primjer 4.1 Izračunajte površinu područja omeđenog elipsom.

Rješenje

Biramo elipsu sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Takva elipsa je simetrična u odnosu na koordinatne osi pa je dovoljno izračunati površinu područja omeđenog elipsom i koordinatnim osima u prvom kvadrantu (Slika 7.33).



Slika 7.33

Parametarske jednadžbe elipse su

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

pa imamo

$$P = 4\int_0^a f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = a\cos t \Rightarrow dx = -a\sin t\, dt \\ x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad x_2 = a \Rightarrow t_2 = 0 \end{matrix} \right|$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot a\sin t\, dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt$$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\, d(2t) = 2ab \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - ab\sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\frac{\pi}{2} = ab\pi$$

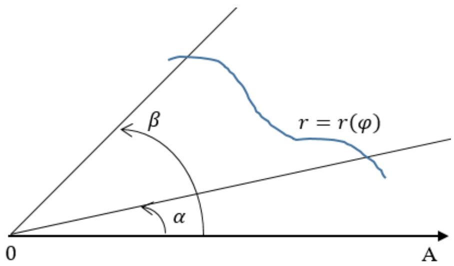
7.10.5 Krivulja u polarnom koordinatnom sustavu

Krivuljni sektor na slici 7.34 je omeđen grafom funkcije u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$ i zrakama

$$\varphi = \alpha, \qquad \varphi = \beta.$$

Površinu P tog sektora možemo naći pomoću formule

$$\boldsymbol{P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi}$$

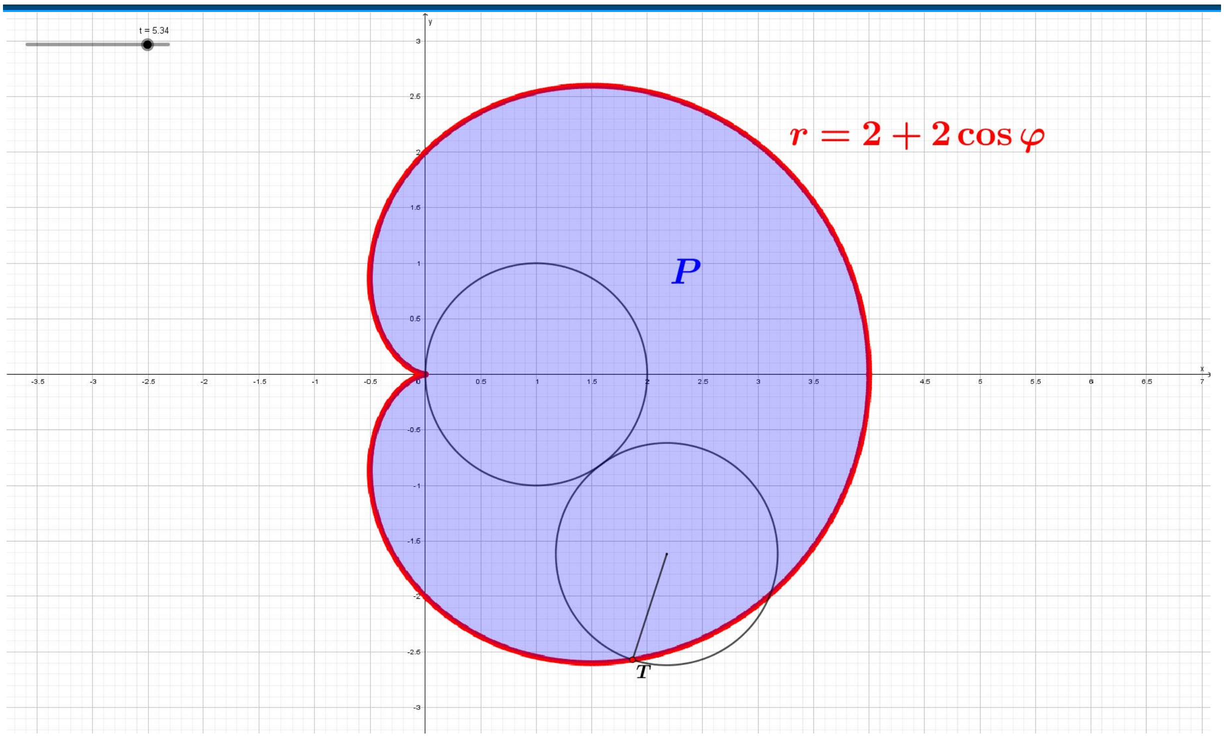


Slika 7.34

Primjer 5.1 Izračunajte površinu područja omeđenog kardioidom $r = 2 + 2\cos\varphi$.

Rješenje

Zadana kardioida je ravninska krivulja koju opisuje točka T kružnice polumjera $r = 1$ pri kotrljanju bez klizanja po kružnici $(x-1)^2 + y^2 = 1$ s njene vanjske strane (Slika 7.35).



Slika 7.35

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+2\cos\varphi)^2 d\varphi = 2\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 2\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}(3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi)d\varphi = \left(3\varphi+4\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi$$

7.10.6 Vježbe

1. Izračunajte površinu područja između krivulje $y = \sin x$ i osi x na intervalu $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right]$.
2. Izračunajte površinu područja zatvorenog s pravcima $y = x$, $x + 2y - 6 = 0$ i osi x.
3. Izračunajte površinu područja između krivulja $y = (x+2)^2$ i $y = 4 - x^2$.
4. Izračunajte površinu područja zatvorenog s osi y i krivuljama

$$y = 0.5^x, \qquad y = 0.5x \cdot \sqrt{1+x^2}, \qquad x = -2.$$

5. Izračunajte površinu područja između osi x i jednog svoda cikloide

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}.$$

6. Izračunajte površinu jedne latice polarne ruže $r = 4\cos 3\varphi$.

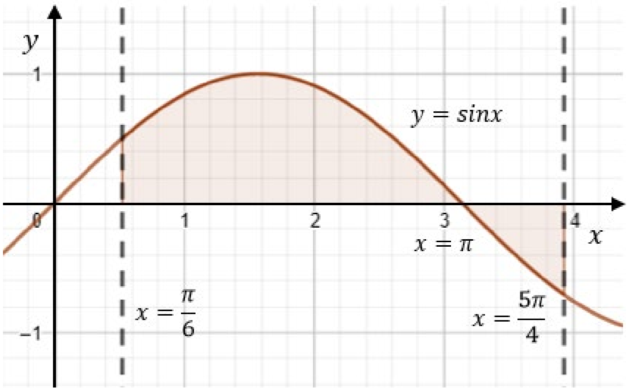
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.10.7 Rješenja

1. Izračunajte površinu područja između krivulje $y = \sin x$ i osi x na intervalu $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Rješenje

Konstruiramo krivulju i okomite linije (Slika 7.36).



Slika 7.36

Funkcija $y = \sin x$ mijenja predznak u točki $x = \pi$ na zadanom intervalu i vrijedi

$$\sin x \geq 0 \;\; za\; svaki\; x \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right],$$

$$\sin x \leq 0 \;\; za\; svaki\; x \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$$

pa imamo

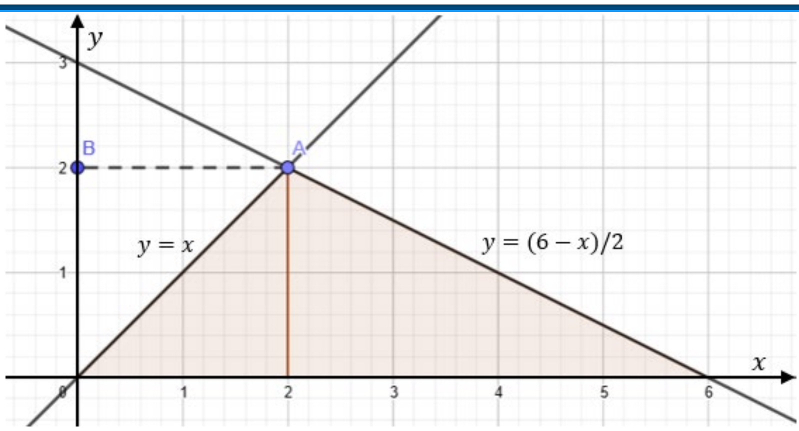
$$P = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x| dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} (-\sin x) dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= -\left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{6}\right) + \cos \frac{5\pi}{4} - \cos \pi = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{4 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \approx 2.16$$

2. Izračunajte površinu područja omeđenog ravnim crtama $y = x, x + 2y - 6 = 0$ i osi x.

Rješenje

Skicirajmo pravce, označimo područje i projicirajmo ga na os y (Slika 7.37).



Slika 7.37

Izračunajmo koordinate točke A (sjecište).

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{6-x}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{6-x}{2} \,\Big|\, \cdot 2$$

$$2x = 6 - x$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

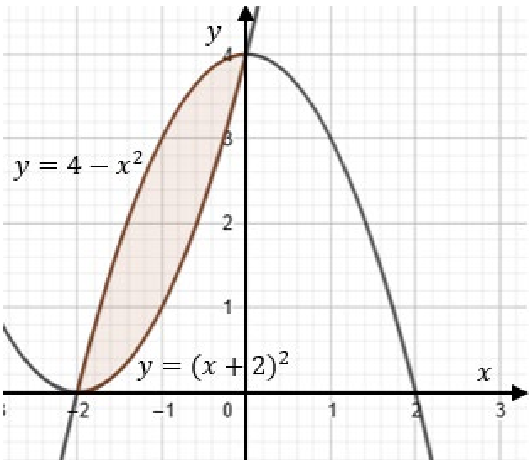
Točka A ima koordinate $(2,2)$. Područje integracije po varijabli y je interval $[0,2]$.

Iz $y = \frac{6-x}{2}$ slijedi $x = 6 - 2y$.

$$P = \int_0^2 (6 - 2y - y)dy = \left(6y - \frac{3}{2}y^2\right)\Big|_0^2 = 12 - 3 \cdot 2 = 6$$

3. Izračunajte površinu područja između krivulja $y = (x+2)^2$ i $y = 4 - x^2$.

Rješenje



Slika 7.38

Područje se nalazi između pravaca $x = -2$ i $x = 0$.

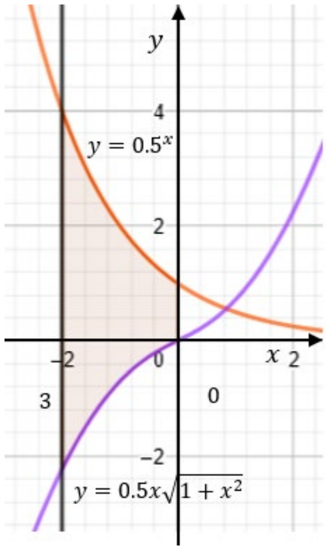
$$P = \int_{-2}^{0} [4 - x^2 - (x+2)^2]dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} - \frac{(x+2)^3}{3}\right]\Bigg|_{-2}^{0}$$
$$= 0 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

4. Izračunajte područje zatvorenog s osi y i krivuljama

$$y = 0.5^x, \qquad y = 0.5x \cdot \sqrt{1+x^2}, \qquad x = -2.$$

Rješenje

Područje je prikazano na slici 7.4.



Slika 7.39

$$P = \int_{-2}^{0} \left(0.5^x - 0.5x \cdot \sqrt{1+x^2}\right) dx = \int_{-2}^{0} 0.5^x dx - \int_{-2}^{0} 0.5x \cdot \sqrt{1+x^2} dx$$

Drugi integral lako rješavamo supstitucijom.

$$\int_{-2}^{0} 0.5x \cdot \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} \sqrt{1+x^2} \cdot 2xdx$$
$$= \left| \begin{matrix} u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ x_1 = -2 \Rightarrow u_1 = 5, \quad x_2 = 0 \Rightarrow u_2 = 1 \end{matrix} \right|$$
$$= \frac{1}{4}\int_{5}^{1} \sqrt{u}du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u\sqrt{u}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{5}^{1} = \frac{1}{6}(1 - 5\sqrt{5})$$

Dakle,

$$P = \frac{0.5^x}{\ln 0.5}\Big|_{-2}^{0} - \frac{1-5\sqrt{5}}{6} = \frac{1}{\ln 0.5}(1-0.5^{-2}) + \frac{5\sqrt{5}-1}{6} \approx 6.02.$$

5. Izračunajte površinu područja između osi x i jednog svoda cikloide

$$\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}.$$

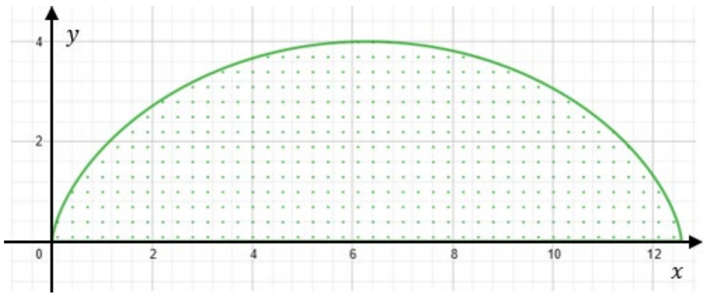
Rješenje

Cikloida je transcendentna periodična krivulja u ravnini koju opisuje neka točka na kružnici u toj ravnini kada se kružnica kotrlja bez klizanja po zadanom pravcu u istoj ravnini. Izabrat ćemo svod cikloide koji se dobije na $t-$ intervalu $[0,2\pi]$ (Slika 7.40). Taj svod se nalazi između pravaca $x = 2(0-\sin 0) = 0$ i $x = 2(2\pi - \sin 2\pi) = 4\pi$, a vrijedi

$$y \geq 0 \quad \text{i} \quad \dot{x} = 2(1-\cos t) > 0 \;\; za\ svaki\ t \in \langle 0,2\pi\rangle$$

pa (za $f(x) = y$) imamo

$$P = \int_0^{4\pi} f(x)dx = \begin{bmatrix} x = 2(t-\sin t), & f(x) = y = 2(1-\cos t) \\ & dx = 2(1-\cos t)dt \end{bmatrix}$$
$$= \int_0^{2\pi} 2(1-\cos t)2(1-\cos t)dt = 4\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$$
$$= 4\int_0^{2\pi}(1-2\cos t)dt + 2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt = (4t-8\sin t+2t+\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}$$
$$= 8\pi + 4\pi = 12\pi$$

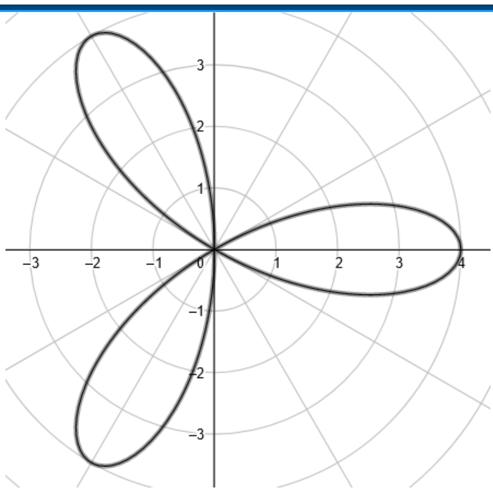


Slika 7.40

6. Izračunajte površinu jedne latice polarne ruže $r = 4\cos 3\varphi$.

Rješenje

Zadana polarna ruža ima tri latice:



Slika 7.41

Računamo površinu P latice čija je simetrala polarna os. Stoga je dovoljno izračunati pa udvostručiti površinu te latice iznad simetrale. Najprije moramo odrediti gornju granicu integrala. Treba naći $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ takav da je $r = 0$.

$$4\cos 3\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4\cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{16}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = 8\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{3}\pi$$

7.11 Primjena određenog integrala. Duljina luka

DETALJAN OPIS:

Određenim integralima mogu se računati duljine (lukova) različitih krivulja. U ovom poglavlju se izvodi formula za izračun duljine luka. Iz te formule se može izvesti formula za duljinu luka krivulje u parametarskom i u polarnom obliku. Sadržaj upotpunjuju grafovi krivulja nacrtani u GeoGebri i Desmosu.

Cilj: **pokazati kako se računa duljina luka krivulje u Kartezijevom koordinatnom sustavu i u polarnom koordinatnom sustavu.**

Ishodi učenja:

1. Objasniti primjenu određenog integrala u rješavanju geometrijskih zadataka.
2. Izračunati duljinu luka ravninskih krivulja.

Prethodno znanje: osnovna pravila integralnog i diferencijalnog računa; Newton-Leibnizova formula, svojstva funkcija, ispitivanje toka i crtanje grafa funkcije, algebarske i trigonometrijske formule

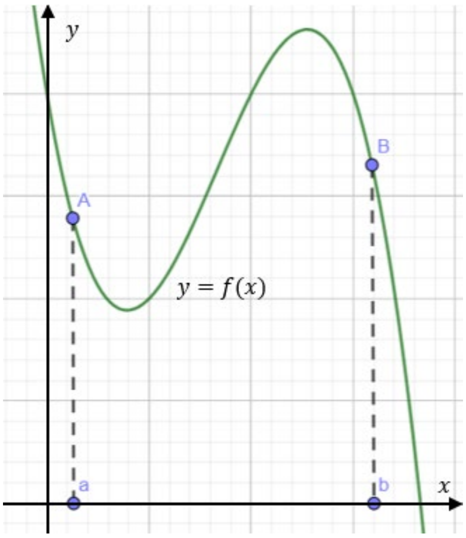
Povezanost s problemima u pomorstvu: Primjenom određenog integrala moguće je izračunati duljine različitih objekata ako te objekte promatramo kao grafove krivulja – funkcija u ravnini. Na primjer, integracijom je moguće izračunati duljinu užeta koje visi između dva nosača.

Sadržaj

1. Formula za računanje duljine luka
2. Duljina luka parametarski zadane krivulje
3. Duljina luka polarne krivulje
4. Zadatci
5. Rješenja zadataka

7.11.1 Formula za računanje duljine luka

Neka je funkcija f neprekinuto derivabilna na segmentu $[a,b]$. To znači da je f' neprekinuta funkcija na $[a,b]$. Primijetimo da je onda i f neprekinuta funkcija na $[a,b]$. Crtanjem grafa funkcije f nad segmentom $[a,b]$ dobivamo luk $\widehat{AB}$ krivulje $y=f(x)$ koji se nalazi između pravaca $x=a$ i $x=b$ (Slika 7.42).



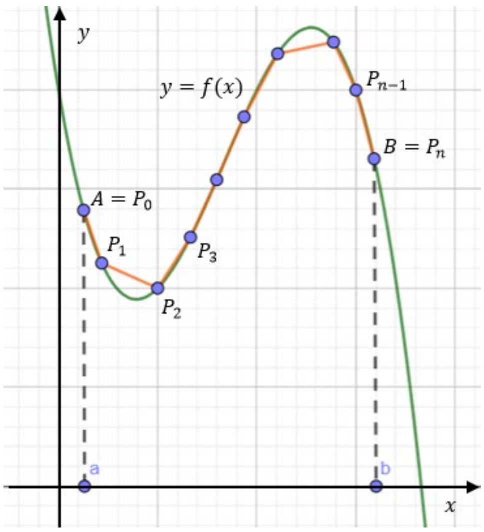
Slika 7.42

Formirat ćemo izlomljenu crtu (Slika 7.43) odabirom točaka

$$A=P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n=B,$$

gdje je

$$P_i=(x_i,y_i)=\left(x_i,f(x_i)\right)\ za\ svaki\ i\in\{0,1,2,\dots,n\}.$$



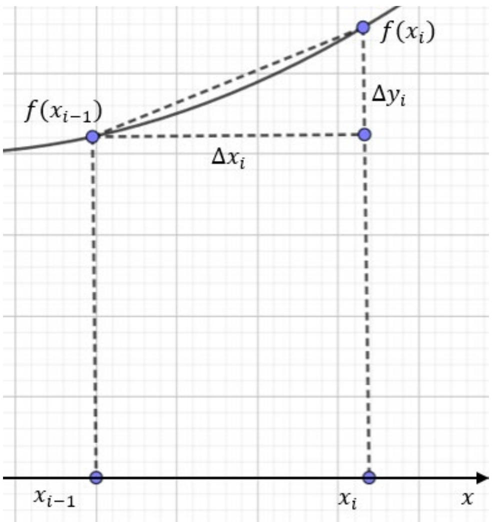
Slika 7.43

Po Pitagorinom poučku, duljina Δs_i dužine $\overline{P_{i-1}P_i}$ na slici 1.3 za svaki $i \in \{1,2,\dots,n\}$ iznosi

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

gdje je

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$



Slika 7.44

Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti, za svaki $i \in \{1,2,\dots,n\}$ postoji $\alpha_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ takav da je

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\alpha_i).$$

Približna vrijednost duljine s luka $\widehat{AB}$ je

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\alpha_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

Rezultat će biti točniji što je broj $\max\{\Delta x_i : i \in \{1,2,\dots,n\}\}$ manji. Dakle,

$$\boldsymbol{s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\alpha_i)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.}$$

Primjer 1.1 Izračunajte duljinu dužine smještene na pravcu $y = 3x - 2$ između pravaca $x = -2$ i $x = 3$.

Rješenje

Prije primjene formule treba derivirati funkciju $y = 3x - 2$.

$$y' = (3x - 2)' = 3$$

Onda je

$$s = \int_{-2}^{3} \sqrt{1+3^2}dx = \sqrt{10}\int_{-2}^{3} dx = \sqrt{10}x\Big|_{-2}^{3} = \sqrt{10}(3+2) = 5\sqrt{10} \approx 15.8.$$

7.11.2 Duljina luka parametarski zadane krivulje

Neka je $\widehat{AB}$ luk grafa neprekinuto derivabilne funkcije $y = f(x)$ između pravaca $x = a$ i $x = b > a$.

Pretpostavimo da je luk $\widehat{AB}$ zadan parametarskim jednadžbama

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

pri čemu su φ i ψ neprekinuto derivabilne na intervalu $[t_1, t_2]$ takvom da je $\varphi([t_1, t_2]) = [a, b]$ te je

$$\varphi' > 0 \; na \; \langle t_1, t_2 \rangle$$

ili

$$\varphi' < 0 \; na \; \langle t_1, t_2 \rangle.$$

Ako je $\varphi' > 0 \; na \; \langle t_1, t_2 \rangle$, onda je

$$\varphi(t_1) = a \quad \text{i} \quad \varphi(t_2) = b$$

pa imamo

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt \\ f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{bmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt.$$

Ako je $\varphi' < 0 \; na \; \langle t_1, t_2 \rangle$, onda je

$$\varphi(t_1) = b \quad \text{i} \quad \varphi(t_2) = a$$

pa imamo

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt \\ f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{bmatrix} = -\int_{t_2}^{t_1} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt.$$

Uz oznake

$$\dot{x} = \varphi'(t), \qquad \dot{y} = \psi'(t),$$

za oba slučaja vrijedi

$$\boldsymbol{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.}$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Primjer 2.1

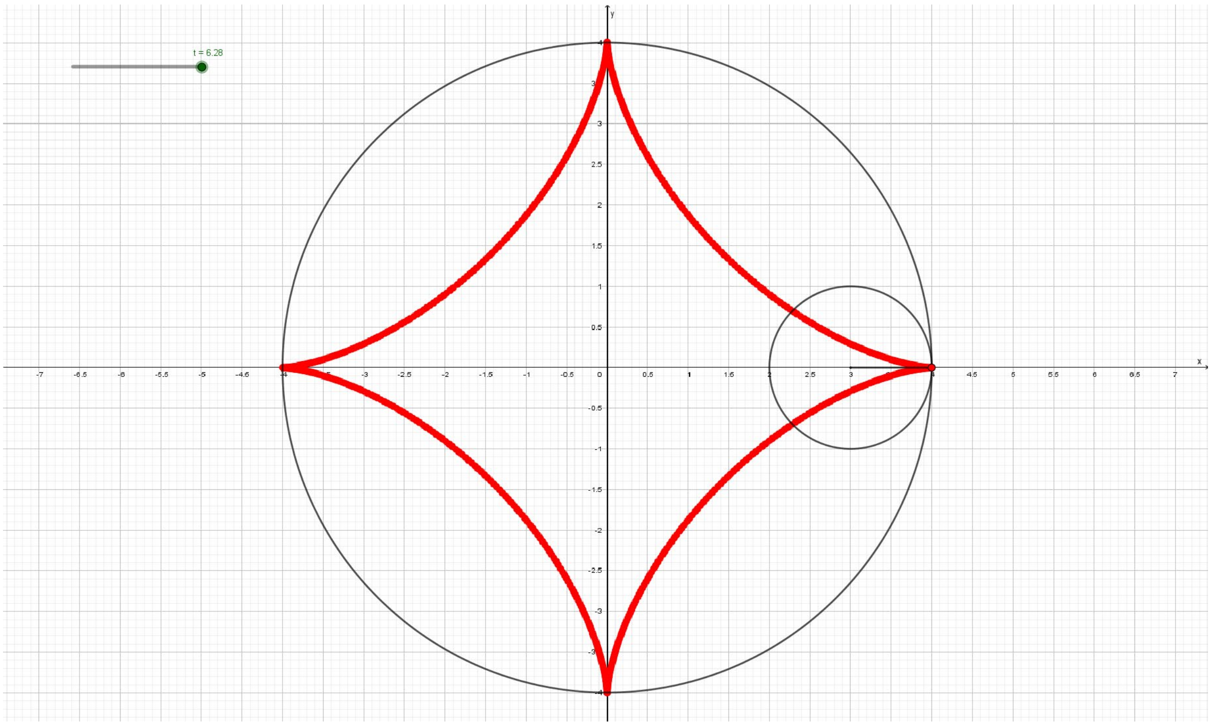
Izračunajte duljinu luka astroide

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$$

Rješenje

Zadana astroida je krivulja koju opisuje točka kružnice polumjera $r = 1$ kada se ta kružnica kotrlja bez klizanja po unutarnjoj strani kružnice polumjera $R = 4r = 4$ čije je središte u ishodištu (Slika 7.45). Parametar t je kut. Za točno jedan obilazak astroide potrebno je uzeti $t -$ interval širine 2π.

Birat ćemo interval $[0,2\pi]$.



Slika 7.45

Krivulja je simetrična s obzirom na os y i centralno simetrična s obzirom na ishodište. Stoga je dovoljno izračunati duljinu četvrtine astroide u prvom kvadrantu gdje se parametar t mijenja od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

Prije računanja integrala, treba naći derivacije $\dot{x}$ i $\dot{y}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) \\ \dot{y} = 4 \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t \end{cases}$$

Duljina s zadane astroide je

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(4 \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)\right)^2 + (4 \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{144\cos^4 t \sin^2 t + 144\sin^4 t\cos^2 t}\, dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{144\cos^2 t \sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 12\sin t\cos t\, dt = 48\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) = 48\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 24(1-0) = 24$$

7.11.3 Duljina luka polarne krivulje

Duljinu luka s polarne krivulje $r = r(\varphi)$ između zraka $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta > \alpha$ računamo integralom

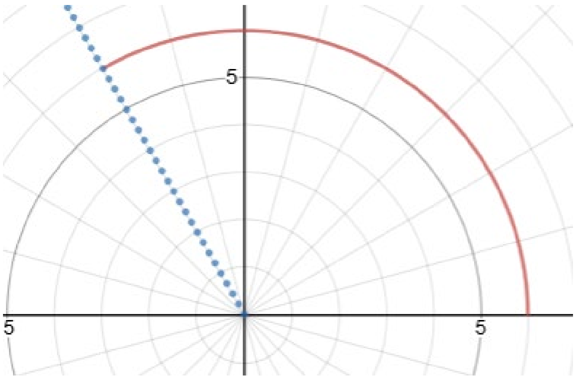
$$\boldsymbol{s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.}$$

Primjer 3.1

Izračunajte duljinu luka kružnice $r = 6$ između zraka $\varphi = 0$ i $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Rješenje

Traži se duljina trećine kružnice polumjera 6 sa središtem u ishodištu (Slika 7.46).



Slika 7.46

Kako je $r' = 0$, duljina luka je

$$s = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{36+0}d\varphi = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 6d\varphi = 6\varphi\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{3}} = 4\pi.$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.11.4 Vježbe

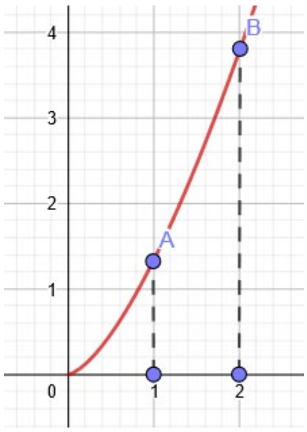
1. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ između pravaca $x = 1$ i $x = 2$.
2. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln x$ između pravaca $x = 1$ i $x = \sqrt{2}$.
3. Nađite duljinu jednog svoda cikloide s parametarskim jednadžbama
$$\begin{cases} x = 2(1 - \sin t) \\ y = 2(t - \cos t) \end{cases}.$$
4. Izračunajte duljinu luka kružnice $r = 4\cos\varphi$ između polarnih zraka $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ i $\varphi = \frac{\pi}{5}$.

7.11.5 Rješenja

1. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ između pravaca $x = 1$ i $x = 2$.

Rješenje

Slika 7.47 prikazuje dio grafa zadane krivulje koji sadrži luk $\widehat{AB}$ čija se duljina traži.



Slika 7.47

Najprije određujemo derivaciju.

$$y' = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = 2\sqrt{x}$$

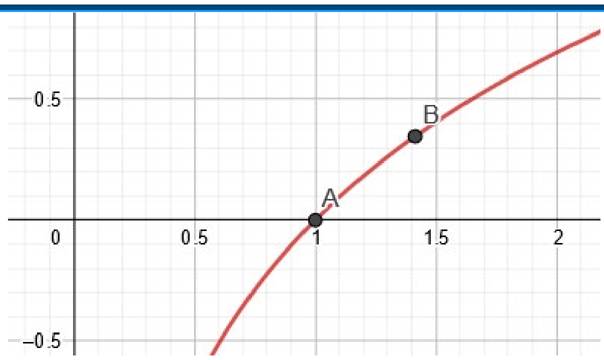
Koristeći formulu za duljinu luka, dobivamo

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(2\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + 4x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = 1 + 4x \Rightarrow du = 4dx \\ x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = 5, \qquad x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 9 \end{matrix} \right|$$
$$= \frac{1}{4}\int_5^9 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_5^9 = \frac{1}{6}\left(3^3 - \sqrt{5^3}\right) = \frac{1}{6}\left(27 - 5\sqrt{5}\right) \approx 2.64.$$

2. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln x$ između pravaca $x = 1$ i $x = \sqrt{2}$.

Rješenje

Slika 7.48 prikazuje luk $\widehat{AB}$ čija se duljina traži.



Slika 7.48

Derivacija funkcije $y = \ln x$ je

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Da bismo izračunali integral, koristimo algebarsku transformaciju integranda i primjenjujemo zamjenu.

$$\begin{aligned}
s &= \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,xdx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{x^2+1}, & x^2 = u^2 - 1, & xdx = udu \\ x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = \sqrt{2}, & x_2 = \sqrt{2} \Rightarrow u_2 = \sqrt{3} & \end{matrix} \right| \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u}{u^2-1}\,udu = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2-1}\,du \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} du + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2-1}\,du = \left(u + \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{3} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) \approx 0.54
\end{aligned}$$

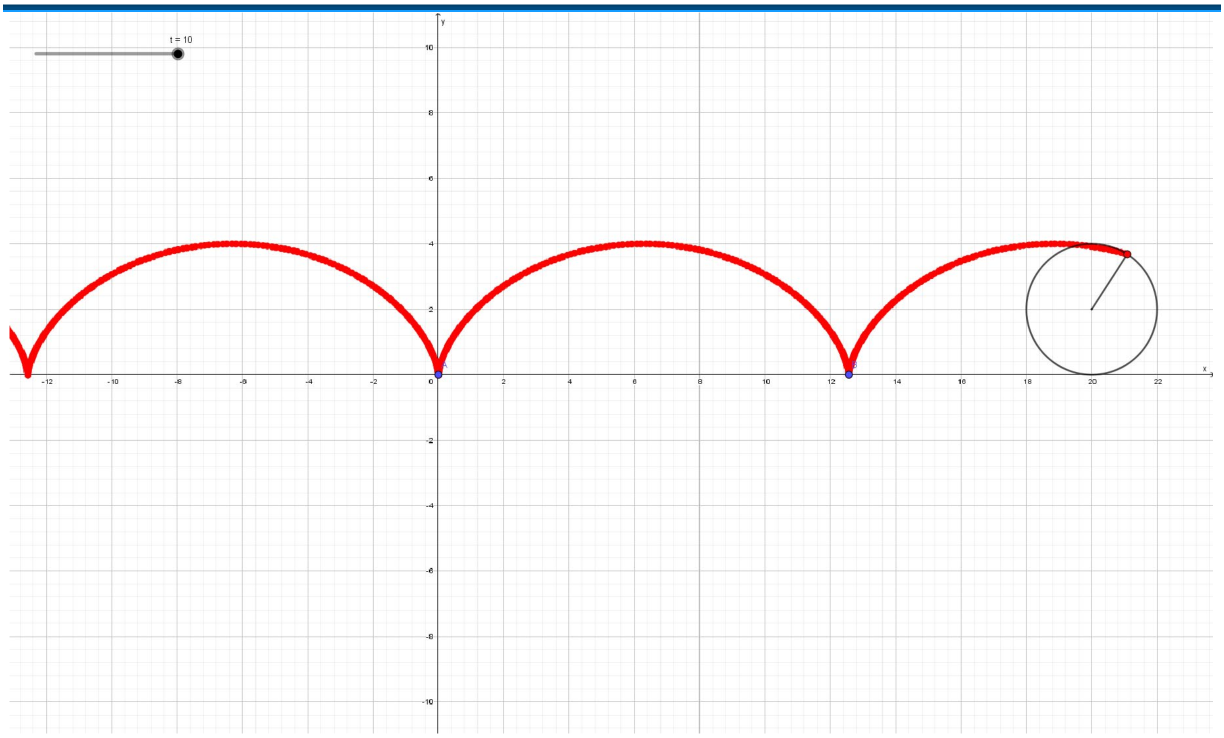
3. Nađite duljinu jednog svoda cikloide s parametarskim jednadžbama

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}.$$

Rješenje

Zadana cikloida je krivulja koju opisuje točka na kružnici polumjera $R = 2$ kada se ta kružnica kotrlja bez klizanja po pravcu $y = 0$.

Biramo svod $\overset{\frown}{AB}$ na slici 5.3 koji se dobiva za $t \in [0,2\pi]$.



Slika 7.49

Najprije određujemo derivacije.

$$\dot{x} = 2(1 - \cos t)$$
$$\dot{y} = 2\sin t$$

Zatim računamo izraz $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$.

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4(1 - \cos t)^2 + 4\sin^2 t = 4(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$= 4(2 - 2\cos t) = 8 \cdot 2\sin^2\frac{t}{2} = 16\sin^2\frac{t}{2}$$

Tu su se koristile trigonometrijske formule:

$$\mathbf{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

$$\mathbf{1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}}$$

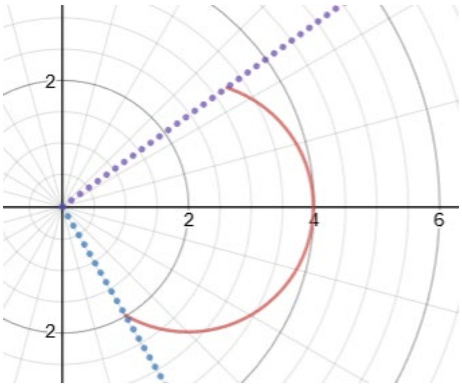
Duljina svoda je

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 4\sin\frac{t}{2}dt = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -8(\cos\pi - \cos 0) = -8\cdot(-2) = 16$$

4. Izračunajte duljinu luka kružnice $r = 4\cos\varphi$ između polarnih zraka $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ i $\varphi = \frac{\pi}{5}$.

Rješenje

Dio kružnice čija se duljina traži prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 7.50

Računamo r' pa transformiramo izraz $r^2 + r'^2$.

$$r' = -4\sin\varphi$$

$$r^2 + r'^2 = 16\cos^2\varphi + 16\sin^2\varphi = 16$$

Prema tome,

$$s = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{5}} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{5}} \sqrt{16}\,d\varphi = 4\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{5}} = 4\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{32}{15}\pi.$$

7.12 Primjena određenog integrala. Volumen rotacijskog tijela

DETALJAN OPIS:

Ovo poglavlje uvodi glavna načela za računanje volumena rotacijskog tijela. Razmatraju se različiti primjeri u kojima tijela nastaju rotiranjem područja omeđenih elementarnim krivuljama. Objašnjene su neke složene konstrukcije. Opisan je i slučaj kada tijelo nastaje vrtnjom područja omeđenog parametarski zadanom krivuljom. Sadržaj je prožet Geogebrinim slikama grafova i ploha.

CILJ: **prikazati metode izračuna volumena rotacijskog tijela.**

Ishodi učenja:

1. Protumačiti primjenu određenog integrala u rješavanju geometrijskih zadataka.
2. Odrediti područje koje rotira i objasniti kakvo tijelo nastaje rotacijom.
3. Izračunati volumen rotacijskog tijela.

Prethodno znanje: osnovna pravila integralnog i diferencijalnog računa, Newton-Leibnizova formula, svojstva funkcija, ispitivanje toka i crtanje grafa neprekidne funkcije, algebarski i trigonometrijski identiteti

Povezanost s problemima u pomorstvu: Volumen je vrlo važan koncept ako govorimo o kapacitetu skladišta tereta, kapacitetu spremnika za loživo ulje ili spremnika za balastnu vodu, spremnicima ulja za podmazivanje ili drugima. Važno je znati koliko materijala treba za proizvodnju određenog dijela s određenim volumenom. Pri projektiranju brodske inženjerske opreme neophodni su izračuni volumena kontejnera, kotlova i spremnika.

Sadržaj

1. Volumen tijela nastalog rotacijom područja oko osi x
2. Volumen tijela nastalog rotacijom područja između dvije krivulje
3. Rotacija područja oko osi y
4. Rotacija područja (s jedne strane) omeđenog parametarski zadanom krivuljom
5. Zadatci
6. Rješenja zadataka

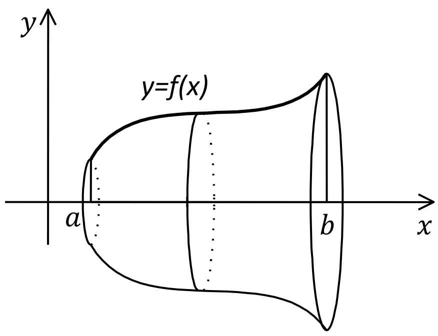
7.12.1 Volumen tijela nastalog rotacijom područja oko osi x

Definicija: **Rotacijsko tijelo** je tijelo koje nastaje rotacijom područja u ravnini omeđenog krivuljama u istoj ravnini oko pravca (os rotacije) u istoj ravnini.

Neka je f neprekinuta funkcija na intervalu $[a, b]$.

Razmotrimo rotacijsko tijelo (Slika 7.51) nastalo okretanjem **oko osi $\boldsymbol{x}$** područja u ravnini xy omeđenog krivuljama

$$x = a, \qquad x = b, \qquad y = 0, \qquad y = f(x).$$



Slika 7.51

Volumen tog tijela može se izračunati formulom

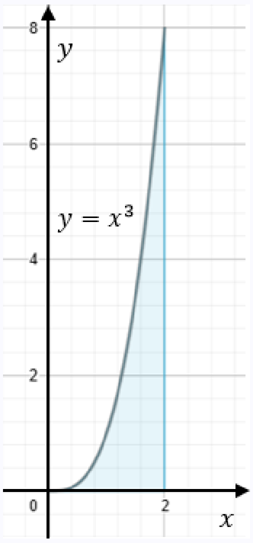
$$\boldsymbol{V_x = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.}$$

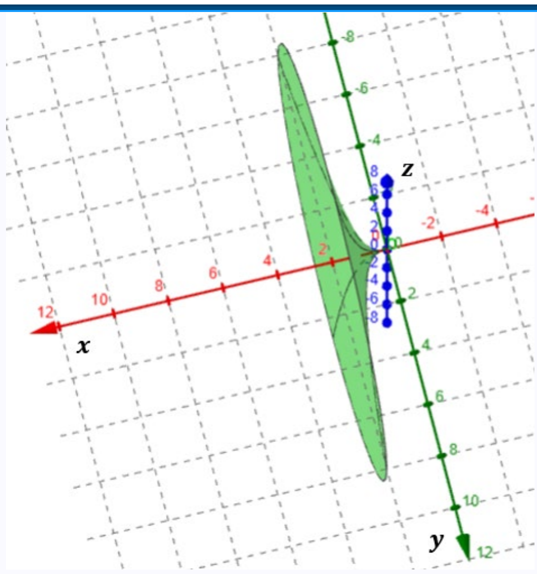
Primjer 1.1

Nađimo volumen tijela koje nastaje rotacijom područja omeđenog krivuljama

$$y = 0, \qquad x = 0, \qquad x = 2, \qquad y = x^3$$

oko osi x. Područje koje rotira je označeno na slici 7.52. Slika 7.53 prikazuje tijelo koje nastaje okretanjem tog područja oko osi x.





Slika 7.52

Slika 7.53

Volumen tog tijela je

$$V_x = \pi \int_0^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^2 x^6 dx = \pi \frac{x^7}{7}\Big|_0^2 = \frac{2^7}{7}\pi = \frac{128}{7}\pi \approx 57.45$$

7.12.2 Volumen tijela nastalog rotacijom područja između dvije krivulje

Neka su funkcije f_1 i f_2 takve da je $f_1 \leq f_2$ na intervalu $[a, b]$. Slika 7.54 prikazuje grafove jednog para takvih funkcija.

Volumen tijela koje nastaje rotacijom područja omeđenog krivuljama

$$x = a, \qquad x = b, \qquad y = f_1(x), \qquad y = f_2(x)$$

oko osi x (Slika 7.55) računa se na sljedeći način

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V_x = V_{x2} - V_{x1} = \pi \int_a^b \left(f_2(x)\right)^2 dx - \pi \int_a^b \left(f_1(x)\right)^2 dx} \\ \boldsymbol{= \pi \int_a^b \left[\left(f_2(x)\right)^2 - \left(f_1(x)\right)^2\right] dx,} \end{aligned}$$

gdje je

$$V_{x2} = \pi \int_a^b \left(f_2(x)\right)^2 dx$$

volumen tijela koje nastaje rotacijom područja omeđenog krivuljama

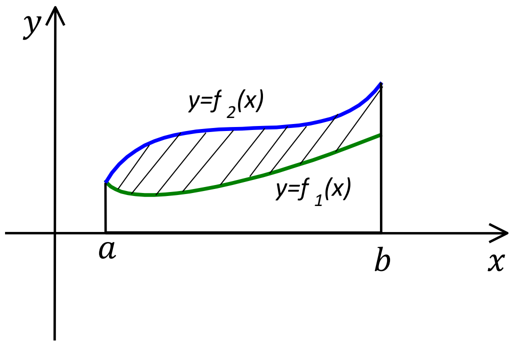
$$y = 0, \qquad x = a, \qquad x = b, \qquad y = f_2(x),$$

a

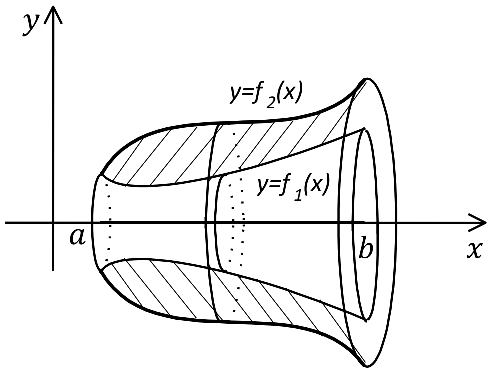
$$V_{x1} = \pi \int_a^b \left(f_1(x)\right)^2 dx$$

volumen tijela koje nastaje rotacijom područja omeđenog krivuljama

$$y = 0, \qquad x = a, \qquad x = b, \qquad y = f_1(x).$$



Slika 7.54



Slika 7.55

Primjer 2.1

Nađimo volumen tijela dobivenog rotiranjem područja u prvom kvadrantu omeđenog krivuljama

$$y = 4x \quad \text{i} \quad y = x^3$$

oko osi x.

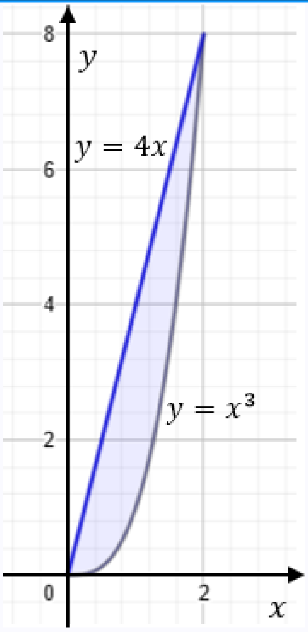
Skiciramo područje koje rotira (Slika 7.56) i tijelo nastalo rotacijom (Slika 7.57).

Sjecišta krivulja su točke $(0,0)$ i $(2,8)$ pa se područje koje rotira nalazi između pravaca $x = 2$ i $x = 8$.

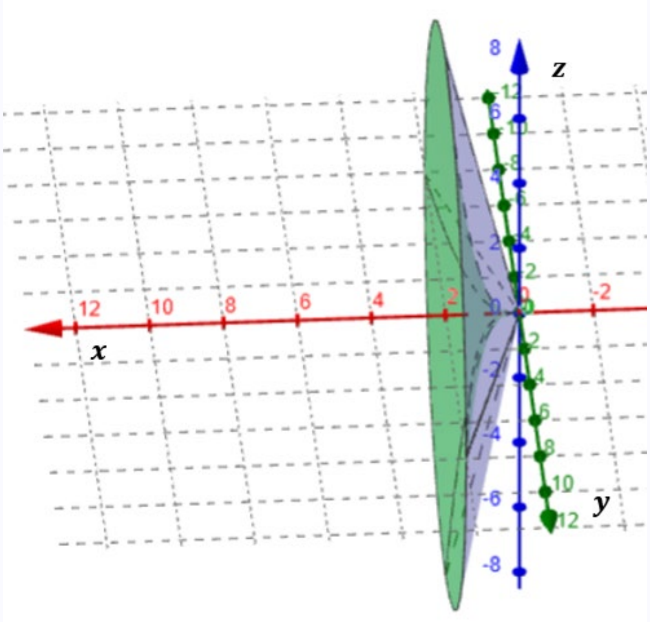
Koristimo formulu:

$$V_x = \pi \int_a^b \left[\left(f_2(x)\right)^2 - \left(f_1(x)\right)^2\right] dx$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Slika 7.56



Slika 7.57

Ovdje je

$$V_x = \pi \int_0^2 [(4x)^2 - (x^3)^2] dx = \pi \int_0^2 (16x^2 - x^6) dx = \pi \left(\frac{16}{3} x^3 - \frac{x^7}{7} \right) \Bigg|_0^2$$
$$= \pi \left(\frac{128}{3} - \frac{128}{7} \right) = \frac{512}{21} \pi \approx 76.6$$

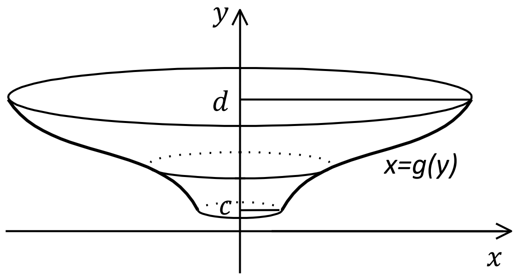
7.12.3 Rotacija oko osi y

Volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi y područja omeđenog krivuljama

$$y = c, \qquad y = d, \qquad x = 0, \qquad x = g(y),$$

gdje je g neprekinuta funkcija na $y -$ intervalu $[c, d]$, može se naći pomoću formule

$$\boldsymbol{V_y = \pi \int_c^d \left(g(y)\right)^2 dy.}$$



Slika 7.58

Volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi y područja omeđenog krivuljama

$$y = c, \qquad y = d, \qquad x = g_1(y), \qquad x = g_2(y),$$

gdje su g_1 i g_2 neprekinute funkcije na $[c, d]$ takve da je

$$|g_1(y)| \leq |g_2(y)| \;\; za\; svaki\; y \in [c, d],$$

izračunava se formulom

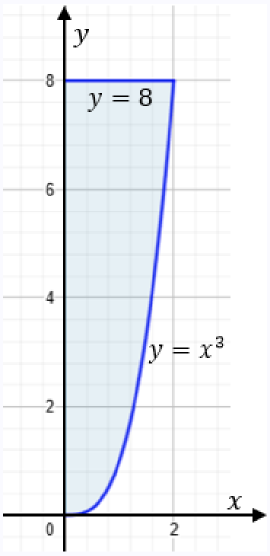
$$\boldsymbol{V_y = \pi \int_c^d \left[\left(g_2(y)\right)^2 - \left(g_1(y)\right)^2 \right] dy.}$$

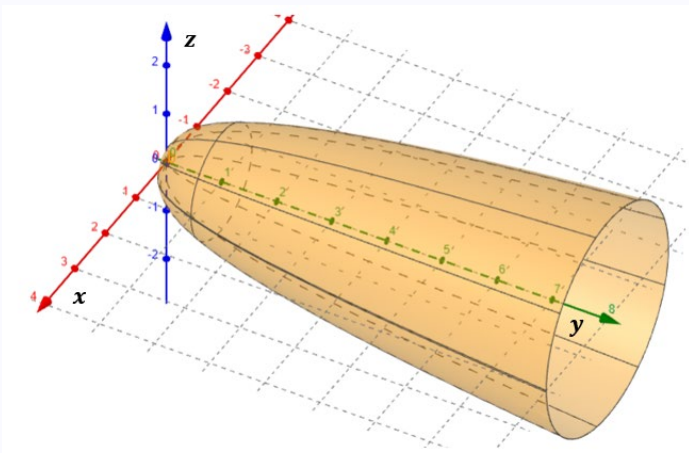
Primjer 3.1

Tražimo volumen tijela dobivenog okretanjem oko osi y područja omeđenog krivuljama

$$y = 8, \qquad y = x^3 \;\; \text{i} \;\; \text{osi } y.$$

Područje je skicirano na slici 7.59. Rotacijsko tijelo je skicirano na slici 7.60.





Slika 7.59

Slika 7.60

Koristimo formulu

$$V_y = \pi \int_c^d \left(g(y)\right)^2 dy.$$

Iz jednadžbe $y = x^3$ izražavamo x.

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Onda je

$$V_y = \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^8 = \pi \frac{3}{5} \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = \frac{96}{5}\pi \approx 60.32.$$

Primjer 3.2

Područje omeđeno krivuljama

$$x = 2, \qquad y = 0, \qquad y = x^3,$$

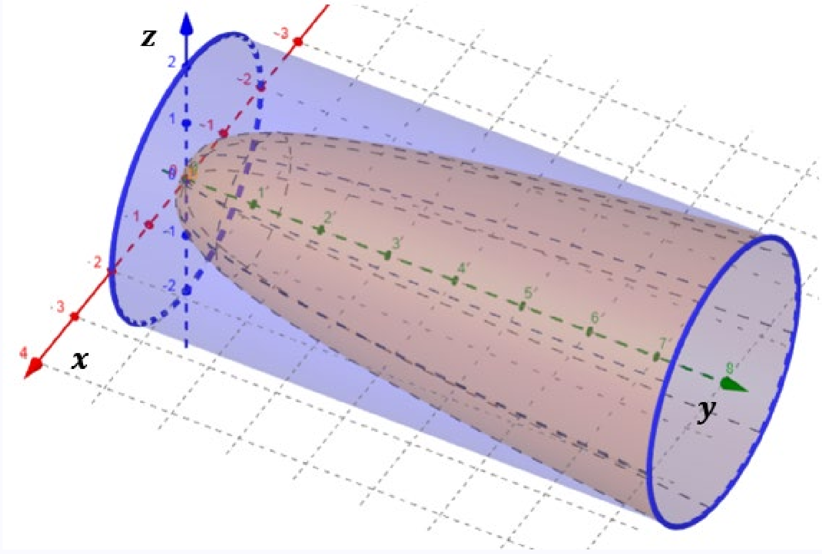
rotira oko osi y. Naći ćemo volumen nastalog tijela, tj. tijela prikazanog plavom bojom (Slika 7.61).

Koristimo formulu.

$$V_y = \pi \int_c^d \left[\left(g_2(y)\right)^2 - \left(g_1(y)\right)^2\right] dy$$

Točka presjeka krivulja $x = 2$ i $y = x^3$ je točka $(2,8)$ pa je interval integracije $[0,8]$.

Nadalje, $g_1(y) = \sqrt[3]{y}$ (jer je, gledajući s osi y, $x = \sqrt[3]{y}$ bliža krivulja), a $g_2(y) = 2$ (jer je, gledajući s osi y, $x = 2$ udaljenija krivulja).



Slika 7.61

Prema tome,

$$V_y = \pi \int_0^8 \left[2^2 - \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right] dy = \pi \int_0^8 \left(4 - y^{\frac{2}{3}}\right) dy = \pi \left(4y - \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_0^8$$
$$= \pi \left[32 - \frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{8}\right)^5\right] = \pi \left(32 - \frac{96}{5}\right) = \frac{64}{5}\pi \approx 40.21.$$

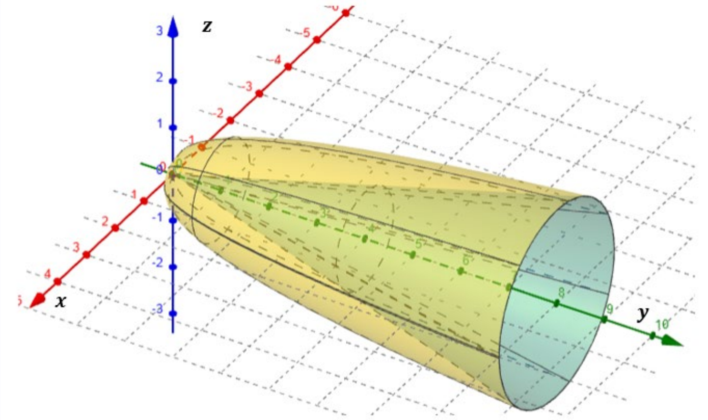
Primjer 3.3

Razmotrimo područje iz primjera 2.1 (Slika 7.56) koje se okreće oko osi y. Tako nastaje rotacijsko tijelo prikazano žutom bojom (Slika 7.62). Koristit ćemo istu formulu kao u prethodnom primjeru. Gledajući s osi y, područje je omeđeno krivuljama

$$x = \frac{y}{4} \text{ (s donje strane) i } x = \sqrt[3]{y} \text{ (s gornje strane),}$$

a varijabla y pripada intervalu $[0,8]$. Dakle,

$$V_y = \pi \int_0^8 \left[\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2\right] dy = \pi \int_0^8 \left(y^{\frac{2}{3}} - \frac{y^2}{16}\right) dy = \pi \left(\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} - \frac{y^3}{48}\right)$$
$$= \pi \left[\frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{8}\right)^5 - \frac{8^3}{48}\right] = \pi \left(\frac{96}{5} - \frac{32}{3}\right) = \frac{128}{15}\pi \approx 26.8$$



Slika 7.62

7.12.4 Rotacija područja (s jedne strane) omeđenog parametarski zadanom krivuljom

(i) Neka je ravninsko područje omeđeno grafom funkcije $\boldsymbol{y = f(x)}$ u parametarskom obliku

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \varphi(t)} \\ \boldsymbol{y = f\big(\varphi(t)\big) = \psi(t)} \end{cases}$$

i pravcima

$$\boldsymbol{x = a}, \qquad \boldsymbol{x = b > a}, \qquad \boldsymbol{y = 0},$$

Nadalje, neka su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- vrijednosti parametra t koje odgovaraju vrijednostima varijable $x \in [a, b]$ pripadaju intervalu $[t_1, t_2]$,

- ψ je neprekidna funkcija na $[t_1, t_2]$,

- φ je neprekidna funkcija na $[t_1, t_2]$ i derivabilna funkcija na $\langle t_1, t_2 \rangle$

- φ' je stalno pozitivna ili stalno negativna funkcija na $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Izvedimo formulu za volumen tijela koje nastaje rotacijom tog područja **oko osi $\boldsymbol{x}$**.

Ako je $\varphi' > 0$ na $\langle t_1, t_2 \rangle$, onda je φ strogo rastuća funkcija na $\langle t_1, t_2 \rangle$ pa je

$$\varphi(t_1) = a, \qquad \varphi(t_2) = b.$$

Stoga je

$$V_x = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \Rightarrow y = \psi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \pi \int_{t_1}^{t_2} \big(\psi(t)\big)^2 \cdot \varphi'(t)dt.$$

Ako je $\varphi' < 0$ na $\langle t_1, t_2 \rangle$, onda je φ strogo padajuća funkcija na $\langle t_1, t_2 \rangle$ pa je

$$\varphi(t_1) = b, \qquad \varphi(t_2) = a.$$

U tom slučaju je

$$V_x = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \Rightarrow y = \psi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \pi \int_{t_2}^{t_1} \left(\psi(t)\right)^2 \cdot \varphi'(t)dt$$
$$= -\pi \int_{t_1}^{t_2} \left(\psi(t)\right)^2 \cdot \varphi'(t)dt.$$

Za oba slučaja vrijedi sljedeća formula

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} \left(\psi(t)\right)^2 \cdot |\varphi'(t)|dt.$$

Uz oznake

$$y = \psi(t), \qquad \dot{x} = \varphi'(t),$$

kraće pišemo

$$\boldsymbol{V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 |\dot{x}| dt.}$$

(i) Neka je ravninsko područje omeđeno grafom funkcije $\boldsymbol{x = g(y)}$ u parametarskom obliku

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = \psi(t)} \\ \boldsymbol{x = g(\psi(t)) = \varphi(t)} \end{cases}$$

i pravcima

$$\boldsymbol{y = c}, \qquad \boldsymbol{y = d > c}, \qquad \boldsymbol{x = 0},$$

Nadalje, neka su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- vrijednosti parametra t koje odgovaraju vrijednostima varijable $y \in [c, d]$ pripadaju intervalu $[t_1, t_2]$,

- φ je neprekidna funkcija na $[t_1, t_2]$,

- ψ je neprekidna funkcija na $[t_1, t_2]$ i derivabilna funkcija na $\langle t_1, t_2 \rangle$

- ψ' je stalno pozitivna ili stalno negativna funkcija na $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Formula za volumen tijela koje nastaje rotacijom tog područja **oko osi $\boldsymbol{y}$** se izvodi slično kao u slučaju 1). Dobiva se

$$\boldsymbol{V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2 |\dot{y}| dt,}$$

gdje je

$$x = \varphi(t), \qquad \dot{y} = \psi'(t).$$

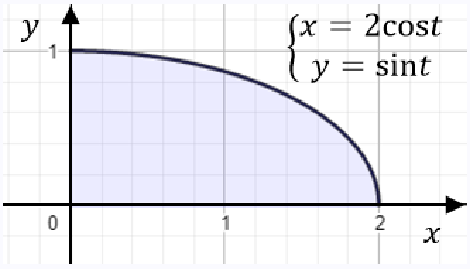
Primjer 4.1

Područje u ravnini xy, Slika 7.63, omeđeno je četvrtinom elipse koja je zadana parametarski jednadžbama

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad za\ t \in [0, 2\pi\rangle$$

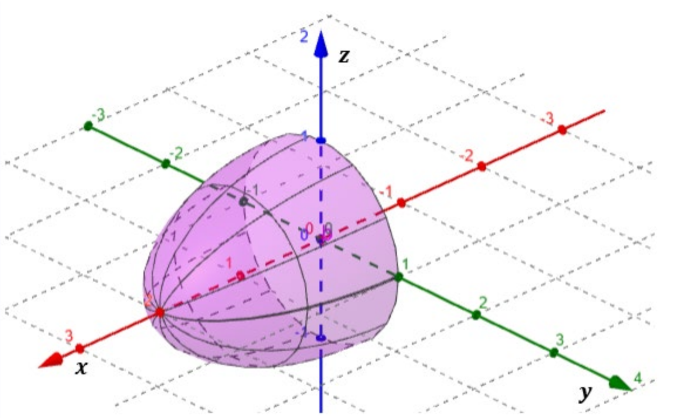
i pravcima $x = 0$, $y = 0$. Nađimo volumen tijela koje nastaje rotiranjem tog područja

a) oko osi x; b) oko osi y.



Slika 7.63

a) Rotacijom područja oko osi x nastaje tijelo na Slika 7.642.



Slika 7.64

Znamo da da za sve točke (x, y) zadanog područja vrijedi

$$0 \leq x \leq 2,$$

$$0 \leq y \leq 1.$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Nađimo za koje vrijednosti parametra $t \in [0,2\pi\rangle$ vrijede isti uvjeti. Kako je $x = 2\cos t$ i

$y = \sin t$, imamo

$$0 \leq 2\cos t \leq 2 \ \ |:2$$

$$0 \leq \sin t \leq 1$$

odnosno

$$0 \leq \cos t \leq 1$$

$$0 \leq \sin t \leq 1$$

odakle je

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Lako se vidi da su zadovoljeni svi uvjeti za primjenu formule

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 |\dot{x}| dt.$$

Ovdje je

$$t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad y = \sin t$$

i

$$\dot{x} = -2\sin t < 0 \; na \; \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow |\dot{x}| = 2\sin t$$

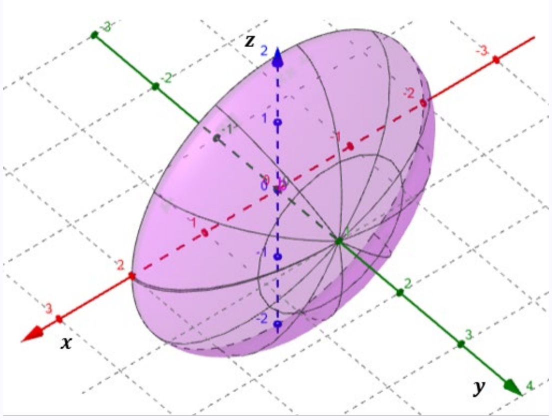
pa je

$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot 2\sin t \, dt = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \sin t \, dt$$

$$= -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = -2\pi \left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2\pi \left(\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2} \right) + 2\pi \left(\cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3 0 \right) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi$$

b) Rotacijom područja oko osi y nastaje tijelo na slici 7.65.



Slika 7.65

Lako se vidi da su zadovoljeni svi uvjeti za primjenu formule

$$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2 |\dot{y}| dt.$$

Ovdje je

$$t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad x = 2\cos t$$

i

$$\dot{y} = \cos t > 0 \; za \; svaki \; t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow |\dot{y}| = \cos t$$

pa je

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t)^2 \cdot \cos t \, dt = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \cos t \, dt \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = 4\pi \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.12.5 Vježbe

1. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom oko osi x područja omeđenog krivuljama

$$x = 1, \qquad y = -1, \qquad y = 0, \qquad y = x^2 + 1.$$

2. Nađite volumen tijela dobivenog okretanjem oko osi x područja omeđenog krivuljama

$$y = 3\sin x\,, \qquad y = \sin x$$

između pravaca $x = 0$ i $x = \pi$.

3. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotiranjem oko osi y područja omeđenog krivuljama

$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad y = 4, \qquad xy = 4.$$

4. Izračunajte volumen tijela dobivenog rotiranjem područja omeđenog krivuljama

$$y = \ln x\,, \qquad y = 0, \qquad x = e$$

oko osi y.

5. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja omeđenog krivuljama

$$y = x^2, \qquad x + y = 2, \qquad y = 0$$

a) oko osi x, b) oko osi y.

6. Nađite volumen tijela koje nastaje okretanjem oko osi y područja omeđenog lukom astroide

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases} \quad za\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

i pravcem $x = 0$.

7. Nađite volumen tijela nastalog okretanjem oko osi x područja omeđenog krivuljama

$$x = -2, \qquad x = 2, \qquad y = 0, \qquad \begin{cases} x = 2\tan t \\ y = 2\cos^2 t \end{cases}.$$

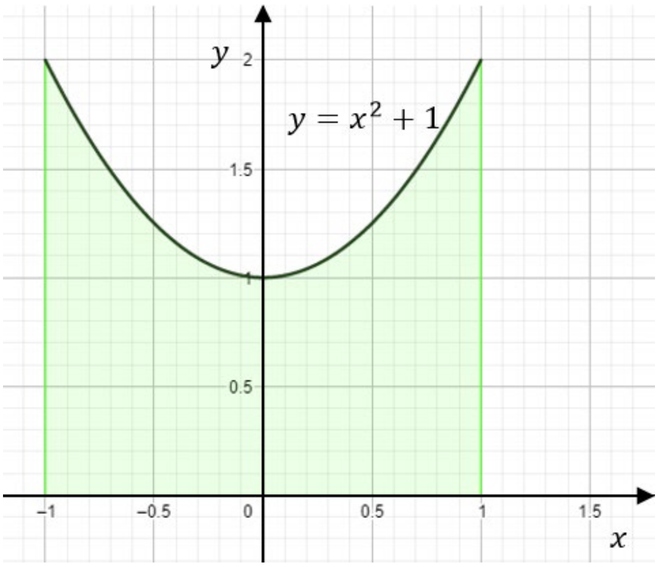
7.12.6 Rješenja

1. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x područja omeđenog krivuljama

$$x = -1, \qquad x = 1, \qquad y = 0, \qquad y = x^2 + 1.$$

Rješenje

Područje koje rotira je označeno na slici 7.66.. Slika 7.67prikazuje tijelo nastalo rotacijom.

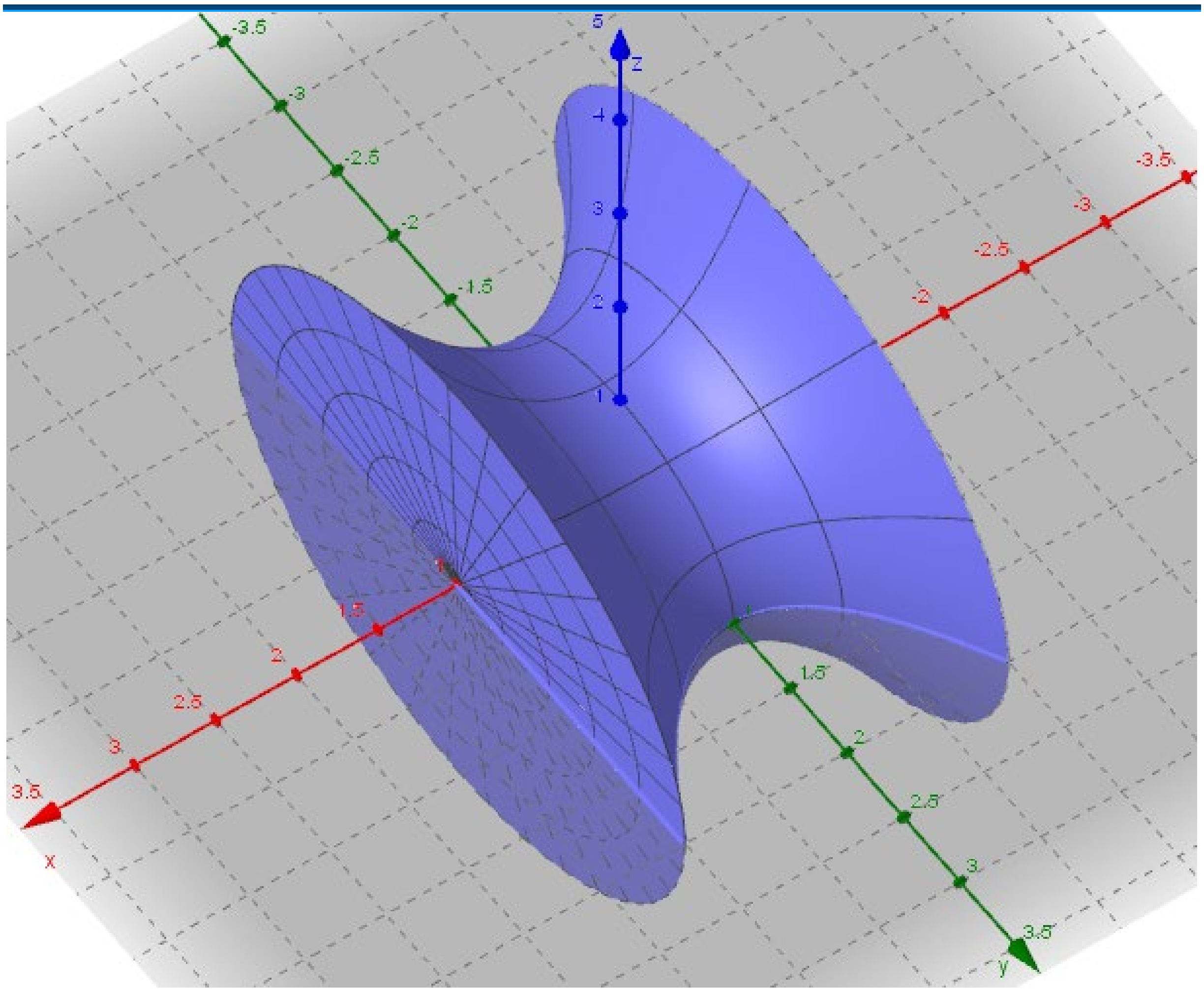


Slika 7.66

Područje se okreće oko osi x pa koristimo formulu

$$V_x = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{-1}^{1} (x^2+1)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3} x^3 + x \right) \Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \pi \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{56}{15} \pi \approx 11.73 \end{aligned}$$

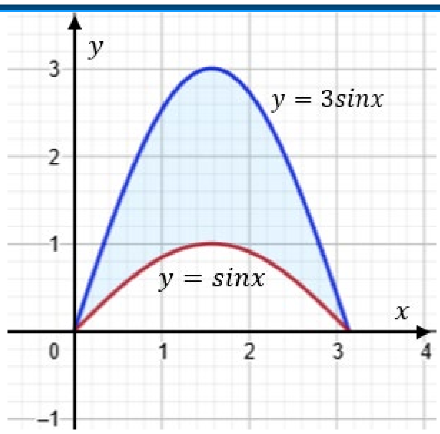


Slika 7.67

2. Nađite volumen tijela dobivenog okretanjem oko osi x područja omeđenog krivuljama
$$y = 3\sin x\,, \qquad y = \sin x$$
između pravaca $x = 0$ i $x = \pi$.

Rješenje

Slika 7.68 prikazuje označeno zadano područje, a . Slika 7.68 prikazuje tijelo koje nastaje rotacijom tog područja oko osi x.

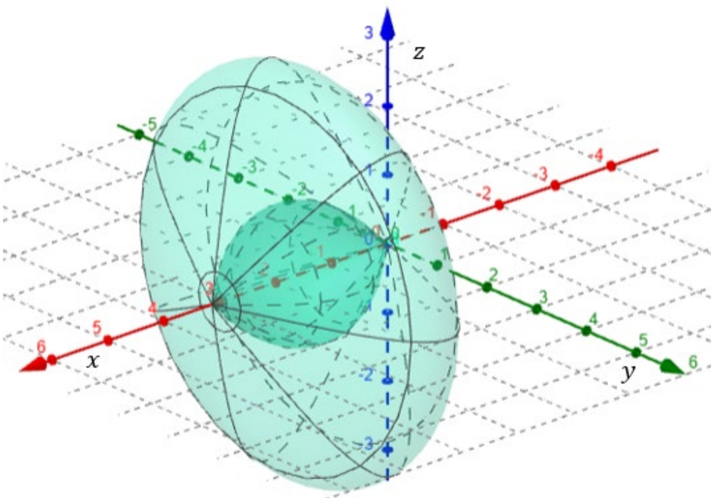


Slika 7.68

Volumen računamo primjenom formule

$$V_x = \pi \int_a^b \left[\left(g_2(x)\right)^2 - \left(g_1(x)\right)^2 \right] dx,$$

gdje je $g_1(x) = \sin x$ i $g_2(x) = 3 \sin x$.



Slika 7.69

$$V_x = \pi \int_0^\pi [(3\sin x)^2 - (\sin x)^2] dx = \pi \int_0^\pi (9\sin^2 x - \sin^2 x) dx = \pi \int_0^\pi 8\sin^2 x\, dx$$

$$= 8\pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = 4\pi \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = 4\pi \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right) \Bigg|_0^\pi$$

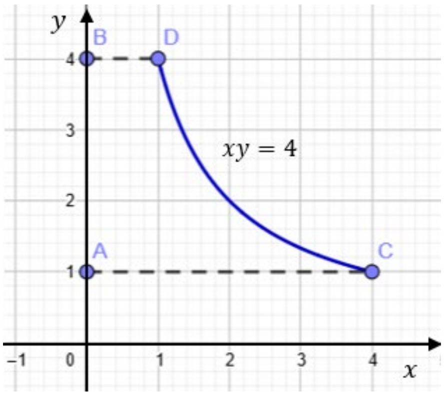
$$= 4\pi \left[\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) \right] = 4\pi^2 \approx 39.48$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

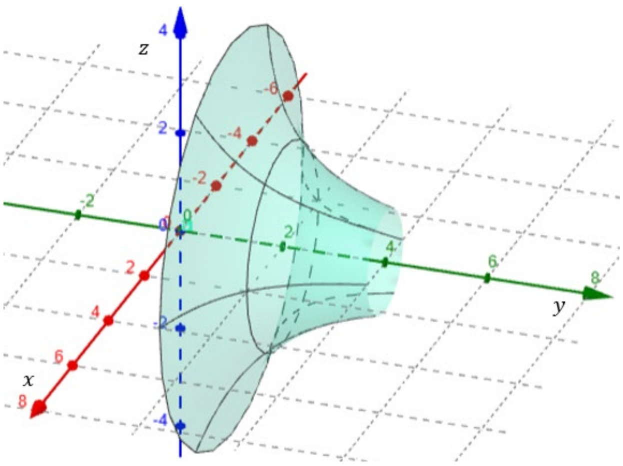
3. Izračunajte volumen tijela koje nastaje okretanjem oko osi y područja omeđenog hiperbolom $xy = 4$ i pravcima $y = 1$, $y = 4$ i $x = 0$.

Rješenje

Područje je prikazano na slici 7.70.



Slika 7.70



Slika 7.71

Za izračunavanje volumena rotacijskog tijela (Slika 7.71) koristimo formulu

$$V_y = \pi \int_c^d \left(g(y)\right)^2 dy,$$

gdje je

$$g(y) = \frac{4}{y}.$$

$$V_y = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{y}\right)^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{16}{y^2} dy = 16\pi \int_1^4 y^{-2} dy = 16\pi \frac{y^{-1}}{-1}\Bigg|_1^4 = -16\pi \cdot \frac{1}{y}\Bigg|_1^4$$
$$= -16\pi\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 12\pi$$

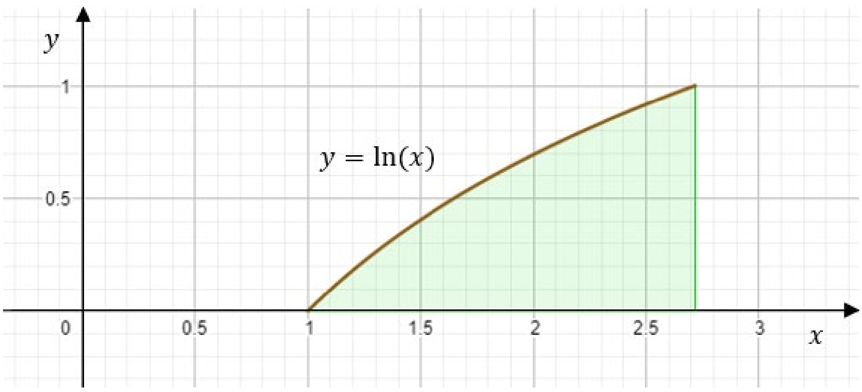
4. Izračunajte volumen tijela dobivenog rotiranjem područja omeđenog krivuljama

$$y = \ln x, \qquad y = 0, \qquad x = e$$

oko osi y.

Rješenje

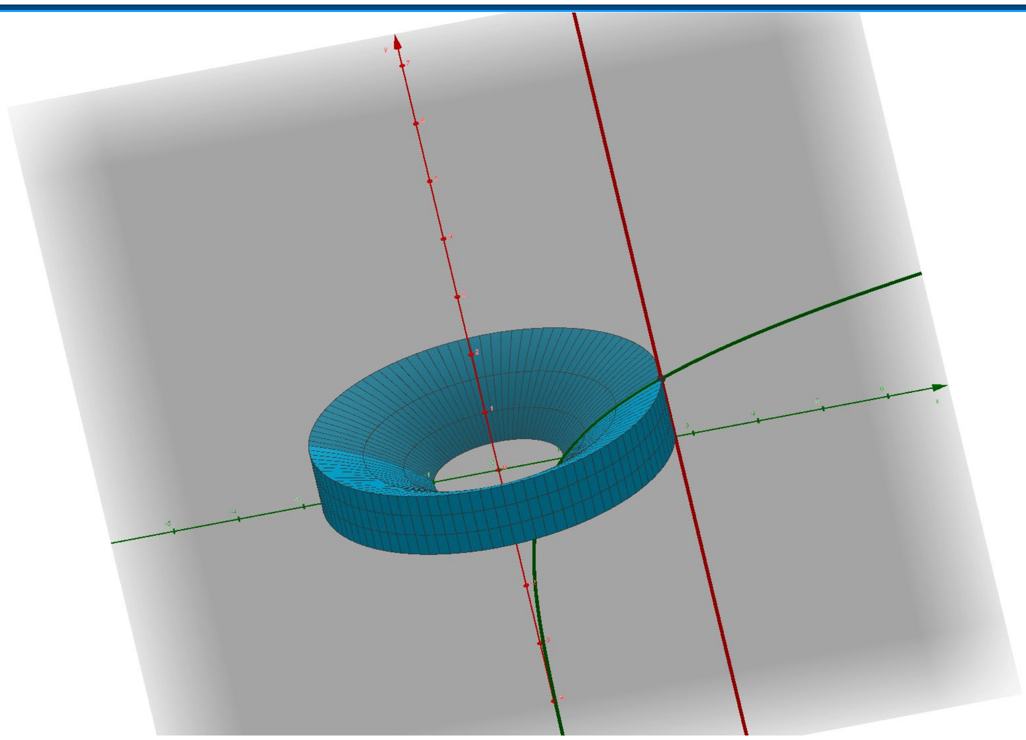
Crtamo zadano područje:



Slika 7.72

Gledajući s osi y, područje je omeđeno krivuljom $x = e^y$ s donje strane i krivuljom $x = e$ s gornje strane iznad $y-$ intervala $[0,1]$. Rotacijom područja oko osi y nastaje tijelo na slici 7.73 čiji volumen računamo pomoću formule

$$V_y = \pi \int_c^d \left[\left(g_2(y)\right)^2 - \left(g_1(y)\right)^2 \right] dy$$



Slika 7.73

$$V_y = \pi \int_0^1 [e^2 - (e^y)^2] dy = \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2y}) dy = \pi \left(e^2 y - \frac{1}{2} e^{2y} \right) \Big|_0^1$$

$$= \pi \left(e^2 - \frac{1}{2} e^2 - \left(0 - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{e^2 + 1}{2} \pi \approx 13.18$$

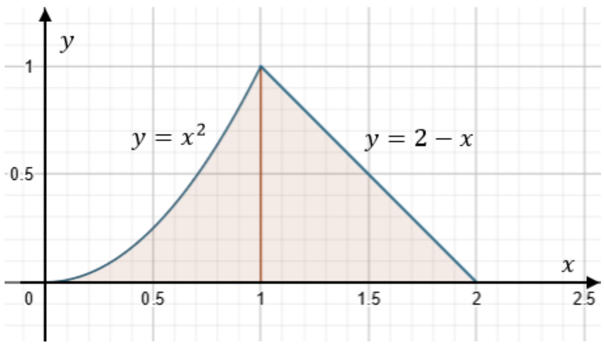
5. Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja omeđenog krivuljama

$$y = x^2, \qquad x + y = 2, \qquad y = 0$$

a) oko osi x, b) oko osi y.

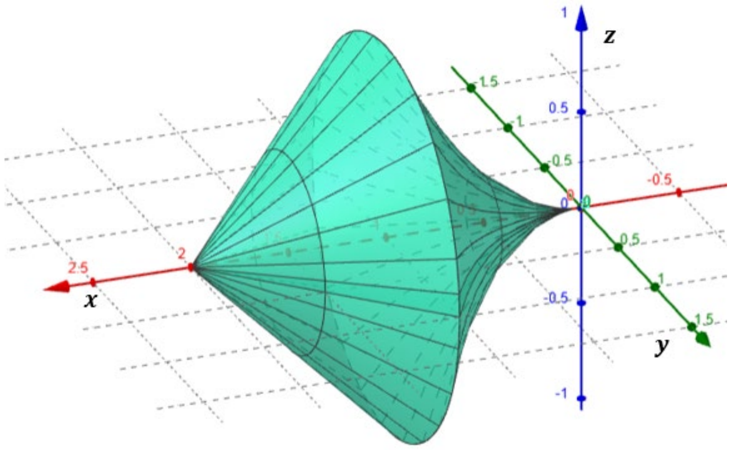
Rješenje

Područje je prikazano na slici 7.74.



Slika 7.74

a) Rotacijom područja oko osi x nastaje tijelo na slici 7.75.



Slika 7.75

Traženi volumen jednak je zbroju volumena dvaju rotacijskih tijela V_{x1} i V_{x2}.

$$V_x = V_{x1} + V_{x2},$$

gdje je V_{x1} volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x područja omeđenog krivuljama:

$$x = 1, \qquad y = 0, \qquad y = x^2,$$

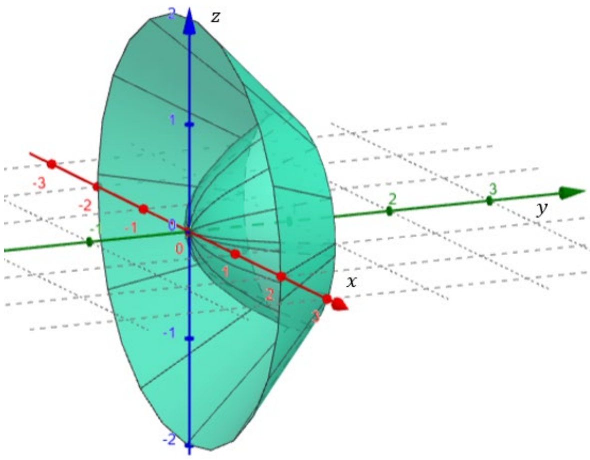
a V_{x2} volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x područja omeđenog krivuljama:

$$x = 1, \qquad y = 0, \qquad y = 2 - x.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x1} + V_{x2} = \pi \int_0^1 (x^2)^2\, dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2\, dx \\ &= \pi \int_0^1 x^4\, dx + \pi \int_1^2 (4 - 4x + x^2)\, dx \\ &= \pi \frac{x^5}{5} \Bigg|_0^1 + \pi \left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right) \Bigg|_1^2 = \frac{\pi}{5} + \pi\left(8 - 8 + \frac{8}{3}\right) - \pi\left(4 - 2 + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{8}{15}\pi \approx 1.68. \end{aligned}$$

b) Rotacijom područja oko osi y nastaje tijelo na slici 7.76.



Slika 7.76

Područje je omeđeno krivuljama

$$y = 0, \qquad y = 1, \qquad x = \sqrt{y} = g_1(y), \qquad x = 2 - y = g_2(y)$$

pa imamo

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_c^d \left[\left(g_2(y)\right)^2 - \left(g_1(y)\right)^2 \right] dy = \pi \int_0^1 \left[(2-y)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 \right] dy \\ &= \pi \int_0^1 (4 - 4y + y^2 - y) dy = \pi \int_0^1 (4 - 5y + y^2) dy \\ &= \pi \left(4y - \frac{5}{2} y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{6} \pi \approx 5.76. \end{aligned}$$

6. Nađite volumen tijela koje nastaje okretanjem oko osi y područja omeđenog lukom astroide

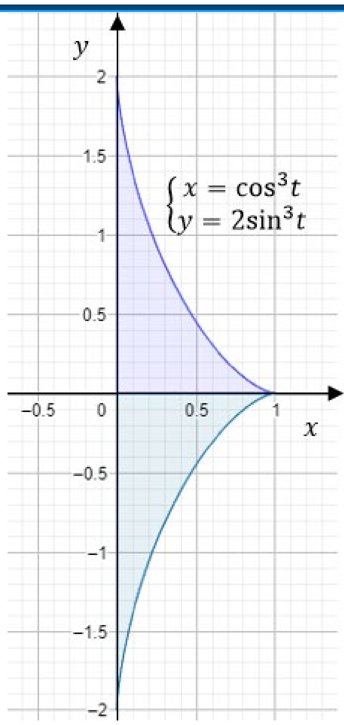
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases} \quad za\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

i pravcem $x = 0$.

Rješenje

Područje je prikazano na slici 7.77. Za izračun volumena rotacijskog tijela (Slika 7.78) primjenjujemo formulu

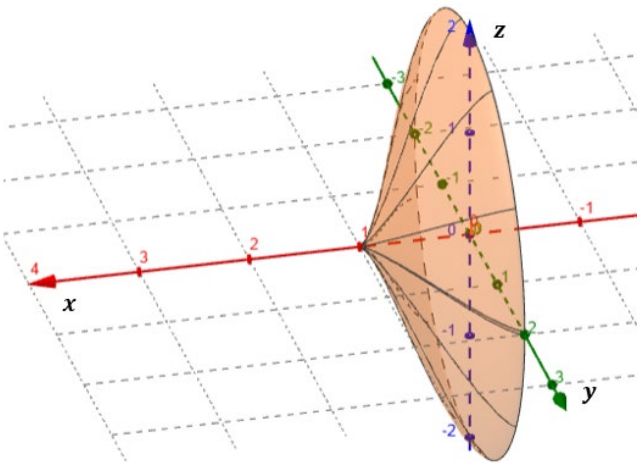
$$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2 |\dot{y}| dt$$



Slika 7.77

$$y' = (2\sin^3 t)' = 6\sin^2 t\cos t > 0\ za\ svaki\ t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\Rightarrow |y'| = 6\sin^2 t\cos t$$



Slika 7.78

$$V_y = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t)^2 \cdot 6\sin^2 t\cos t\,dt = 6\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t\sin^2 t \cdot \cos t\,dt$$

$$= 6\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^3 \sin^2 t\,d(\sin t)$$

$$= 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t)\sin^2 t\, d(\sin t)$$

$$= 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - 3\sin^4 t + 3\sin^6 t - \sin^8 t) d(\sin t)$$

$$= 6\pi \left(\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{3}{5}\sin^5 t + \frac{3}{7}\sin^7 t - \frac{\sin^9 t}{9} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} + \frac{6}{7} - \frac{2}{9} \right)$$

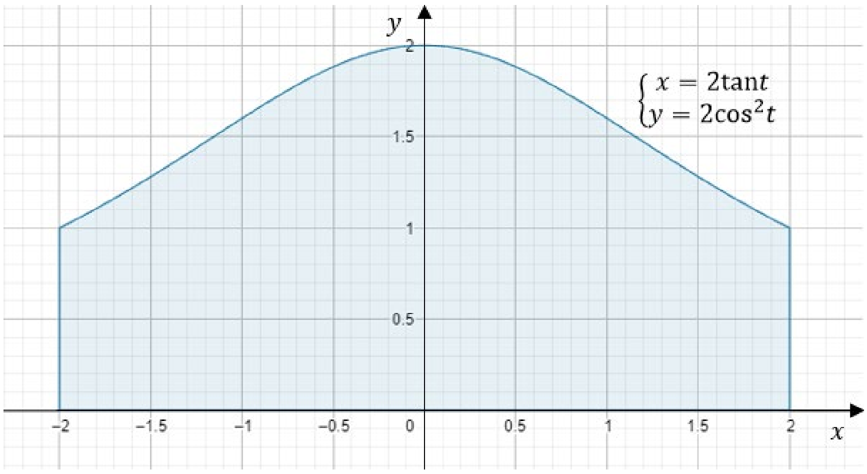
$$= \frac{64\pi}{105} \approx 1.91$$

7. Nađite volumen tijela nastalog okretanjem oko osi x područja omeđenog krivuljama

$$x=-2, \qquad x=2, \qquad y=0, \qquad \begin{cases} x=2\tan t \\ y=2\cos^2 t \end{cases}.$$

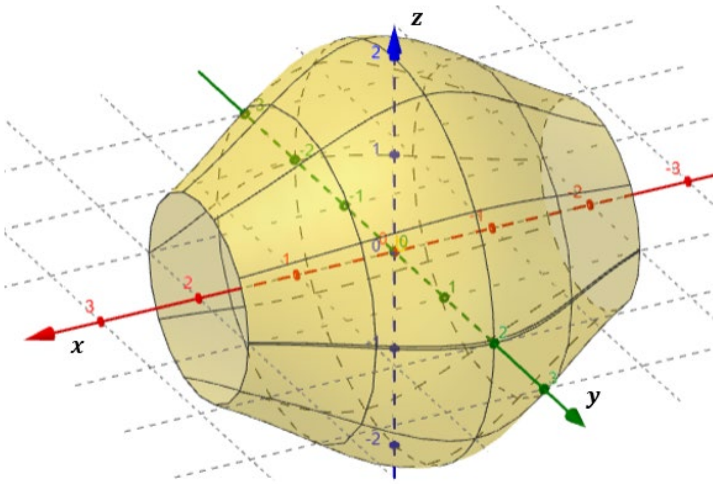
Rješenje

Slika 7.79 prikazuje područje koje rotira, a Slika 7.80 nastalo rotacijsko tijelo.



Slika 7.79

$$V_x=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2\cdot \dot{x}dt$$



Slika 7.80

Za jedan obilazak cijele parametarski zadane krivulje treba uzeti t – interval širine π jer su funkcije $t\to 2\tan t$ i $t\to 2\cos^2 t$ periodične s periodom π. Uzet ćemo interval

$\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Znamo da se zadano područje nalazi između pravaca $x = -2$ i $x = 2$, tj. da vrijedi:

$$-2 \leq x \leq 2.$$

Nađimo za koje vrijednosti parametra $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ vrijedi isti uvjet, odnosno uvjet

$$-2 \leq 2\tan t \leq 2.$$

$$-1 \leq \tan t \leq 1 \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Kako je

$$\dot{x} = \frac{2}{\cos^2 t} > 0 \; za \; svaki \; t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

onda je

$$|\dot{x}| = \frac{2}{\cos^2 t},$$

pa primjenom formule

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 |\dot{x}| dt$$

dobivamo

$$V_x = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 t)^2 \cdot \frac{2}{\cos^2 t} dt = 8\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt$$
$$= 8\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \, dt = 8\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 4\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.13 Primjena određenog integrala. Površina rotacijske plohe

DETALJAN OPIS:

Površina rotacijske plohe može se računati pomoću određenog integrala. U ovom poglavlju se primjenjuje posebna formula računanja površine plohe koja nastaje kada se luk krivulje u ravnini xy zavrti oko osi x ili oko osi y. Formula se može transformirati tako da vrijedi i za parametarski zadane krivulje pa tako i za krivulje u polarnim koordinatama. Sadržaj je popraćen primjerima s Geogebrinim grafovima. Zadaci predviđeni za vježbu nalaze se na kraju lekcije.

Cilj: pokazati kako se računa površina plohe koja nastaje rotacijom krivulje u xy ravnini.

Ishodi učenja:

1. Razumjeti primjenu određenog integrala u rješavanju geometrijskih zadataka.
2. Primijeniti računalna pomagala u prikazu geometrijskih oblika i površina.
3. Izračunati površinu rotacijske plohe primjenom određenog integrala.

Prethodno znanje: osnovna pravila integralnog i diferencijalnog računa, Newton-Leibnizova formula, svojstva funkcija, konstrukcija grafova funkcija, trodimenzionalna konstrukcija ploha, algebarske i trigonometrijske formule.

Povezanost s problemima u pomorstvu: Računanje površine rotacijske plohe važno je u projektiranju različitih dijelova mehaničke opreme. Na primjer, za povećanje operativne učinkovitosti centrifugalne pumpe korisno je izračunati površinu rotacijske plohe pri izradi oštrica koje su sastavni dio pumpe. Satelitska antena ima oblik rotacijskog tijela. Izračun njene površine je nužan jer taj podatak otkriva količinu boje potrebne za njeno lakiranje.

Sadržaj

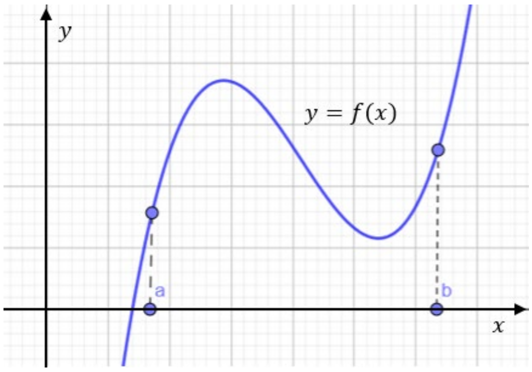
1. Formula za računanje površine rotacijske plohe
2. Rotacija oko osi y
3. Površina plohe koja nastaje rotacijom parametarski zadane krivulje
4. Zadatci
5. Rješenja zadataka

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

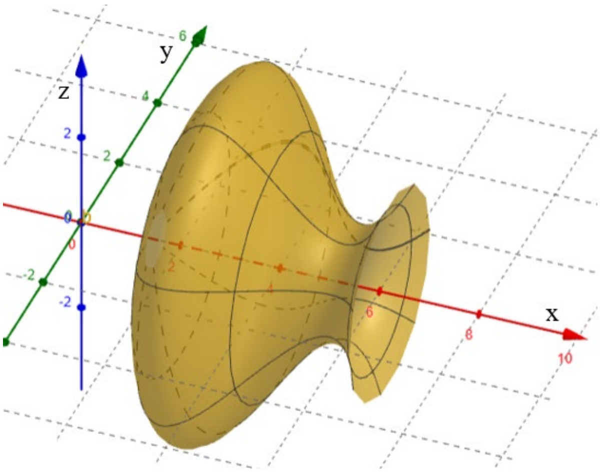
7.13.1 Formula za računanje površine rotacijske plohe

Slika 7.81 prikazuje graf neprekinute nenegativne funkcije $y = f(x)$ u ravnini xy. Luk grafa nad $x-$ intervalom $[a, b]$ vrti se oko osi x i tvori plohu (Slika 7.82). Površinu te plohe možemo izračunati formulom

$$\boldsymbol{P_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx}$$



Slika 7.81



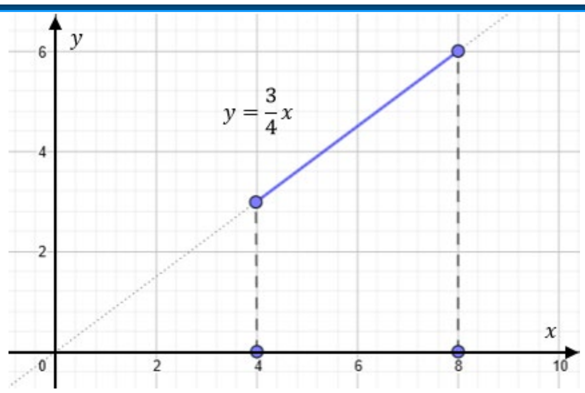
Slika 7.82

Primjer 1.1 Plašt krnjeg stošca nastaje rotacijom dužine, tj. dijela pravca $3x - 4y = 0$ nad $x-$ intervalom $[4,8]$, oko osi x. Izračunajte njegovu površinu.

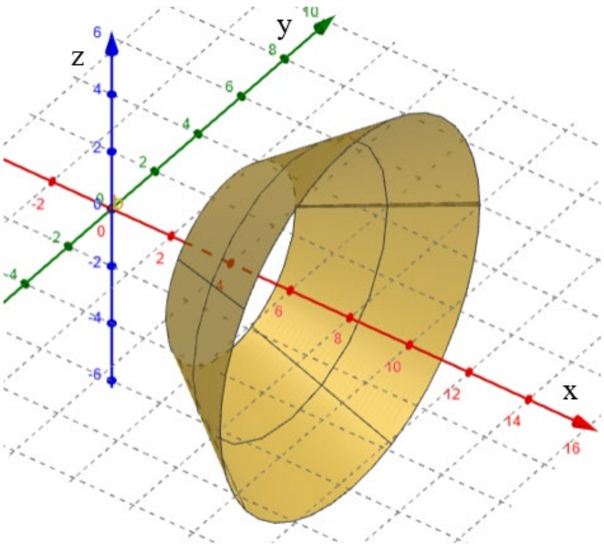
Rješenje

Slika 7.83 prikazuje označenu zadanu dužinu. Slika 7.84 prikazuje plašt stošca koji nastaje rotacijom te dužine oko osi x.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Slika 7.83



Slika 7.84.

Prije primjene formule treba derivirati funkciju

$$y = \frac{3}{4}x.$$

$$y' = \left(\frac{3}{4}x\right)' = \frac{3}{4}$$

Površina plašta krnjeg stošca P_x je

$$P_x = 2\pi \int_4^8 \frac{3}{4}x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\, dx = \frac{3}{2}\pi \int_4^8 x \cdot \sqrt{\frac{25}{16}}\, dx$$

$$= \frac{15}{8}\pi \int_4^8 x dx = \frac{15}{16}\pi \cdot x^2 \Big|_4^8 = \frac{15}{16}\pi(64 - 16) = 45\pi \approx 141.37$$

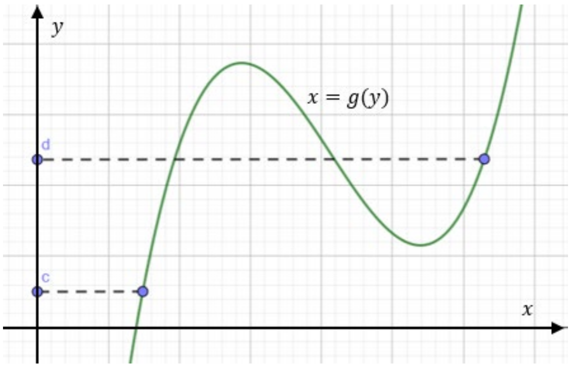
7.13.2 Rotacija oko osi y

Ako se dio grafa krivulje $y = f(x)$ između pravaca $y = c$ i $y = d$ (Slika 7.85) vrti oko osi y, onda moramo posebno promatrati rotaciju tri luka te krivulje pri čemu je svaki luk dio grafa neke funkcije s argumentom y i zavisnom varijablom x. Rotacijom ta tri luka oko osi y nastaje ploha (Slika 7.86).

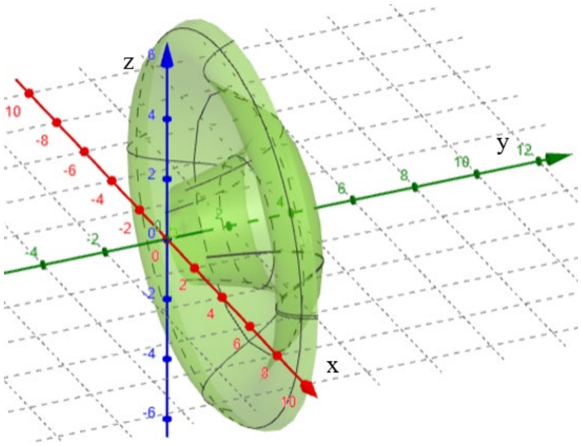
Općenito vrijedi:

Ako je formulom $x = g(y)$ zadan luk krivulje između pravaca $y = c$ i $y = d$, rotacijom tog luka oko osi y nastaje ploha čija se površina određuje formulom

$$\boldsymbol{P_y = 2\pi \int_c^d g(y) \cdot \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2} dy.}$$



Slika 7.85



Slika 7.86

Primjer 2.1

Nađite površinu plohe nastale rotacijom luka krivulje $y = x^2$ između pravaca $x = 0$ i $x = 2$ oko osi y.

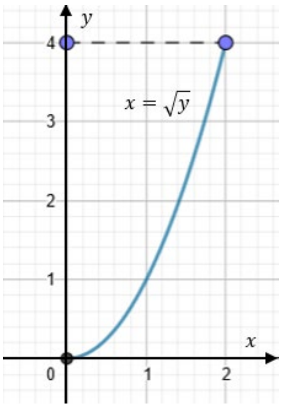
Rješenje

Luk i ploha koja nastaje njegovom rotacijom oko osi y prikazani su na sljedećim slikama. Iz $y = x^2$, ako je $x \in [0,2]$, slijedi

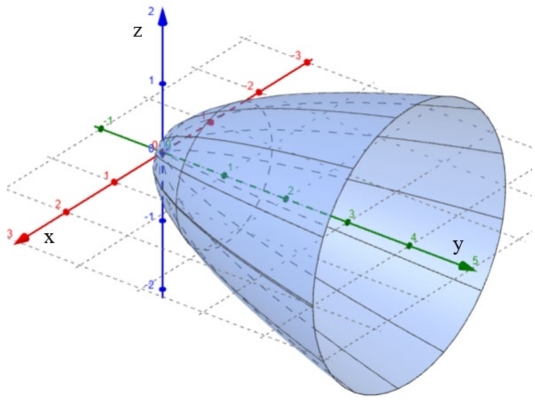
$$x = g(y) = \sqrt{y}.$$

Derivacija funkcije x (s argumentom y) je

$$x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$



Slika 7.87



Slika 7.88

Projekcija luka na os y je interval $[0,4]$. Površina rotacijske plohe se računa rješavanjem određenog integrala.

$$\begin{aligned}
P_y &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy \\
&= 2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \cdot \frac{\sqrt{4y+1}}{2\sqrt{y}}\, dy = \pi \int_0^4 \sqrt{4y+1}\, dy = \frac{\pi}{4} \int_0^4 \sqrt{4y+1}\, d(4y+1) \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{(4y+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{17}^3 - 1\right) \approx 36.18
\end{aligned}$$

7.13.3 Površina plohe koja nastaje rotacijom parametarski zadane krivulje

Formula za izračunavanje površine plohe koja nastaje rotacijom grafa neprekinute nenegativne funkcije $y = f(x)$ nad $x -$ intervalom $[a, b]$ oko osi x u Kartezijevim koordinatama je

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Pretpostavimo da je luk krivulje $y = f(x)$ između pravaca $x = a$ i $x = b$ zadan parametarskim jednadžbama

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \; za\ t \in [\alpha, \beta],$$

gdje su funkcije φ' i ψ' neprekinute na $[\alpha, \beta]$, i da je $\varphi' > 0$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Tada je φ strogo rastuća na $\langle \alpha, \beta \rangle$ pa je $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$.

Kako je $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bijekcija, onda ima inverznu funkciju φ^{-1}.

Stoga iz $x = \varphi(t)$ slijedi $t = \varphi^{-1}(x)$ pa je $y = f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$.

Nadalje, vrijedi

$$f'(x) = \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Dakle, ako u integralu

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

uvedemo zamjenu $x = \varphi(t)$, onda je $f(x) = \psi(t)$ pa imamo

$$P_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \sqrt{1 + \frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}} \cdot \varphi'(t) dt = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Sličnim zaključivanjem se pokaže da ista formula vrijedi ako je $\varphi' < 0$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Uz oznake

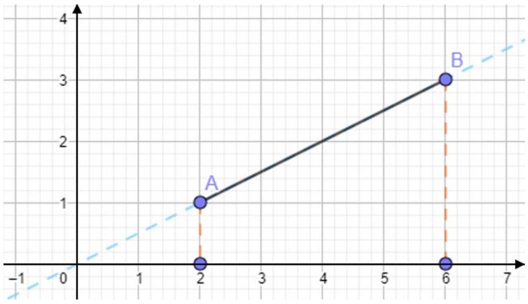
$$y = \psi(t), \qquad \dot{x} = \varphi'(t), \qquad \dot{y} = \psi'(t),$$

kraće se piše

$$\boldsymbol{P_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.}$$

Primjer 3.1

Dio pravca $y = \frac{x}{2}$ nad $x -$ intervalom $[2,6]$, tj. dužina $\overline{AB}$ na slici 3.1, rotira oko osi x. Tako nastaje plašt krnjeg stošca. Izračunajte oplošje tog stošca.



Slika 7.89

Rješenje

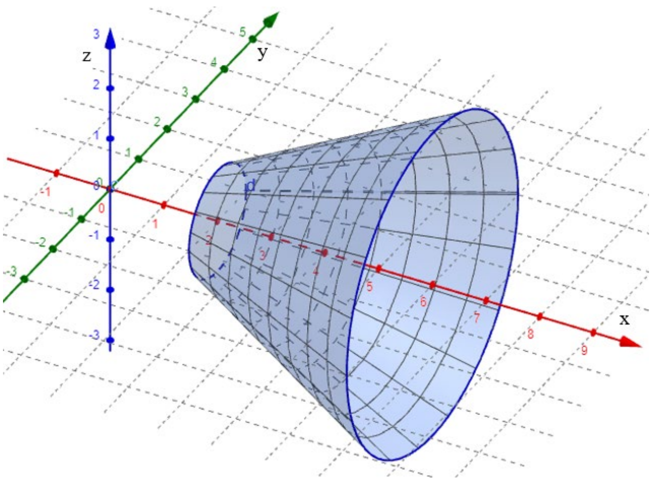
Oplošje tijela je zbroj površina svih ploha koje omeđuju to tijelo. Dakle, oplošje stošca je zbroj površine plašta, površine veće baze i površine manje baze. Veća baza je krug polumjera $R = 3$, a manja krug polumjera $r = 1$. Površine baza računat ćemo pomoću formule za površinu kruga, a površinu plašta preko određenog integrala.

Pravac $y = \frac{x}{2}$ nad $x -$ intervalom $[2,6]$ možemo zadati u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{2} \end{cases} \quad za\ t \in [2,6].$$

Sada deriviramo obje funkcije pa sastavljamo formulu za računanje površine plašta na slici 7.90 koji nastaje rotacijom dužine $\overline{AB}$ oko osi x.

$$\dot{x} = 1, \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}$$



Slika 7.90

$$P_x = 2\pi \int_2^6 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}}dt = 2\pi \int_2^6 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi \int_2^6 tdt = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi t^2 \Big|_2^6 = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi(36 - 4) = 8\sqrt{5}\pi$$

pa je oplošje O tog krnjeg stošca

$$O = P_x + R^2\pi + r^2\pi = 8\sqrt{5}\pi + 9\pi + \pi = (8\sqrt{5} + 10)\pi \approx 87.61$$

7.13.4 Vježbe

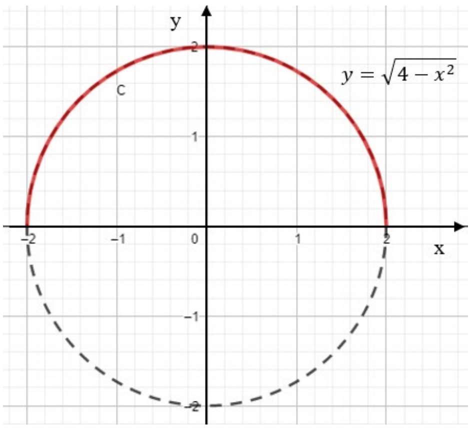
1. Izračunajte površinu plohe nastale rotacijom kružnice $x^2 + y^2 = 4$ oko osi x.
2. Izračunajte površinu plohe dobivene rotacijom luka krivulje $y = e^{-x}$ nad intervalom $[0,3]$ oko osi x.
3. Nađite površinu plohe koja nastaje okretanjem luka krivulje $y = \arccos x$ nad $x -$ intervalom $[-1, 1]$ oko osi y.
4. Jedan luk cikloide rotira oko osi x. Nađite površinu nastale plohe ako su parametarske jednadžbe cikloide
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}.$$
5. Nađite površinu plohe koja nastaje okretanjem oko osi y luka astroide
$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$$

7.13.5 Rješenja

1. Izračunajte površinu plohe nastale rotacijom kružnice $x^2 + y^2 = 4$ oko osi x.

Rješenje

Kružnica je prikazana na slici 7.91.



Slika 7.91

Odaberimo gornji dio kružnice nad $x -$ intervalom $[-2,2]$ (crveno označena krivulja na slici 7.91).

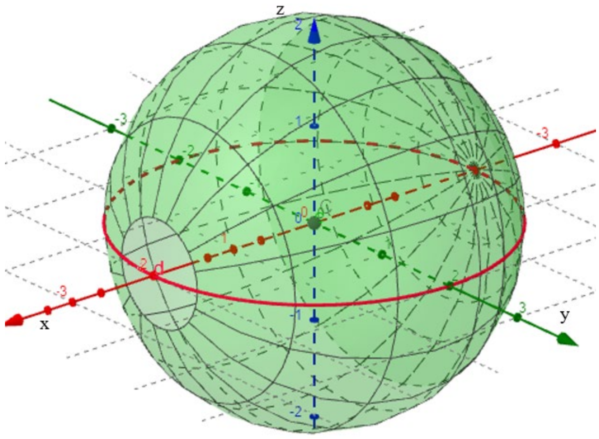
Ta je krivulja funkcija zadana formulom $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Rotacijom te krivulje oko osi x nastaje sfera (slika 5.2).

Određujemo derivaciju funkcije $y = \sqrt{4 - x^2}$, a zatim računamo izraz $1 + y'^2$.

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$1 + {y'}^2 = 1 + \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{4}{4 - x^2}$$



Slika 7.92

Površinu sfere računamo po formuli

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

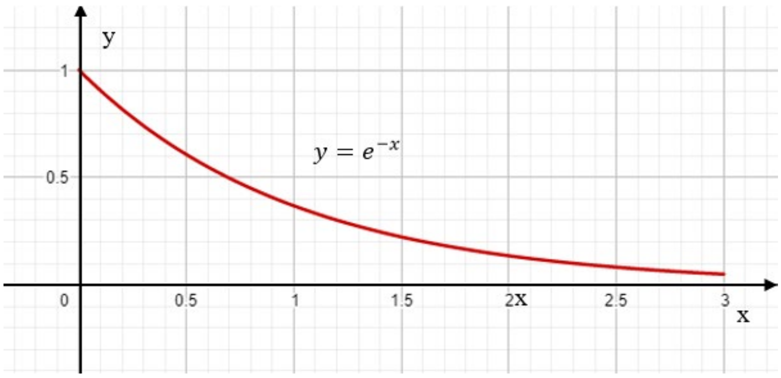
Tako dobivamo

$$P_x = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}} dx = 4\pi \int_{-2}^{2} dx = 4\pi x \Big|_{-2}^{2} = 16\pi.$$

2. Izračunajte površinu plohe dobivene rotacijom luka krivulje $y = e^{-x}$ nad $x -$ intervalom $[0,3]$ oko osi x.

   Rješenje

   Luk koji rotira prikazan na slici 7.93.



Slika 7.93

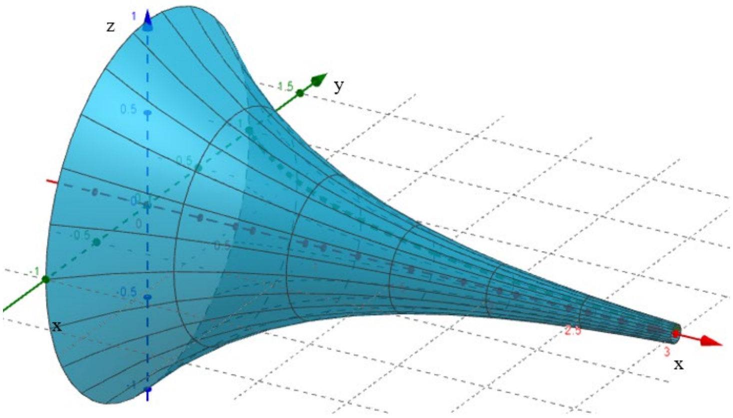
Derivacija funkcije $y = e^{-x}$ je $y' = (e^{-x})' = -e^{-x}$.

Sastavljamo integral za računanje površine nastale plohe (Slika 7.94).

$$P_x = 2\pi \int_0^3 e^{-x} \cdot \sqrt{1 + e^{-2x}} dx = \left| \begin{matrix} t = e^{-x} & dt = -e^{-x} dx \\ t_1 = e^0 = 1 & t_2 = e^{-3} \end{matrix} \right|$$

$$= -2\pi \int_1^{e^{-3}} \sqrt{1 + t^2} dt = -2\pi \cdot \frac{1}{2} \left(t \cdot \sqrt{1 + t^2} + \ln \left| t + \sqrt{1 + t^2} \right| \right) \Bigg|_1^{e^{-3}}$$

$$= -\pi \left(e^{-3} \cdot \sqrt{1 + e^{-6}} + \ln \left| e^{-3} + \sqrt{1 + e^{-6}} \right| - \sqrt{2} - \ln \left| 1 + \sqrt{2} \right| \right) \approx 6.9$$



Slika 7.94

Komentar: Integral

$$\int \sqrt{1 + t^2} dt$$

može se riješiti parcijalnom integracijom (vidjeti Dodatak na kraju ovog poglavlja).

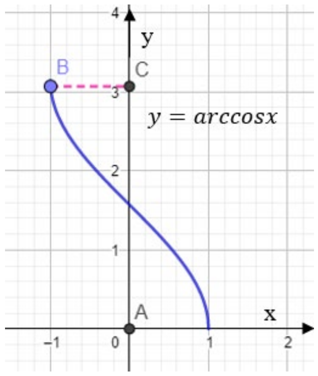
3. Nađite površinu plohe koja nastaje rotacijom krivulje $y = \arccos x$ oko osi y.

Rješenje

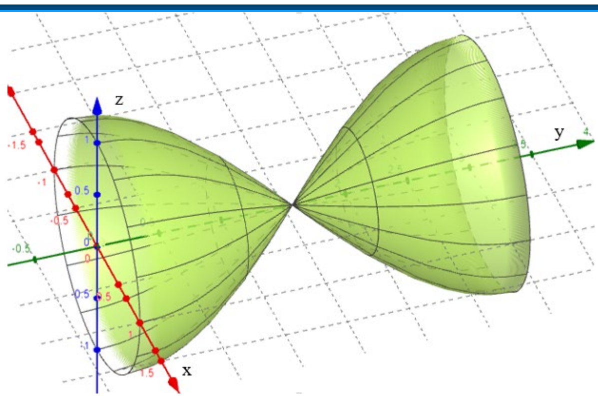
Funkcija $f(x) = \arccos x$ je definirana na segmentu $[-1,1]$. Projekcija krivulje $y = \arccos x$ na os y je dužina $\overline{AC}$, odnosno segment $[0, \pi]$. Formulu $y = \arccos x$ pišemo u obliku u kojem je x nezavisna, a y zavisna varijabla. Zatim tražimo derivaciju dobivene funkcije $x = g(y)$.

$$x = g(y) = \cos y$$

$$x' = -\sin y$$



Slika 7.95



Slika 7.96

Krivulja rotacijom oko osi y stvara simetričnu dvodijelnu površinu (**Slika 7.96**). Stoga računamo površinu samo jednog dijela, nad $y-$ intervalom $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Za izračun površine koristimo formulu

$$P_y = 2\pi \int_c^d g(y) \cdot \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2} dy.$$

Površina izabranog dijela je

$$\begin{aligned}
P_{y1} &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \cdot \sqrt{1 + \sin^2 y}\, dy = \left| \begin{matrix} t = \sin y & dt = \cos y\, dy \\ t_1 = \sin 0 = 0 & t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{matrix} \right| \\
&= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt = \pi \left(t \cdot \sqrt{1 + t^2} + \ln\left| t + \sqrt{1 + t^2} \right| \right) \Big|_0^1 \\
&= \pi\left(\sqrt{2} + \ln\left|1 + \sqrt{2}\right|\right) \approx 7.21
\end{aligned}$$

pa je površina cijele rotacijske plohe

$$P_y = 2P_{y1} = 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left|1 + \sqrt{2}\right|\right) \approx 14.42\,.$$

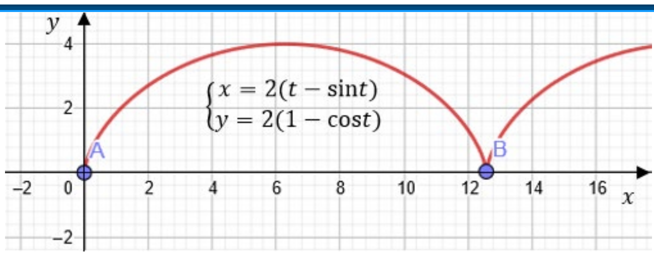
4. Luk cikloide rotira oko osi x. Nađite površinu nastale plohe ako su parametarske jednadžbe cikloide

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

Rješenje

Zadana cikloida je krivulja koju opisuje točka na kružnici polumjera $R = 2$ kada se ta kružnica kotrlja bez klizanja po pravcu $y = 0$.

Radi lakšeg računanja, uzet ćemo da rotira luk cikloide koji se dobije iz parametarskih jednadžbi za $t \in [0, 2\pi]$. To je luk $\widehat{AB}$ (Slika 7.97).



Slika 7.97

Površinu nastale plohe (Slika 7.98) računamo primjenom formule

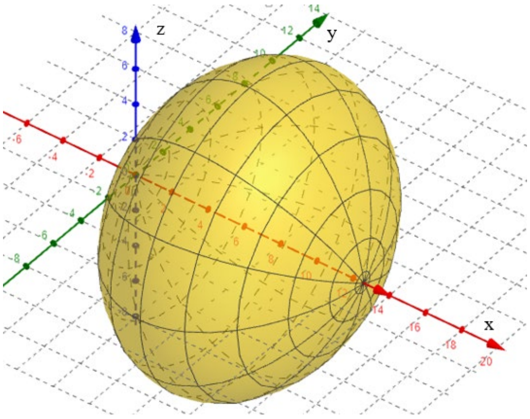
$$\boldsymbol{P_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.}$$

Najprije određujemo derivacije.

$$\dot{x} = 2(1 - \cos t)$$
$$\dot{y} = 2 \sin t$$

Nakon toga računamo izraz $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ koristeći algebarske i trigonometrijske identitete.

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4(1 - \cos t)^2 + 4 \sin^2 t = 4(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$= 4(2 - 2 \cos t) = 16 \sin^2 \frac{t}{2}$$



Slika 7.98

Površina formirana okretanjem jednog luka cikloide oko osi x je

$$P_x = 2\pi \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t) \cdot \sqrt{16 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot 4 \sin \frac{t}{2} dt$$
$$= 64\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt = \left| \begin{matrix} u = \cos \frac{t}{2} & du = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt \\ u_1 = \cos 0 = 1 & u_2 = \cos \pi = -1 \end{matrix} \right|$$

$$= -64\pi \int_{1}^{-1} (1-u^2)du = 64\pi\left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 64\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{3}\pi \approx 268$$

6. Nađite površinu plohe koja nastaje rotacijom luka astroide

$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$$

oko osi y.

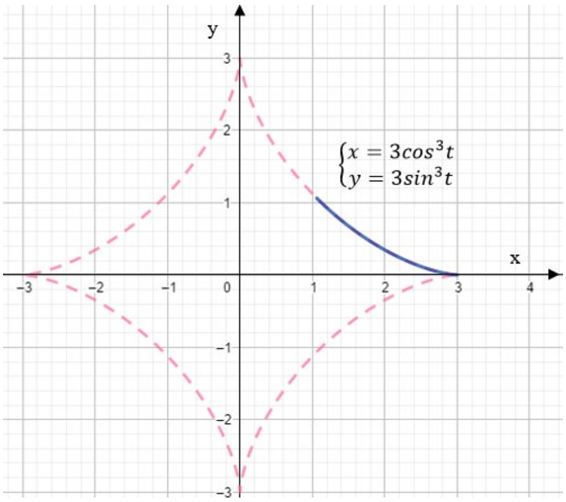
Rješenje

Slika 7.99 prikazuje astroidu (isprekidana crta), a plavom bojom označen je njen luk koji rotira oko osi y. Najprije određujemo derivacije $\dot{x}$ i $\dot{y}$, a nakon toga računamo izraz $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$.

$$\dot{x} = -9\cos^2 t \cdot \sin t$$

$$\dot{y} = 9\sin^2 t \cdot \cos t$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 81\cos^4 t \sin^2 t + 81 \sin^4 t \cos^2 t \\ &= 81 \cos^2 t \sin^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} = 81\cos^2 t \sin^2 t \end{aligned}$$



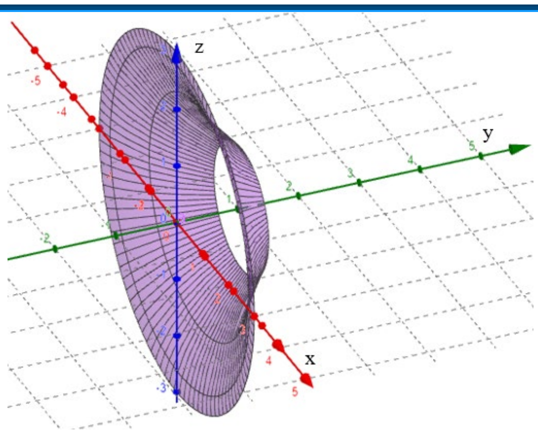
Slika 7.99

Rotacijom luka nastaje ploha Slika 7.100. Računamo površinu te plohe.

$$P_y = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\cos^3 t \cdot \sqrt{81\cos^2 t \sin^2 t}\, dt$$

$$= 2\pi \cdot 27 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t \sin t\, dt = \begin{vmatrix} u = \cos t & du = -\sin t\, dt \\ u_1 = \cos 0 = 1 & u_2 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -54\pi \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^4 du = -\frac{54}{5}\pi u^5 \Bigg|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{54}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{8} - 1\right)\pi = \frac{27}{20}(8-\sqrt{2})\pi \approx 27.93$$



Slika 7.100

Dodatak: Određivanje integrala

U rješenjima vježbi 2 i 3 koristili smo formulu

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\left(t\cdot\sqrt{1+t^2} + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right) + C$$

Integral se može odrediti parcijalnom integracijom. Označimo zadani integral s I pa primijenimo metodu

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{1+t^2}dt &= \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1+t^2} & du = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ dv = dt & v = t \end{matrix} \right| \\ &= t\cdot\sqrt{1+t^2} - \int t\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = t\cdot\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ &= t\cdot\sqrt{1+t^2} - \int \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt + \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ &= t\cdot\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}dt + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo jednadžbu

$$I = t\cdot\sqrt{1+t^2} - I + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|$$

u kojoj je nepoznanica traženi integral I. Jednadžbu rješavamo na već poznat način, kao i svaku drugu jednadžbu s jednom nepoznanicom.

$$2I = t\cdot\sqrt{1+t^2} + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|$$

$$I = \frac{1}{2}\left(t\cdot\sqrt{1+t^2} + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right) + C$$

7.14 Radni list provjere znanja

Primjena osnovnih formula neodređenih integrala

Među ponuđenim odgovorima nađite točno rješenje svakog zadanog integrala i upišite odgovarajuću formulu koja se koristi pri rješavanju.

	Integral	Točno rješenje	Formula
1	$\int 4x^3 dx$		
2	$2\int (\sqrt{x} + \sin x) dx$		
3	$\int \frac{5}{9+x^2} dx$		
4	$\int \left(6^x + \frac{2}{x}\right) dx$		
5	$\int x^4 \cdot \sqrt[3]{x^4} dx$		
6	$\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{3dx}{\sin^2 x}$		
7	$\int \sqrt{\frac{8}{x^2-8}} dx$		
8	$\int 7 \cosh x \, dx$		
9	$\int \frac{3^x}{3} dx$		
10	$\int \frac{6dx}{11\sqrt{36-x^2}}$		

Ponuđeni odgovori:

A. $\frac{1}{3} \cdot 3^x \cdot \frac{1}{\ln 3} + C$; B. $-\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + C$; C. $5 \operatorname{arctg} x + C$; D. $x^4 + C$;

E. $7 \sinh x + C$; F. $\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\cos x + C$; G. $2\sqrt{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2-8}\right| + C$;

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

H. $1\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; I. $\frac{6}{11}\arcsin\frac{x}{6}+C$ J. $\frac{4}{3}x^{3/2}+2(-\cos x)+C$;

K. $\frac{x^5}{5}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}{5}+C$; L. $\frac{6^x}{\ln 6}+2\ln|x|+C$; M. $2\left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\cos x\right)+C$;

N. $\frac{3^x}{\ln 27}+C$; O. $12x^2+C$; P. $\frac{3}{19}\cdot x^{\frac{19}{3}}+C$;

Q. $\frac{3}{\sqrt{3}}(-\operatorname{ctg} x)+C$; R. $3x^6\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{19}+C$.

Odgovori:

	Integral	Točno rješenje	Formula
1	$\int 4x^3dx$	D	$\int x^n dx=\frac{x^n}{n+1}+C$
2	$2\int(\sqrt{x}+\sin x)dx$	J, M	$\int x^n dx=\frac{x^n}{n+1}+C$; $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$
3	$\int\frac{5}{9+x^2}dx$	H	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$
4	$\int\left(6^x+\frac{2}{x}\right)dx$	L	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$; $\int\frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C$
5	$\int x^4\cdot\sqrt[3]{x^4}dx$	P, R	$\int x^n dx=\frac{x^n}{n+1}+C$
6	$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3dx}{\sin^2 x}$	B, Q	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$
7	$\int\sqrt{\frac{8}{x^2-8}}dx$	G	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C$
8	$\int 7\cosh x\,dx$	E	$\int\cosh x\,dx=\sinh x+C$
9	$\int\frac{3^x}{3}dx$	A, N	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
10	$\int\frac{6dx}{11\sqrt{36-x^2}}$	I	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$