7 INTEGRĀLRĒĶINI

Studēt termodinamikas pamatus bez augstākās matemātikas zināšanām (īpaši bez diferenciāļiem un integrāļiem) tas ir ...

Termodinamika ir tikai viena no daudzajām zinātņu nozarēm, kurā izmanto integrāļus. Tā, piemēram, integrālrēķinus plaši lieto mehānikā, elektrotehnikā, materiālmācībā, būvinženierijā, kā arī jūras navigācijā.

Šī nodaļa iepazīstina lasītāju ar nenoteiktajiem, noteiktajiem un neīstajiem integrāļiem. Līdz ar teorētiskajiem jautājumiem tiek aplūkotas arī integrēšanas tehnika un metodes, lai aprēķinātu figūru laukumu, līniju loku garumu, rotācijas ķermeņu tilpumu un virsmas laukumu. Tēma ir papildināta ar dažādiem reālās dzīves un jūrniecības uzdevumiem, kurus var risināt ar integrālrēķinu palīdzību.

Mācību Rezultāts:

1. Aprēķināt vienkāršus elementāro funkciju integrāļus
2. Pielietot noteikto integrāļu aprēķināšanas likumus
3. Izmantot sākuma nosacījumus, lai sastādītu integrāli
4. Aprēķināt tādu figūru laukumu, kas ierobežoti ar līknēm
5. Ķermeņu tilpuma aprēķināšanā izmantot integrālus
6. Integrālrēķinus pielietot dažādu jūrniecibas un biznesa problēmuzdevumu risināšanā

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

SATURS

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7 INTEGRĀLRĒĶINI

7.1 Nenoteiktais integrālis. Ievads

DETALIZĒTS APRAKSTS:

Šajā nodaļā tiek aplūkoti ievadjautājumi par nenoteikto integrāli – funkcijas atvasināšanai apgriezta procedūra; funkcijas primitīvā funkcija un primitīvo funkciju kopa; nenoteiktā integrāļa definīcija un sakars starp funkcijas atvasinājumu un integrāli. Ir doti piemēri, kuri attēlo funkcijas primitīvo funkciju grafikus. Nodaļas beigās pievienoti vingrinājumi patstāvīgam darbam un to atrisinājumi. Lai konstruētu funkciju grafikus, var lietot dažādas programmas tādas kā MS Excel, GeoGebra, DESMOS un citas.

Ieteicamā literatūra:

1. K.Šteiners, B.Siliņa. Augstākā matemātika. III, IV daļa. Rīga, Zvaigzne ABC, 1998
2. B.Siliņa, K.Šteiners. Rokasgrāmata augstākajā matemātikā. Rīga, Zvaigzne ABC, 2006
3. E.Kronbergs, P.Rivža, Dz.Bože. Augstākā matemātika. I, II daļa, Rīga, Zvaigzne, 1988
4. V.Liepiņa. Matemātika. Integrālrēķini un diferenciālvienādojumi. Metodiskais līdzeklis un individuālie aprēķinu darbi, II daļa, Rīga, LJA, 2010

MĒRĶIS: Izprast sakarību starp elementārās funkcijas atvasinājumu un nenoteikto integrāli. Izprast visu primitīvo funkciju kopas jēdzienu.

Mācību rezultāts:

1. Izpildīt elementāras funkcijas diferencēšanai apgrieztu darbību
2. Noteikt funkciju, ja ir dota tās maiņas ātruma izteiksme
3. Konstruēt dotas funkcijas grafiku

Priekšzināšanas: elementāro funkciju īpašības; elementāro funkciju grafiki; algebras un trigonometrijas formulas; funkciju atvasināšanas likumi.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Nenoteikto integrāļu aprēķināšanas metodes tiek lietotas arī noteikto integrāļu aprēķināšanā. Funkciju atvasināšana un integrēšana tiek plaši lietota, lai risinātu dažādus inženierzinātņu jautājumus. Navigācijas teorijā, piemēram, integrāļus lieto, lai izveidotu Merkatora kartes. Funkciju diferencēšana un integrēšana palīdz gūt izpratni par Zemes līknēm: noteikt attālumu līdz speciālam kuģa lokācijas punktam, ja kuģa kustības trajektorija ir sfēriska. Kuģu būvē tiek plaši pielietoti matemātiskās analīzes rezultāti, piemēram, lai noteiktu kuģa korpusa izliekumu; lai aprēķinātu kuģa korpusa apšuvuma plākšņu izmēru; lai risinātu kuģa stabilitātes un citus jautājumus.

Saturs

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

7.1.1 Primitīvā funkcija un nenoteiktā integrāļa definīcija

Iepriekšējās nodaļās apguvām nepārtrauktas funkcijas diferencēšanas likumus. Ja dota funkcija $F(x)$ un tās atvasinājums ir funkcija $f(x)$, to pieraksta sekojoši

$$F'(x) = f(x)$$

vai diferenciāļu formā

$$\frac{d(F(x))}{dx} = f(x).$$

Mēs interesēsimies par apgrieztu procedūru – kāda funkcija tika atvasināta, lai iegūtu funkciju $f(x)$? Piemēram, $f(x) = \cos x$.

Atbilstoši atvasināšanas formulām, zinām

$$\sin' x = \cos x$$

Ņemot vērā, ka skaitļa atvasinājums ir nulle

$$C' = 0,$$

var atrast dažādas funkcijas, kuru atvasinājums ir kosinusa funkcija

$$(\sin x + 1)' = \cos x; \quad (\sin x - 1.5)' = \cos x; \quad (\sin x + 3)' = \cos x$$

Varam secināt, ka visu tādu funkciju atvasinājums, kurām pie sinusa funkcijas pieskaitīts kāds reāls skaitlis, ir kosinusa funkcija. Tās veido veselu kopu, šādu funkciju skaits ir bezgalīgi liels:

$$\cos x = (\sin x + C)', C \in R.$$

Definīcija. Funkciju $F(x)$ sauc par ***funkcijas $\boldsymbol{f(x)}$ primitīvo funkciju***, ja tās atvasinājums vienāds ar doto funkciju

$$F'(x) = f(x).$$

Primitīvo funkciju aprēķināšana ir apgriezta procedūra atvasināšanai – šo procesu sauc par ***integrēšanu***.

Definīcija. Dotās funkcijas $f(x)$ ***nenoteiktais integrālis*** ir visu tās primitīvo funkciju kopa $F(x) + C$, kas tiek apzīmēta

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kur

zīmi $\int$ sauc par ***integrāļa zīmi***,

$f(x)$ sauc par ***zemintegrāļa funkciju***,

x ir integrēšanas ***mainīgais***,

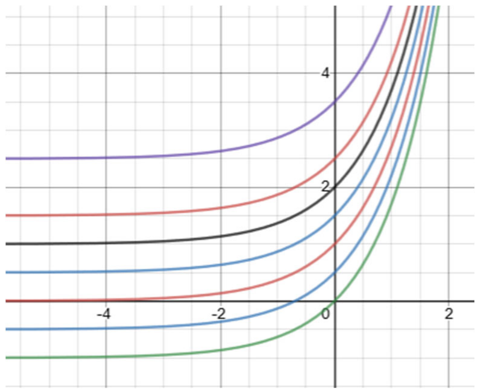
C ir ***integrēšanas konstante***.

Iepriekš aplūkoto piemēru var pierakstīt ar integrāļa palīdzību

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

7.1.2 Nenoteiktā integrāļa ģeometriskā interpretācija

Ģeometriski visu funkcijas $f(x)$ primitīvo funkciju grafiki blīvi noklāj visu koordinātu plakni. Piemēram, visu primitīvo funkcija kopas $F(x) = e^x + C$ pārstāvji attēloti zīmējumā 2.1.



Zīmējums 2.1 Dažas no primitīvo funkciju kopas $F(x) = e^x + C$ funkcijām

Mēs varam atrast vienu noteiktu funkciju no visas atbilžu kopas, ja ir doti kādi sākuma nosacījumi, tas ir, ir dotas kāda punkta koordinātes, kurš atrodas uz funkcijai atbilstošas līknes.

Piemērs 2.1 Atrast funkciju $\omega(x)$, kuras maiņas ātrums izteikts kā $\omega'(x) = \cos x$ un kuras grafiks iet caur punktu $M(0,2)$.

Atrisinājums Uzdevumu atrisināsim divos soļos.

Solis 1. Atradīsim funkcijas $\cos x$ visu primitīvo funkciju kopu

$$\omega(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

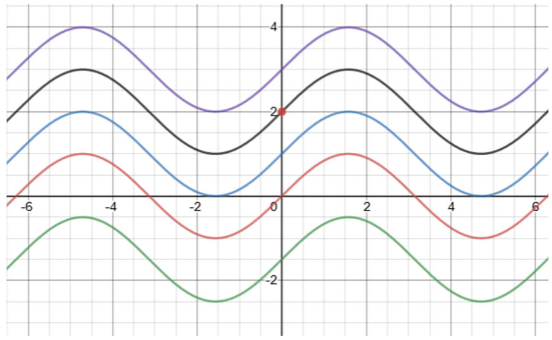
Solis 2. Aprēķināsim noteiktu konstantes C vērtību, kas atbilst dotajam punktam $M(0,2)$

$$\omega(0) = \sin 0 + C = C$$

$$\omega(0) = 2; \; C = 2$$

Atbilde $\omega(x) = \sin x + 2$.

Šīs funkcijas grafiks pieder visu funkciju kopai $\omega(x) = \sin x + C$. Punkts $M(0, 2)$ ir funkcijas grafika $\omega(x) = \sin x + 2$ krustpunkts ar y-asi (skat.zīm. 2.2).



Zīmējums 2.2 Funkciju $\omega(x) = \sin x + C$ kopa

Nenoteikto integrāli var lietot arī, lai izteiktu fizikālu procesu funkcionālas sakarības.

Piemērs 2.2 Gaismas raķete tiek izšauta vertikāli no zemes uz augšu ar ātrumu 15 m/s. Aprēķināt, cik augstu būs raķete pēc 2.5 sekundēm!

Komentārs Te pieņemsim, ka nav grūti noteikt tādu funkciju, kuras atvasinājums ir $-9.8t + 15$

Atrisinājums Dotā ķermeņa ātrumu atkarībā no laika var izteikt, ievērojot gravitācijas likumu (ķermeņa brīvās krišanas konstante ir aptuveni 9.8 m/s^2).

$$v(t) = -9.8t + C$$

Sākuma momentā raķetes ātrums ir 15 m/s ($t = 0$). Aprēķinām $C = 15.$

Dotajā gadījumā ātruma funkcija ir

$$v(t) = -9.8t + 15$$

Lai atrastu raķetes augstumu virs zemes $s(t)$, integrēsim ātruma funkciju

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (-9.8t + 15)dt =$$

$$= -4.9t^2 + 15t + C$$

Sākuma momentā $t = 0,\ s = 0$ tāpēc $C = 0$. Aprēķināsim raķetes augstumu pēc 2.5 sekundēm

$$s(2.5) = -4.92.5^2 + 15 \cdot 2.5 = 6.875\ m$$

7.1.3 Primitīvo funkciju īpašība

Mēs redzējām, ka kādai funkcijai $f(x)$ ir vairākas primitīvās funkcijas. Rodas jautājums – cik lielā mērā tās divas dažādas primitīvās funkcijas atšķiras viena no otras? Atbildi sniedz sekojošā teorēma:

Teorēma. Ja funkcijas $F_1(x)$ un $F_2(x)$ ir divas dažādas dotās funkcijas $f(x)$ primitīvās funkcijas, tad tās atšķiras par konstanti.

Ja ir dots, ka $[F_1(x)]' = f(x)$ un $[F_2(x)]' = f(x)$, aplūkojam starpību

$$[F_1(x)]' - [F_2(x)]' = 0 \text{ jeb } [F_1(x) - F_2(x)]' = 0.$$

Varam secināt, ka $F_1(x) - F_2(x) = C$, jo $C' = 0$.

7.1.4 Vingrinājumi

Atrast funkciju $f(x)$ atbilstošās primitīvās funkcijas, lietojot elementāro funkciju atvasināšanas formulas un dotos sākuma nosacījumus. Konstruēt funkciju $f(x)$ grafikus!

1. $f'(x) = 3x^2$; $f(0) = -1$

2. $f'(x) = e^x$; $f(1) = e$

3. $f'(x) = \frac{1}{2x}$; $f(1) = 1.5$

4. $f'(x) = 2\sin x$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0.75$

5. $f'(x) = 4x - 3$; $f(1) = 1$

6. Automašīna sāk kustību no sākuma punkta ar paātrinājumu $a(t) = 2t - 5\ {}^{m}/_{s^2}$. Aprēķināt automašīnas atrumu!

7.1.5 Atrisinājumi

1.vingrinājuma atrisinājums Mums ir zināma formula

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

No dotā $f'(x) = 3x^2$ varam spriest, ka $n = 3$, un atrast $(x^3)' = 3x^2$.

Pierakstot šo darbību ar integrāļa palīdzību, atrodam atrisinājumu kopu

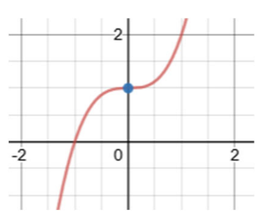
$$\int f'(x)dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Izmantojot sākuma nosacījumus $x = 0$; $y = 1$, aprēķinam konstantes C vērtību

$$0 + C = 1; \quad C = 1$$

Atbilde Meklējamā funkcija ir

$$f(x) = x^3 + 1$$



Zīmējums 4.1 Funkcijas $f(x) = x^3 + 1$ grafiks iet caur punktu (0; 1).

2.vingrinājuma atrisinājums Zinām formulu

$$(e^x)' = e^x$$

Lietojot integrāļa pierakstu, iegūstam atrisinājumu kopu jeb primitīvo funkciju kopu

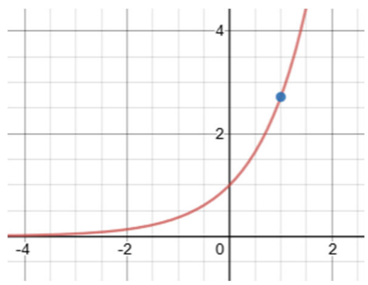
$$\int e^x dx = e^x + C$$

Pielietojot sākuma nosacījumus $x = 1;\ \ y = e$, iegūstam

$$e^1 + C = e; \quad C = 0$$

Atbilde

$$f(x) = e^x$$



Zīmējums 4.2 Funkcija $f(x) = e^x$ iet caur punktu (1; e).

3.vingrinājuma atrisinājums Lietosim formulas

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ un $(af(x))' = a(f(x))'$, kur a ir konstante.

Tad

$$\left(\frac{1}{2}\ln x\right)' = \frac{1}{2}(\ln x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

Pierakstīsim integrāli

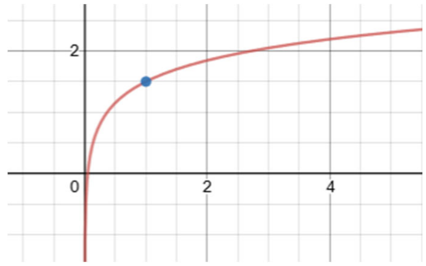
$$\int \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln x}{2} + C$$

Izmantosim sākuma nosacījumus $x = 1;\ \ y = 1.5$

$$\frac{\ln 1}{2} + C = 0 + C = 1.5; \quad C = 1.5$$

Atbilde

$$f(x) = \frac{\ln x}{2} + 1.5$$



Zīmējums 4.3 Funkcija $f(x) = \frac{\ln x}{2} + 1.5$ iet caur punktu (1; 1.5).

4.vingrinājuma atrisinājums Kosinusa atvasinājuma formula ir

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Tad varam sastādīt integrāli

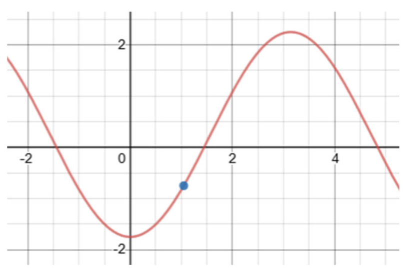
$$\int 2\sin x\, dx = 2\int \sin x\, dx = -\,2\cos x + C$$

Pielietojam sākuma nosacījumus $x = \frac{\pi}{3};\ \ y = -0.75$

$$-2\cos\frac{\pi}{3} + C = -2\cdot\frac{1}{2} + C = -0.75; \quad C = 0.25$$

Atbilde

$$f(x) = -2\cos x + 0.25$$



Zīmējums 4.4 Funkcija $f(x) = -2\cos x + 0.25$ iet caur punktu $\left(\frac{\pi}{3}, -0.75\right)$.

5.vingrinājuma atrisinājums Zinām, ka

$$(x^2)' = 2x; \quad (3x)' = 3$$

un

$$(2x^2 - 3x)' = 2(x^2)' - (3x)' = 4x - 3$$

Lietojot integrāļa pierakstu, iegūstam

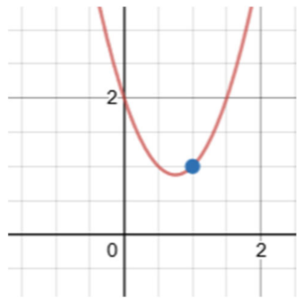
$$\int (4x - 3)dx = 2x^2 - 3x + C$$

Izmantojot sākuma nosacījumus $x = 1;\ \ y = 1$

$$2 - 3 + C = 1; \quad C = 2$$

Atbilde

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$



Zīmējums 4.5 Funkcija $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$
iet caur punktu (1; 1).

6. Automašīna sāk kustību no sākuma punkta ar paātrinājumu a$(t) = 2t - 5\ {}^{m}/_{s^2}$. Aprēķināt automašīnas ātrumu!

Atrisinājums

Ātrumu var aprēķinat sekojoši:

$$v(t) = \int a(t)dt$$

Lietojot pakāpes funkcijas atvasināšanas formulu, varam spriest, ka izteiksmi $2t - 5$ var iegūt, atvasinot funkcijas t^2 un $5t$. Tāpēc primitīvā funkcijas būs

$$F(x) = t^2 - 5t$$

Vispārīgā veidā $v(t) = t^2 - 5t + C$.

Sākuma momentā $t = 0, v(0) = 0$, tāpēc $C = 0$. Tad var izteikt ātruma funkciju

$$v(t) = t^2 - 5t$$

Ar šīs funkcijas palīdzību var noteikt automašīnas atrumu pēc kāda laika momenta, piemēram, pēc 10 sekundēm

$$v(10) = 100 - 50 = 50\ m/s$$

7.2 Integrēšanas pamatlikumi

Detalizēts apraksts:

Nodaļā iekļautas elementāro funkciju integrēšanas pamatformulas un aplūkotas nenoteikto integrāļu pamatīpašības. Tiek paskaidrots, kā no atvasināšanas formulām var iegūt integrēšanas formulas. Ir doti atbilstoši piemēri ar paskaidrojumiem, kā arī ir doti vingrinājumu patstāvīgam darbam. Nodaļas beigās ir dots piemērs, kā pārbaudīt, vai integrālis ir pareizi atrisināts.

Mērķis: Iepazīties ar integrāļu pamat īpašībām un mācīties integrēšanas pamat formulas; iepazīties ar integrēšanas metodēm

Mācību rezultāts:

1. Mācīties integrēšanas pamatformulas
2. Iepazīties ar integrāļu īpašību pielietošanu
3. Aprēķināt vienkāršus elementāro funkciju integrāļus
4. Integrējamo izteiksmju pārveidošana

Priekšzināšanas: atvasināšanas likumi, izpratne par jēdzienu anti-atvasinājums; algebrisku un trigonometrisku formulu zināšanas, ko pielietot integrējamo funkciju pārveidošanai.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Nenoteiktos integrāļus risina, lai apgūtu integrēšanas metodes, kuras pielietot noteikto integrāļu aprēķināšanā. Diferenciālrēķini un integrēšana tiek plaši izmantotas, lai atrisinātu daudzas inženierzinātņu problēmas. Integrāļu aprēķinus pielieto navigācijas teorijā, piemēram, veidojot Merkatora karti. Diferenciāļi un integrāļi palīdz gūt izpratni par zemes izliekumu: kā noteikt attālumu, ko kuģis veic virzoties pa līkni, lai sasniegtu noteiktu galamērķi. Matemātiskās analīzes rezultāti tiek izmantoti kuģu būvē, piemēram, lai noteiktu kuģa korpusa izliekumu, kā arī laukumu zem korpusa.

Saturs

7.2.1 Integrēšanas formulas

Integrāļu formulas varam uzrakstīt, ievērojot to, ka integrēšana ir apgriezta darbība atvasināšanai. Izprotot šo apgriezto procesu, varam sastādīt integrēšanas formulas. Jebkuru šādu formulu

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

var pierādīt ar atvasināšanas palīdzību – vienādības labās puses funkcijas atvasinājumam ir jāsakrīt ar zemintegrāļa funkciju:

$$\frac{d(F(x) + C)}{dx} = f(x)$$

Piemēram, pamatosim formulu

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

Formulas labās puses atvasinājums

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' + C' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n + 0 = x^n$$

Speciālgadījumam $n = -1$ atbilst cita formula

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = lnx + C$$

7.2.2 Integrēšanas pamatformulu saraksts

Atvasināšanas formulu saraksts aptver visas elementārās pamatfunkcijas. Tāpēc arī integrāļu pamatformulu sarakstā ir iekļautas visas pamatelementārās funkcijas – pakāpes funkcijas, eksponentfunkcijas, logaritmiskās funkcijas, trigonometriskās un ciklometriskās funkcijas:

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$

3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$

10. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{arctg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

Šis saraksts tiek papildināts ar hiperboliskajām funkcijām un tādām zemintegrāļa funkcijām, kuras izskatās līdzīgas inverso trigonometrisko funkciju atvasinājumiem:

12. $\int \mathrm{sh} x \, dx = \mathrm{ch} x + C$

13. $\int \mathrm{ch} x \, dx = \mathrm{sh} x + C$

14. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C$

15. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{tgh} x + C$

16. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

18. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Minēto funkciju integrēšanas pamatformulas ir spēkā pie jebkura funkcijas argumenta apzīmējuma - x; t; ω; s vai kāda cita. Piemēram, sekojošās formulas ir patiesas, atbilstoši formulai 6:

$$\int \sin t \, dt = -\cos t + C \quad \text{vai} \quad \int \sin\omega \, d\omega = -\cos\omega + C.$$

7.2.3 Nenoteikto integrāļu īpašības

Aplūkosim svarīgākās integrāļu īpašības.

1. Īpašība. Integrāļa atvasinājums ir vienāds ar zemintegrāļa funkciju

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2. Īpašība. Integrālis no funkciju summas vienāds ar divu integrāļu summu

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

3. Īpašība. Jebkuram skaitlim a ir spēkā

$$\int af(x)d = a\int f(x)dx$$

4. Īpašība. Integrālis no funkcijas diferenciāļa ir vienāds ar šo funkciju plus integrācijas konstante

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Pirmā īpašība izriet no integrāļa definīcijas. Citas īpašības var pierādīt, pamatojoties uz integrāļu pirmo īpašību un atvasināšanas likumiem.

Piemērs 3.1 Aprēķini integrāli

$$\int (\sin x + e^x)dx$$

Atrisinājums

Kombinējot integrāļu otro īpašību un formulas 4. un 6., iegūstam

$$\int (\sin x + e^x)dx = \int \sin x\, dx + \int e^x dx =$$
$$= -\cos x + e^x + C$$

Piemērs 3.2 Aprēķini integrāli

$$\int \frac{5}{9+x^2}dx$$

Atrisinājums

Pielietojam trešo integrāļu īpašību un 16. formulu

$$\int \frac{5}{9+x^2}dx = 5\int \frac{dx}{9+x^2} =$$
$$= 5 \cdot \frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x}{3} + C$$

Piemērs 3.3 Aprēķini integrāli

$$\int \left(4x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{3\ln 7}{x}\right) dx$$

Atrisinājums

$$\int \left(4x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{3\ln 7}{x}\right) dx = 4\int x^3 dx - 2\int x^{\frac{1}{2}} dx + 3\ln 7\int \frac{dx}{x} =$$
$$= 4\frac{x^3}{4} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\ln 7 \cdot \ln|x| + C =$$
$$= x^3 - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 3\ln 7 \cdot \ln|x| + C$$

7.2.4 Zemintegrāļa funkcijas pārveidošana

Vairumā gadījumu zemintegrāļa funkcijas ir visai komplicētas, tāpēc ir nepieciešamas dažādas funkciju integrēšanas metodes. Tomēr atsevišķas funkcijas var pārveidot, izmantojot algebras likumus un trigonometrijas formulas. Aplūkosim vairākus šādus piemērus.

Piemērs 4.1 Aprēķini integrāli

$$\int \frac{dx}{\sqrt{81-49x^2}}$$

Atrisinājums

Pārveidosim izteiksmi zem kvadrātsaknes, lai varētu pielietot 17. formulu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{81-49x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{49\left(\frac{81}{49}-x^2\right)}} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{81}{49}-x^2}} = \frac{1}{7}arcsin\frac{7x}{9} + C$$

Piemērs 4.2 Aprēķini integrāli

$$\int (2-x)^2 dx$$

Atrisinājums

Pielietosim pilnā kvadrāta formulu

$$\int (2-x)^2 dx = \int (4-4x+x^2)dx = 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} + C$$

Piemērs 4.3 Aprēķini integrāli

$$\int \frac{x^2-5x+6}{x-2}dx$$

Atrisinājums

Sadalīsim skaitītāju reizinātājos un vienkāršosim zemintegrāļa funkciju

$$\int \frac{x^2-5x+6}{x-2}dx = \int \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}dx = \int (x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

Piemērs 4.4 Aprēķini integrāli

$$\int \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x}}dx$$

Atrisinājums

Pielietosim pakāpju īpašības

$$\int \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x}}dx = \int x^{2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7}x^3 \cdot \sqrt{x} + C$$

Piemērs 4.5 Aprēķini integrāli

$$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$$

Atrisinājums

Lietosim trigonometrisko kosinusa funkcijas dubultleņķa formulu

$$\int \cos^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

Sarežģītāku integrāļu aprēķināšanai lietosim speciālas metodes, kuras aplūkosim nākamajās nodaļās.

7.2.5 Vingrinājumi

Aprēķini sekojošos integrāļus, lietojot integrēšanas pamatformulas un algebriskus pārveidojumus, ja tas ir nepieciešams.

1. $\int \left(6x^3 + \frac{2}{5x^3} - 12\right) dx$

2. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - x^{0.5} + \frac{4}{x}\right) dx$

3. $\int \left(3\sin x + \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx$

4. $\int \left(12^x - \frac{1}{\cos^2 x} + e^x\right) dx$

5. $\int \frac{16}{x^2 + 25} dx$

6. $\int \left(\mathrm{sh}t - \frac{1}{\sqrt{t^2 - 64}}\right) dt$

7. $\int \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot \sqrt{x^3}}{x^{-\frac{1}{2}}}} dx$

8. $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} dx$

7.2.6 Atrisinājumi

1. $\int \left(6x^3 + \frac{2}{5x^3} - 12\right) dx = 6\int x^3 dx + \frac{2}{5}\int x^{-3} dx - 12\int dx =$

$$= \frac{6x^4}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{x^{-2}}{2} - 12x + C = 1.5x^4 - \frac{1}{5x^2} - 12x + C$$

2. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - x^{0.5} + \frac{4}{x}\right) dx = \frac{1}{2}\int x^{-0.5} dx - \int x^{0.5} dx + 4\int \frac{dx}{x} =$

$$= \frac{1}{2}\frac{x^{0.5}}{0.5} - \frac{x^{1.5}}{1.5} + 4\ln|x| + C = \sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\ln|x| + C$$

3. $\int \left(3\sin x + \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx = 3\int \sin x\, dx + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -3\cos x - 2\mathrm{ctg}x + C$

4. $\int \left(12^x - \frac{1}{\cos^2 x} + e^x\right) dx = \int 12^x dx - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int e^x dx =$

$$= \frac{12^x}{\ln 12} - \mathrm{tg}x + e^x + C$$

5. $$\int \frac{16}{x^2+25}dx = 16\int \frac{dx}{x^2+5^2} = 16 \cdot \frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{x}{5} + C$$

6. $$\int \left(\mathrm{sh}t - \frac{1}{\sqrt{t^2-64}}\right)dt = \int \mathrm{sh}t\, dt - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-64}} =$$

$$= \mathrm{ch}t - \ln\left|t + \sqrt{t^2-64}\right| + C$$

7. $$\int \sqrt[3]{\frac{x^4 \cdot \sqrt{x^3}}{x^{-\frac{1}{2}}}}dx = \int \left(x^{4+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{6\cdot\frac{1}{3}}dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

8. $$\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx = \int \frac{(x+1)(x+4)}{x+1}dx = \int (x+4)\, dx =$$

$$= \int x\, dx + 4\int dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

7.2.7 Piezīme

Katru integrēšanas rezultātu var pārbaudīt, atvasinot primitīvo funkciju. Tā pārbaudīsim piemēra 3.2 iznākumu. Atvasināsim primitīvo funkciju pēc saliktu funkciju atvasināšanas likuma

$$\left(5 \cdot \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3} + C\right)' = \frac{5}{3}\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{3}\right)' + C' =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{9+x^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9+x^2}$$

Esam ieguvuši tieši tādu funkciju, kas sakrīt ar atbilstošo zemintegrāļa funkciju.

7.3 Integrēšanas Tehnika

7.3.1 Integrēšanas Tehnika: Substitūcija

DETALIZĒTS APRAKSTS:

Šajā nodaļā aplūkosim saliktu funkciju integrēšanas metodes. Saliktu funkciju atvasināšanas likums tiks izmantots kā pamat arguments saliktu funkciju integrēšanā. Tiks aplūkots apgrieztais saliktu funkciju likums un substitūcijas metode. Substitūcijas metode tiek lietota, lai vienkāršotu integrāļa pierakstu. Nodaļā tiek aplūkoti dažādi piemēri. Atsevišķi tiek aplūkoti gadījumi, kad saliktās funkcijas arguments ir lineāra funkcija.

MĒRĶIS: Apgūt substitūcijas metodi saliktu funkciju integrēšanai.

Mācību rezultāts:

1. Studenti iepazīsies ar diferenciāļa pārveidošanas metodi
2. Studenti mācēs veikt integrēšanu, izmantojot apzīmēšanas metodi
3. Studenti mācēs izvēlēties piemērotu substitūciju integrāļa vienkāršošanai

Priekšzināšanas: Atvasināšanas likumi; integrēšanas pamat formulas; algebras formulas; elementārās matemātikas zināšanas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Nenoteikto integrāļu aprēķināšanas metodes tiek lietotas arī, risinot noteiktos integrāļus. Integrāļi un diferenciāļi tiek plaši lietoti, risinot dažādus inženiertehniskos jautājumus. Navigācijas teorijā integrāļi tiek lietoti praktisku uzdevumu risināšanā, piemēram, integrāļus lieto, lai izveidotu Merkatora karti. Atvasinājumi un integrāļi palīdz iegūt precīzāku izpratni par Zemeslodes paralēlēm – kā sasniegt doto punktu, kāds ir attālums līdz tam, ja kuģis iet paralēles virzienā. Matemātiskās analīzes rezultāti tiek lietoti kuģubūves projektos, piemēram, lai aprēķinātu kuģa korpusa izliekumu kā arī korpusa virsmas laukumu.

Saturs

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Substitūcija

7.3.1.1 Saliktas funkcijas integrēšana

Iepriekšējā nodaļā risinājām integrāļus, kur jāintegrē pamat elementāras vienargumenta funkcijas no argumenta x. Kā integrēt saliktas funkcijas?

Salikta funkcija ir kombinācija no divām funkcijām $f(x)$ un $g(x)$, kur viena no tām ir otras funkcijas arguments $f(g(x))$.

Funkcija $g(x)$ ir iekšējā funkcija, bet funkcija $f(x)$ ir ārējā.

Saliktu funkciju piemēri

$$1)\ \sin 3x;\quad 2)\ \cos(x^2);\quad 3)\ e^{\operatorname{tg}x};\quad 4)\ (6x+7)^{13}$$

Piemēros kā iekšējās funkcijas dotas lineāras funkcijas $3x$ un $6x+7$, bet nelineāras iekšējās funkcijas ir x^2 un $\operatorname{tg}x$. Ārējās funkcijas ir $\sin x$; $\cos x$; e^x; x^{13}.

7.3.1.2 Saliktas funkcijas integrēšanas metode

Atcerēsimies *saliktas funkcijas atvasināšanas likumu*

$$\boldsymbol{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Pieņemsim, ka jānosaka, kas tā ir par funkciju, kuras atvasinājums ir $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Pielietosim atvasināšanai apgrieztu procedūru, lai atrisinātu šo problēmu. Piemēram, vai protam atrast tādu funkciju, kuras atvasinājums ir $\cos(x^2) \cdot 2x$?

Te saliktā funkcijas ir $\cos x^2$, kuras arguments jeb iekšējā funkcijas ir x^2. Atvasinājums no x^2 ir

$(x^2)' = 2x$.

Pārbaudīsim saliktas funkcijas atvasinājumu

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Izpildīto meklēšanas procedūru var aprakstīt ar integrāļa palīdzību

$$\int \cos(x^2) \cdot 2x dx = \sin(x^2) + C$$

Vienkāršosim integrāļa pierakstu, izmantojot substitūciju

$$\text{ja } u = x^2, \qquad \text{tad } du = d(x^2) = (x^2)'dx = 2xdx$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + C, \qquad \text{kur } u = x^2.$$

Vispārīgā gadījumā pierakstīsim *saliktas funkcijas integrēšanas likumu*:

$$\boldsymbol{\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = f(g(x)) + C}$$

7.3.1.3 Metodes pielietojums

Pamatojoties uz funkcijas $u = u(x)$ diferenciāļa definīciju, funkcijas diferenciāli var aprēķināt

$$\boldsymbol{du = u'dx}$$

Tā varam vienkāršāk pierakstīt integrāli no saliktas funkcijas

$$\int \boldsymbol{f(u)du = F(u) + C}$$

Tāpēc visus pamatelementāro funkciju integrāļus (skat. nodaļu "Integrēšanas Pamatlikumi") var pārveidot saliktu funkciju gadījumam. Piemēram, formulas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$$

Var pārveidot saliktu funkciju gadījumam, kur salikto funkciju arguments ir funkcija u

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}u + C$$

Piemērs 3.1 Aprēķināt integrāli

$$\int \cos^5 x d(\cos x)$$

Atrisinājums

Ievērosim, ka

$$\int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C$$

Tā varam šo formulu pielietot dotajam integrālim, kur funkcijas u vietā dota funkcija $\cos x$

$$\int \cos^5 x d(\cos x) = \frac{\cos^6 x}{6} + C$$

Piemērs 3.2 Aprēķināt integrāli

$$\int (8 - 11x)^5 d(8 - 11x)$$

Atrisinājums

Ievērosim, ka te varam lietot to pašu formulu, ko lietojām piemērā 3.1, bet kosinusa funkcijas vietā ir cita funkcija $u = 8 - 11$

$$\int (8-11x)^5 d(8-11x) = \frac{(8-11x)^6}{6} + C$$

Piemērs 3.3 Aprēķināt integrāli

$$\int \frac{d(4^x)}{\cos^2(4^x)}$$

Atrisinājums

$$\int \frac{d(4^x)}{\cos^2(4^x)} = \text{tg}(4^x) + C$$

7.3.1.4 Diferenciāļa pārveidošana

Iepriekšējā paragrāfa ietvaros aplūkojām tādus piemērus, kur zemintegrāļa izteiksme satur salikto funkciju un arī saliktās funkcijas argumenta diferenciāli, kur šī iekšējā funkcija ir integrēšanas mainīgais. Šāda veida integrāļus samērā vienkārši var izveidot, ja saliktās funkcijas arguments ir lineāra funkcija

$$\int f(ax+b)dx$$

Aprēķināsim diferenciāli no lineāras funkcijas

$$d(ax+b) = (ax+b)'dx = adx$$

Aprēķins parāda, ka diferenciāļi dx un $d(ax+b)$ atšķiras tikai par konstanti a. Tāpēc diezgan viegli var pārveidot integrāli

$$\boldsymbol{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$$

Piemērs 4.1

$$\int \sin 7x dx = \frac{1}{7}\int \sin 7x\, d(7x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + C$$

Piemērs 4.2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} + C$$

Piemērs 4.3

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x\, dx = \int \sin^5 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

7.3.1.5 Substitūciju metode

Vispārīgā gadījumā var vienkāršot integrāli no saliktas funkcijas ar apzīmēšanas palīdzību, ja var izveidot diferenciāli no iekšējās funkcijas

$$\int \boldsymbol{f(g(x)) \cdot g'(x)dx} = \int \boldsymbol{f(g(x))\, d(g(x))}$$

Piemēram, ja dots integrālis

$$\int x^3(0.5x^4+21)^{10}dx$$

varam ievērot sakarību starp iekšējo funkciju $0.5x^4+21$ un reizinātāju x^3. Reizinātājs ir daļa no iekšējās funkcijas atvasinājuma

$$(0.5x^4+21\ )' = 2x^3$$

Pārveidosim integrāli, apzīmējot saliktās funkcijas argumentu ar u

$$\int x^3(0.5x^4+21)^{10}dx =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{lai } u = 0.5x^4+21 \\ \text{tad } du = 2x^3dx\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int 2x^3(0.5x^4+21)^{10}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{10}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{11}}{11} + C =$$

$$= \frac{(0.5x^4+21)^{11}}{22} + C$$

Vispārinot - saliktu funkciju $f(u)$var integrēt pēc argumenta $u = u(x)$, ja zemintegrāļa funkcija satur arī funkcijas u atvasinājumu

$$\int \boldsymbol{f(u)u'dx} = \int \boldsymbol{f(u)du}$$

Šo metodi sauc par ***u-substitūciju*** vai vienkārši – ***substitūciju.***

7.3.1.6 Piemēri

Piemērs 6.1 Aprēķināt

$$\int \frac{dx}{5x+2}$$

Atrisinājums

$$\int \frac{dx}{5x+2} = \begin{vmatrix} \text{lai} \quad u = 5x+2 \\ \text{tad} \;\; du = (5x+2)'dx = 5dx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5} \cdot \ln|u| + C = \frac{1}{5} \cdot \ln|5x+2| + C$$

Piemērs 6.2 Aprēķināt

$$\int \frac{dx}{1+16x^2}$$

Atrisinājums

$$\int \frac{dx}{1+16x^2} = \begin{vmatrix} \text{lai} \;\; u = 4x \\ \text{tad} \; du = 4dx \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{4} arc\mathrm{tg}(4x) + C$$

Piemērs 6.3 Aprēķināt

$$\int \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x} dx$$

Atrisinājums

$$\int \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x} dx = \begin{vmatrix} \text{lai} \; u = \mathrm{tg}x \\ \text{tad} \; du = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int e^u du = e^u + C = e^{\mathrm{tg}x} + C$$

Piemērs 6.4 Aprēķināt

$$\int \frac{tdt}{(t+1)^3}$$

Atrisinājums

$$\int \frac{tdt}{(t+1)^3} = \begin{vmatrix} \text{lai } u = t+1; \ \ t = u-1 \\ \text{tad } du = dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{u-1}{u^3} du = \int u^{-2} du - \int u^{-3} du =$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} - \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{t+1} + \frac{2}{(t+1)^2} + C$$

7.3.1.7 Vingrinājumi

Aprēķināt integrāļus ar piemērotu u-substitūciju

1. $\int \cos(8\pi x) dx$

2. $\int \frac{dx}{(3-2x)^4}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+6)^2}}$

4. $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$

5. $\int \sqrt{x}\left(3+8x^{\frac{3}{2}}\right) dx$

6. $\int e^{\theta}\sqrt{12+e^{\theta}} d\theta$

7. $\int \operatorname{ctg} dt$

8. $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2} dx$

7.3.1.8 Atrisinājumi

1. $\int \cos(8\pi x) dx$

Atrisinājums

$$\int \cos(8\pi x) dx = \begin{vmatrix} \text{lai } u = 8\pi x \\ du = 8\pi dx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int \cos u \, du =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\text{sin}u + C = \frac{1}{8\pi}\sin(8\pi x) + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-2x)^4}$

Atrisinājums

$$\int \frac{dx}{(3-2x)^4} = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = 3-2x \\ du = -2dx \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{6(3-2x)^3} + C$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+6)^2}}$

Atrisinājums

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+6)^2}} = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = x+6 \\ du = dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \text{arcsin}u + C = \arcsin(x+6) + C$$

4. $\displaystyle\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$

Atrisinājums

$$\int \frac{\ln^5 x}{x}dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int u^5 du =$$

$$= \frac{u^6}{6} + C = \frac{\ln^6 x}{6} + C$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(3 + 8x^{\frac{3}{2}}\right)dx$

Atrisinājums

$$\int \sqrt{x}\left(3+8x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \begin{vmatrix} \text{lai } u = 3+8x^{\frac{3}{2}} \\ du = 12\sqrt{x}dx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}\int u\,du =$$

$$= \frac{1}{12}\frac{u^2}{2} + C = \frac{\left(3+8x^{\frac{3}{2}}\right)^2}{24} + C$$

6. $\int e^{\theta}\sqrt{12+e^{\theta}}d\theta$

Atrisinājums

$$\int e^{\theta}\sqrt{12+e^{\theta}}d\theta = \begin{vmatrix} \text{lai } u = 12+e^{\theta} \\ du = e^{\theta}d\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \int \sqrt{u}\,du =$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{12+e^{\theta}}^3 + C$$

7. $\int \operatorname{ctg} dt$

Atrisinājums

$$\int \operatorname{ctg} dt = \int \frac{\cos t}{\sin t}dt =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{lai } u = \sin t \\ du = \cos t\, dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin t| + C$$

8. $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}dx$

Atrisinājums

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}dx = \begin{vmatrix} \text{lai } u = \operatorname{arctg} x \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \int u^7 du =$$

$$= \frac{u^8}{8} + C = \frac{\mathrm{arctg}^8 x}{8} + C$$

7.3.2 Integrēšanas Tehnika: Parciālā Integrēšana

DETAILIZĒTS APRAKSTS:

Nodaļas iesākumā tiek aplūkota divu funkciju reizinājuma atvasinājuma formula. Integrējot šo formulu, tiek aplūkota divu funkciju reizinājuma integrēšanas metode, ko sauc par parciālās integrēšanas metodi. Tiek aplūkoti šīs metodes pielietojumi standarta gadījumos, kā arī doti šo standarta gadījumu risināšanas piemēri.

MĒRĶIS: **apgūt parciālās integrēšanas metodi un pazīt gadījumus, kad ir izdevīgi to lietot.**

Mācību rezultāts:

1. Studenti pazīst integrāļus, kuriem ir lietderīgi pielietot parciālās integrēšanas metodi.
2. Studenti prot lietot parciālo integrēšanu, lai varētu aprēķināt dažāda veida integrāļus.

Priekšzināšanas: Atvasināšanas likumi; integrēšanas likumi; substitūciju metode; algebras un trigonometrijas formulas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: parciālās integrēšanas metodi lieto, lai aprēķinātu Furjē rindas koeficientus. Furjē rindu lieto, lai aprakstītu periodiskus, fizikālus procesus, piemēram, signālu apstrādē, lai precīzi noteiktu mehānisko iekārtu vibrāciju izraisošus avotus.

Saturs

1. Parciālās integrēšanas formula
2. Speciālgadījumi
3. Piemēri
4. Metodes atkārtots pielietojums
5. Vingrinājumi
6. Atrisinājumi

Parciālā Integrēšana

7.3.2.1 Parciālās integrēšanas formula

Aplūkosim metodi, kuru ir lietderīgi pielietot gadījumā, ja ir jāintegrē divu funkciju reizinājums.

Ir dotas divas diferencējamas funkcijas $u = u(x)$ un $v = v(x)$. Aprēķināsim šo funkciju reizinājuma diferenciāli, lietojot ***funkciju reizinājuma difernciāļa likumu***

$$\boldsymbol{d(uv) = udv + vdu}$$

Integrējot vienādības abas puses, iegūstam

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$$

Pārnesot saskaitāmos un lietojot integrāļu īpašību $\int \boldsymbol{d(uv) = uv + C}$, iegūstam

$$\int \boldsymbol{udv = uv - \int vdu}$$

Šo formulu nosauc par ***parciālās integrēšanas formulu*** jeb ***integrēšanu pa daļām***. Integrēšanas konstanti neraksta, jo uzskata, ka tā ietilps formulas labās puses integrālī. Metodes lietojums ir ieteicams tad, ja labās puses integrālis nav sarežģītāks kā dotais integrālis.

Piemērs 1.1 Aprēķināt integrāli

$$\int xe^x dx$$

Atrisinājums

$$\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} \text{let} & u = x; \ dv = e^x dx \\ \text{tad} & du = dx; \ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Komentārs. Ievērosim, ka risinājumā tika lietota diferenciāļa aprēķināšanas formula

$$\boldsymbol{dv = v'dx},$$

lai mēs varētu integrēt funkciju $v(x)$.

7.3.2.2 Speciālgadījumi

Ir speciāla veida integrāļi, kuriem ir lietderīgi piemērot iepriekš aprakstīto metodi. Tie ir integrāļi, kur viens no zemintegrāļa funkcijas reizinātājiem ir polinoms. Var ievērot, ka polinoma kārta pie atvasināšanas samazinās. Otrs zemintegrāļa funkcijas reizinātājs var būt tāda funkcija, kura pie atvasināšanas nemainās, kā, piemēram, eksponentfunkcija e^x, vai arī, atvasinot šo reizinātāju, iegūst līdzvērtīgu funkciju, kā, piemēram, sinusa funkcijas atvasinājums ir kosinusa funkcija un otrādi. Šie gadījumi norāda uz atsevišķām standartsituācijām, kā izvēlēties parciālās integrēšanas funkciju $u = u(x)$.

Gadījums 1. Zemintegrāļa funkcija satur polinoma un trigonometriskas funkcijas $\sin x$ vai $\cos x$ reizinājumu

$\int P_n(x) \sin x \, dx$; mēs izvēlamies funkciju $u = P_n(x)$, tad atlikušo zemintegrāļa izteiksmes daļu apzīmējam ar $dv = \sin x dx$

Gadījums 2. Zemintegrāļa funkcija ir polinoma un eksponentfunkcijas e^x vai a^x reizinājums

$\int P_n(x) \, a^x dx$; mēs izvēlamies $u = P_n(x)$, tad diferenciālis ir $dv = a^x dx$

Gadījums 3. Zemintegrāļa funkcija ir polinoma un logaritmiskās funkcijas $\ln x$ vai $\log_a x$ reizinājums

$\int P_n(x) \log_a x dx$; mēs izvēlamies $u = \log_a x$, tad diferenciālis ir $dv = P_n(x) dx$

Komentārs. Polinoma vietā varētu būt arī pakāpes funkcija

$$\int x^k \ln x dx$$

Gadījums 4. Zemintegrāļa funkcija ir ciklometriskā funkcija, piemēram, $\arcsin x$ vai $\mathrm{arctg} x$

$\int \arcsin x \, dx$; mēs izvēlamies $u = arcsin x$, tad diferenciālis ir $dv = dx$

7.3.2.3 Piemēri

Piemērs 3.1 Aprēķināt integrāli

$$\int 2x\cos x \, dx$$

Atrisinājums

$$\int 2x\cos x \, dx = \left| \begin{matrix} \text{lai} & u = 2x; \; dv = \cos x \, dx \\ \text{tad} & du = 2dx; \; v = \int \cos x \, dx = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= 2x\sin x - \int 2\sin x \, dx = 2x\sin x + 2\cos x + C$$

Piemērs 3.2 Aprēķināt integrāli

$$\int x^3 \ln x \, dx$$

Atrisinājums

$$\int x^3 \ln x \, dx = \begin{vmatrix} \text{lai} \quad u = \ln x; \quad dv = x^3 dx \\ \text{tad} \;\; du = \frac{1}{x}dx; \;\; v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

Piemērs 3.3 Aprēķināt integrāli

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx$$

Atrisinājums

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \begin{vmatrix} \text{lai} \quad u = \text{arc}tgx; \quad dv = dx \\ \text{tad} \;\; du = \frac{dx}{1+x^2}; \;\; v = \int dx = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\text{arc}tgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\text{arc}tgx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x\text{arc}tgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x\text{arc}tgx - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

Vispārīgākā gadījumā zemintegrāļa funkcijas var būt saliktas, piemēram, $\sin ax$; $arctg(ax)$.

Piemērs 3.4 Aprēķināt integrāli

$$\int (x+1)\sin 4x \, dx$$

Atrisinājums

$$\int (x+1)\sin 4x \, dx = \begin{vmatrix} \text{lai} \quad u = x+1; \quad dv = \sin 4x \, dx \\ \text{tad} \;\; du = dx; \;\; v = \int \sin 4x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}(x+1)\cos 4x + \frac{1}{4}\int \cos 4x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}(x+1)\cos 4x + \frac{1}{16}\sin 4x + C$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.3.2.4 Metodes atkārtots pielietojums

Ja polinoms, kas ir zemintegrāļa funkcijas reizinātājs, ir nelineārs, tad parciālo integrēšanu jālieto atkārtoti. Ja polinoma pakāpe ir n, metodi lietosim atkārtoto n reizes, lai samazinātu polinoma pakāpi.

Piemērs 4.1 Aprēķināt integrāli

$$\int x^3 \sin x\, dx$$

Atrisinājums

Dotajam integrālim parciālās integrēšanas metodi pielietosim 3 reizes, jo dotā polinomam pakāpe ir 3.

$$\int x^3 \sin x\, dx = \begin{vmatrix} \text{lai} \quad u = x^3; & dv = \sin x\, dx \\ \text{tad} \ du = 3x^2 dx; & v = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -3x^3 cosx + 3\int x^2\, cosx\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{lai} \quad u = x^2; & dv = cosx\, dx \\ \text{tad} \ du = 2xdx; & v = \int cosx\, dx = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -3x^3 cosx + 3\left(x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{lai} \ \ u = x; \ \ dv = \sin x\, dx \\ \text{tad} \ \ du = dx; \ \ v = -cosx \end{vmatrix} =$$

$$= -3x^3 cosx + 3x^2 \sin x - 6\left(-xcosx + \int cosx\, dx\right) =$$

$$= -3x^3 cosx + 3x^2 \sin x + 6xcosx - 6\sin x + C$$

Piemērs 4.2 Aprēķināt integrāli

$$\int (x^2 - 3x + 7)2^x dx$$

Atrisinājums

$$\int (x^2 - 3x + 7)2^x dx = \begin{vmatrix} \text{lai} \quad u = x^2 - 3x + 7; & dv = 2^x dx \\ \text{tad} \ du = (2x - 3)dx; & v = \int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2 - 3x + 7)\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int (2x - 3)2^x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{lai } u = 2x - 3; & dv = 2^x dx \\ \text{tad } u = 2dx; & v = \int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} \end{matrix} \right| =$$

$$= (x^2 - 3x + 7)\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\left((2x - 3)\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int 2^x dx\right) =$$

$$= (x^2 - 3x + 7)\frac{2^x}{\ln 2} - (2x - 3)\frac{2^x}{(\ln 2)^2} + \frac{2 \cdot 2^x}{(\ln 2)^3} + C$$

7.3.2.5 Vingrinājumi

Aprēķināt integrāļus

1. $\int \frac{x}{8}\sin x \, dx$
2. $\int 5x \cdot 5^x dx$
3. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
4. $\int (x^2 + 1)cos2x \, dx$
5. $\int \arcsin x \, dx$

7.3.2.6 Atrisinājumi

1. $\int \frac{x}{8}\sin x \, dx$

Atrisinājums

$$\int \frac{x}{8}\sin x \, dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = \dfrac{x}{8}, & dv = \sin x \, dx \\ du = \dfrac{1}{8}dx, & v = \int \sin x \, dx = -cosx \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{x}{8}cosx + \frac{1}{8}\int cosx \, dx =$$

$$= -\frac{x}{8}cosx + \frac{1}{8}\sin x + C$$

2. $\int 5x \cdot 5^x dx$

Atrisinājums

$$\int 5x \cdot 5^x dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = 5x, \ \ dv = 5^x dx \\ du = 5dx, v = \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} \end{matrix} \right| =$$

$$= 5x\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{5}{\ln 5}\int 5^x dx =$$

$$= 5x\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{5 \cdot 5^x}{\ln^2 5} + C$$

3. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

Atrisinājums

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } \ u = \ln x, \ \ dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = \frac{1}{x}dx, \ \ v = \int x^{-2} dx = -x^{-1} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

4. $\int (x^2+1) cos2x \, dx$

Atrisinājums

$$\int (x^2+1) cos2x \, dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } \ u = x^2+1, \ \ dv = cos2x \, dx \\ du = 2xdx; \ v = \int cos2x \, dx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx =$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}cos2x + C$$

5. $\int \arcsin x\, dx$

Atrisinājums

$$\int arc\sin x\; dx = \begin{vmatrix} \text{lai } u = arc\sin x, & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= xarc\sin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx == \begin{vmatrix} \text{lai } u = 1 - x^2 \\ du = -2xdx \end{vmatrix} =$$

$$= xarc\sin x + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= xarc\sin x + \sqrt{u} + C =$$

$$= xarc\sin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Te risinājumā lietojām apzīmēšanu, lai vienkāršotu zemintegrāļa izteiksmi.

7.3.3 Integrēšanas Tehnika: Daļveida Racionālu Funkciju Integrēšana

DETALIZĒTS APRAKSTS:

Šajā nodaļa aplūkosim īpašas metodes, lai aprēķinātu nenoteiktos integrāļus no daļveida racionālām funkcijām. Apskatīsim īstas un neīstas racionālās funkcijas. Lietosim algebriskas metodes, lai racionālās daļas sadalītu elementārdaļās vai ari pakāpju funkciju summā. Tiks lietotas atbilstošas integrēšanas formulas. Nodaļā tiek izskaidroti vienkāršu racionālu funkciju integrāļu risināšanas piemēri.

Studenti var patstāvīgi pētīt piemērus, izmantojot zinātnisko kalkulatoru Symbolab Step-by-Step Calculator; Algebra; Rational Fractions (URL: https://www.symbolab.com/solver/partial-fractions-calculator). Ar šīs programmas palīdzību studenti var pārbaudīt arī savu risinājumu pareizību.

MĒRĶIS: Apgūt racionālu funkciju integrēšanas tehniku.

Mācību rezultāts:

1. Studenti prot sadalīt īstu racionālo daļu elementārdaļās
2. Studentu prot izpildīt polinomu dalīšanu
3. Prot atrisināt racionālo funkciju integrāļus

Priekšzināšanas: algebras identitātes; pilnā kvadrāta atdalīšanas metode; polinoma sadalīšana reizinātājos; polinoma saknes; integrēšanas un atvasināšanas pamatformulas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Nenoteikto integrāļu risināšanas metodes noder noteikto integrāļu aprēķināšanai. Daudzas inženiertehniskās problēmas tiek risinātas, izmantojot diferenciāļus un integrāļus. Navigācijas teorijā integrāļi tiek lietoti praktisku uzdevumu risināšanā, piemēram, integrāļus lieto, lai izveidotu Merkatora karti. Atvasinājumi un integrāļi palīdz iegūt precīzāku izpratni par Zemeslodes paralēlēm – kā sasniegt doto punktu, kāds ir attālums līdz tam, ja kuģis iet paralēles virzienā. Matemātiskās analīzes rezultāti tiek lietoti kuģubūves projektos, piemēram, lai aprēķinātu kuģa korpusa izliekumu kā arī korpusa virsmas laukumu.

Saturs

Daļveida Racionālo Funkciju Integrēšana

7.3.3.1 Daļveida racionālās funkcijas, īstas un neīstas racionālās funkcijas

Daļveida racionālu funkciju pieraksta

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}},$$

kur $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ ir polinomi

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_m$$

Ja skaitītāja polinoma $P_n(x)$ pakāpe ir mazāka nekā saucēja polinoma $Q_m(x)$ pakāpe m ($n < m$), tad racionālā funkcija

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

tiek saukta par ***īstu racionālo funkciju***, pretējā gadījumā - par ***neīstu racionālo funkciju***.

Piemēram,

$$f(x) = \frac{2}{x+3}$$

$$g(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$$

$$t(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

$$s(x) = \frac{x^2+3x-4}{x+1}$$

Funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ ir īstas racionālās funkcijas. Funkcijas $t(x)$ un $s(x)$ ir neīstas racionālās funkcijas.

7.3.3.2 Vienkāršāko gadījumu pamatintegrāļi

Vienkāršākos gadījumus jeb elementārdaļas vispārīgā veidā var pierakstīt sekojoši

$$f(x) = \frac{A}{x+B}$$

$$g(x) = \frac{A}{(x+B)^m}$$

$$s(x) = \frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+D}$$

Te var lietot šādas pamatformulas

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$\int \frac{dx}{x+B} = \ln|x+B| + C$$

$$\int \frac{du}{u^m} = \frac{u^{-m+1}}{-m+1} + C$$

Pirmās funkcijas integrālis ir

$$\int f(x)dx = \int \frac{A}{x+B}dx = A\int \frac{dx}{x+B} = A \cdot \ln|x+B| + C$$

Funkcijas $g(x)$ lineāro argumentu apzīmēsim ar $u = x + B$

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{A}{(x+B)^m}dx = \left|\begin{matrix} u = x+B \\ du = dx \end{matrix}\right| = A\int \frac{du}{u^m} =$$

$$= A\frac{u^{-m+1}}{-m+1} + C = A\frac{(x+B)^{-m+1}}{-m+1} + C$$

Integrējot funkciju $s(x)$, lietosim substitūciju $u = Ax^2 + Bx + D$, tad diferenciālis $du = 2Ax + B$

$$\int s(x)dx = \int \frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+D}dx =$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|Ax^2+Bx+D| + C$$

Piemērs 2.1

$$\int \frac{2}{x+3}dx = 2\int \frac{dx}{x+3} = 2\ln|x+3| + C$$

Piemērs 2.2

$$\int \frac{dx}{(x-1)^7} = \frac{(x-1)^{-7+1}}{-7+1} + C = \frac{-1}{6(x-1)^6} + C$$

Piemērs 2.3

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+10}dx =$$

$$= |u = x^2 + 5x + 10 \text{ un } du = (2x+5)dx| =$$

$$= \ln|x^2 + 5x + 10| + C$$

Citos gadījumos ir nepieciešams racionālo daļu sadalīt elementārdaļas, lai vienkāršotu integrēšanu.

7.3.3.3 Sadalīšana elementārdaļās

Lai ir dota īsta racionālā funkcija

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)};\ \ n < m$$

Pielietosim ***metodi racionālās daļās sadalīšanai elementārdaļās***, ja saucējs ir sadalīts reizinātājos. Aplūkosim trīs gadījumus:

Gadījums 1: Saucējā ir tikai lineāri reizinātāji;

Gadījums 2: Saucējs satur nereducējamu kvadrātisko formu;

Gadījums 3: Saucējā ir atkārtots lineārais reizinātājs.

Gadījums 1. Saucēju var sadalīt lineāros reizinātājos

Sekojošais piemērs parāda, ka funkciju integrēt ir vienkārši, ja tā sadalīta racionālajās daļās, kuru saucējā ir lineāra izteiksme

Piemērs 3.1

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx = \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}\right)dx =$$

$$= \int \frac{3}{x-1}dx - \int \frac{2}{x+2}dx =$$

$$= 3\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

Ja saucējā $Q_m(x)$ ir reālas saknes $x = -a$ un $x = -b$, tad to var sadalīt reizinātājos

$$Q_m(x) = k(x+a)(x+b)$$

Racionālo daļu var sadalīt divu elementārdaļu summā

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$$

Zinām, ka saucēja polinoma koeficienti un saknes a un b ir noteikti reāli skaitļi. Lai atrastu nezināmās konstantes A un B, jāvienādo elementārdaļu saucēji un jāpielīdzina racionālo daļu skaitītāji

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{kA(x+b)}{(x+a)(x+b)} + \frac{kB(x+a)}{(x+b)(x+a)}$$

$$P_n(x) = kA(x+b) + kB(x+a)$$

Tad vienādojumā ievietojam vērtības $x = -a$ un $x = -b$ un iegūstam

$$P_n(-a) = kA(b-a)$$

$$P_n(-b) = kB(a-b)$$

No šiem vienādojumiem var aprēķinat nezināmo konstanšu vērtību

$$A = \frac{P_n(-a)}{k(b-a)}$$

$$B = \frac{P_n(-b)}{k(a-b)}$$

Piemērs 3.2

Aprēķināt integrāli

$$\int \frac{4x+7}{x^2+x-6}dx$$

Atrisinājums

Pirmā daļa: sadalīšana elementārdaļās

Solis 1. Saucēju sadala reizinātājos

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

Solis2. Raksta elementārdaļas ar nezināmām konstantēm

$$\frac{4x+7}{x^2+x-6}=\frac{4x+7}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

Solis 3. Pielīdzina saucējus, vienādo skaitītājus un atmet saucējus vienādības abās pusēs

$$4x+7=A(x+3)+B(x-2)$$

Solis 4. Ievieto vērtību $x=2$, lai aprēķinātu konstanti A

$$4\cdot 2+7=A(2+3)+B(2-2)$$
$$8+7=5A$$
$$A=3$$

Solis 5. Ievieto vērtību $x=-3$, lai aprēķinātu konstanti B

$$4\cdot(-3)+7=A(-3+3)+B(-3-2)$$
$$-12+7=-5B$$
$$B=1$$

Otrā daļa: Integrēšana

$$\int \frac{4x+7}{x^2+x-6}dx=\int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right)dx=$$
$$=3\ln|x-2|+\ln|x+3|+C$$

Atbilde

$$\int \frac{4x+7}{x^2+x-6}dx=3\ln|x-2|+\ln|x+3|+C$$

Vispārīga gadījumā saucējs var saturēt vairāk nekā divus lineārus reizinātājus

$$\frac{P_n(x)}{k(x+a_1)(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_m)}=\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}+\ldots+\frac{A_m}{x+a_m}$$

Gadījums 2. Saucējs satur nereducējamu kvadrātisko formu

Ja racionālās funkcijas saucēju $Q_m(x)$ var pārveidot sekojošā veidā

$$Q_m(x) = k(x+a)(x^2+b),$$

Racionālo daļu var sadalīt divās elementārdaļās

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+D}{x^2+b}$$

Līdzīgi, izveidojam vienādojumu

$$P_n(x) = kA(x^2+b) + kBx(x+a) + kD(x+a)$$

Jeb, pierakstot polinoma $P_n(x)$ kanonisko formu, iegūstam

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = kA(x^2+b) + kBx(x+a) + kD(x+a)$$

Divi polinomi ir vienādi pēc definīcijas, ja tiem ir vienādas pakāpes un koeficienti pie attiecīgajām pakāpēm ir vienādi.

Tāpēc varam iegūt vienādojumu sistēmu, lai aprēķinātu nezināmās konstantes A, B, D

$$\begin{cases} a_0 = kA + kB \\ a_1 = kBa + kD \\ a_2 = kAb + kDa \end{cases}$$

Piemērs 3.3

Aprēķināt integrāli

$$\int \frac{4x^2+2x-3}{(x-2)(x^2+1)}dx$$

Atrisinājums

Pirmā daļa: sadalīšana elementārdaļās

Solis 1. Izveidojam elementārdaļas ar nezināmajām konstantēm

$$\frac{4x^2+2x-3}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+D}{x^2+1}$$

Solis 2. Vienādojam saucējus un atmetam tos

$$4x^2+2x-3 = A(x^2+1) + Bx(x-2) + D(x-2)$$

Solis 3. Izveidojam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 4 = A + B \\ 2 = -2B + D \\ -3 = A - 2D \end{cases}$$

Solis 4. Izsakām A no pirmā vienādojuma un ievietojam A vērtību sistēmas pēdējā vienādojumā

$$A = 4 - B$$

$$-3 = 4 - B - 2D$$

$$\begin{cases} 2 = -2B + D \\ -7 = -B - 2D \end{cases}$$

Solis 5. Reizinām pirmo vienādojumu ar 2 un saskaitām vienādojumus

$$-3 = -5B; \quad B = 0.6$$

Solis 6. Aprēķinām A un D

$$A = 4 - 0.6 = 3.4$$

$$D = 2 + 2B = 2 + 1.2 = 3.2$$

Otrā daļa: integrēšana

$$\int \frac{4x^2 + 2x - 3}{(x-2)(x^2+1)} dx =$$

$$= \int \left(\frac{3.4}{x-2} + \frac{0.6x + 3.2}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int \frac{3.4}{x-2} dx + 0.3 \int \frac{2xdx}{x^2+1} + 3.2 \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= 3.4\ln|x-2| + 0.3\ln|x^2+1| + 3.2\mathrm{arctg}x + C$$

Atbilde

$$\int \frac{4x^2 + 2x - 3}{(x-2)(x^2+1)} dx = 3.4\ln|x-2| + 0.3\ln|x^2+1| + 3.2\mathrm{arctg}x + C$$

Gadījums 3. Saucējā ir atkārtots lineārais reizinātājs

Ja racionālās daļas saucēju $Q_m(x)$ var sadalīt reizinātājos

$$Q_m(x) = k(x+a)^m = k(x+a) \cdot (x+a) \cdot \ldots \cdot (x+a),$$

Doto racionālo daļu var sadalīt elementārdaļās sekojoši

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x+a)^m}$$

Lai aprēķinātu nezināmos koeficientus A_1, A_2, ..., A_m, lietosim gadījumā 2 aprakstīto metodi.

Piemērs 3.4.

Aprēķināt

$$\int \frac{x^2 - x - 4}{(x-1)^3} dx$$

Atrisinājums

Pirmā daļa: sadalīšana elementārdaļās

Solis1. Rakstām elementārdaļas ar nezināmiem koeficientiem

$$\frac{x^2 - x - 4}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

Solis 2. Vienādojam un atmetam saucēju

$$x^2 - x - 4 = A(x-1)^2 + B(x-1) + D$$

$$x^2 - x - 4 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + D$$

Solis 3. Izveidojam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1 = A \\ -1 = -2A + B \\ -4 = A - B + D \end{cases}$$

Solis 4. Aprēķinām B un D

$$B = -1 + 2 = 1$$

$$D = -4 - 1 + 1 = -4$$

Otrā daļa: integrēšana

$$\int \frac{x^2 - x - 4}{(x-1)^3} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{(x-1)^3} \right) dx =$$

$$= \ln|x-1| - (x-1)^{-1} - 4\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C$$

Atbilde

$$\int \frac{x^2 - x - 4}{(x-1)^3} dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + C$$

7.3.3.4 Neīsto racionālo daļu pārveidošana

Neīsto racionālo daļu var izteikt kā polinoma summu plus īsta racionālā daļa

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

kur polinoma $T_{n-m}(x)$ pakāpe ir $n - m$ un $n \geq m$; $k < m$. Lai iegūtu šādu rezultātu, ir jāizpilda *polinomu dalīšana*.

Piemērs 4.1.

Aprēķināt

$$\int \frac{4x^3 - 12x + 16}{x - 2} dx$$

Atrisinājums

Solis 1. Veicam polinomu dalīšanu

$$\begin{array}{r}
4x^2 + 8x + 4 \\
x - 2 \overline{)4x^3 - 12x + 16} \\
\underline{-(4x^3 - 8x^2)} \\
8x^2 - 12x + 16 \\
\underline{-(8x^2 - 16x)} \\
4x + 16 \\
\underline{-(4x - 8)} \\
24
\end{array}$$

Solis 2. Integrējam soli pa solim

$$\int \frac{4x^3 - 12x + 16}{x - 2} dx =$$

$$= \int \left(4x^2 + 8x + 4 + \frac{24}{x - 2}\right) dx =$$

$$= \int 4x^2 dx + \int 8x dx + \int 4 dx + \int \frac{24}{x - 2} dx =$$

$$= \frac{4x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + 4x + 24\ln|x - 2| + C$$

Atbilde

$$\int \frac{4x^3 - 12x + 16}{x - 2} dx = \frac{4x^3}{3} + 4x^2 + 4x + 24\ln|x - 2| + C$$

7.3.3.5 Kopsavilkums

Lai aprēķinātu integrāli no racionālas funkcijas, ieteicams izpildīt sekojošos soļus

Sākuma solis. Novērtējam doto racionālo funkciju $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$

Gadījums 1. Ir dota neīsta racionālā funkcija $(n \geq m)$

Solis 1.1. Veicam polinomu dalīšanu $P_n(x) : Q_m(x)$

Solis 1.2. Doto integrāli pārveido kā integrāli no polinoma plus integrālis no īstas racionālās funkcijas

Solis 1.3. Integrē polinomu

Solis 1.4. Integrāli no īstās racionālās funkcijas integrē uzreiz, ja iespējams, vai izpilda darbības, kas aprakstītas gadījumā 2.

Gadījums 2. Dota īsta racionālā funkcija $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}; (n < m)$

Solis 2.1. Saucēju sadala reizinātājos, ja nepieciešamas.

Solis 2.2. Racionālo daļu sadala elementārdaļās

Solis 2.3. Integrē vienkāršās racionālās daļas

Komentārs. Ir divi paņēmieni, kā izpildīt soli 2.2. ***Ievietošanas metode*** – vienādojumā ievietojam lietderīgas mainīgā x vērtības (skat. piemēru 3.2.); ***nenoteikto koeficientu metode*** – pielīdzina koeficientus pie polinomu atbilstošajām pakāpēm (skat. piemērus 3.3 un 3.4). Abas metodes var arī kombinēt.

Piemērs 5.1.

Aprēķināt

$$\int \frac{x^4 + 12x - 6}{x^2(x-1)} dx$$

Atrisinājums

Sekosim iepriekš aprakstītajam plānam. Ir dots **gadījums 1** (dotā zemintegrāļa funkcija ir neīstā racionālā daļa). Izpildīsim **Soli 1.1**

$$\begin{array}{r l}
 & x + 1 \\
x^3 - x^2 & \overline{)x^4 + 12x - 6} \\
 & \underline{-(x^4 - x^3)} \\
 & \quad x^3 + 12x - 6 \\
 & \quad \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 & \qquad x^2 + 12x - 6
\end{array}$$

Solis 1.2.

$$\int \frac{x^4 + 12x - 6}{x^2(x-1)} dx = \int \left(x + 1 + \frac{x^2 + 12x - 6}{x^2(x-1)} \right) dx$$

Solis 1.3.

$$\int\left(x+1+\frac{x^2+12x-6}{x^2(x-1)}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^2+12x-6}{x^2(x-1)}dx$$

Pēdējā integrāļa funkcija ir īsta racionālā daļa. Izpildīsim **Soli 2.2**.

$$\frac{x^2+12x-6}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$

Izmantosim ievietošanas metodi. Vispirms vienādojam un atmetam saucējus, iegūstam vienādojumu

$$x^2+12x-6=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

Ievietošanai izmantosim saucēja saknes $x=0$ un $x=1$. Papildus izvēlēsimies skaitli $x=-1$.

Ja $x=0$, iegūstam vienādojumu

$$-6=-B;\quad B=6$$

Ja $x=1$, iegūstam vienādojumu

$$1+12-6=C;\quad C=7$$

Ja $x=-1$, iegūstam vienādojumu

$$1-12-6=A(-1)(-2)+B(-2)+C$$

$$A=-6$$

Elementārdaļu skaitītājā ievietojam aprēķinātos koeficientus un integrējam piemēru

$$\frac{x^2+12x-6}{x^2(x-1)}=\frac{-6}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{7}{x-1}$$

$$\int\left(\frac{-6}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{7}{x-1}\right)dx=-6\ln|x|+6\frac{x^{-1}}{-1}+7\ln|x-1|+C$$

Atbilde

$$\int\frac{x^4+12x-6}{x^2(x-1)}dx=\frac{x^2}{2}+x-6\ln|x|-\frac{6}{x}+7\ln|x-1|+C$$

7.3.3.6 Vingrinājumi

Aprēķināt sekojošos nenoteiktos integrāļus no daļveida racionālajām funkcijām

1. $\int\frac{dx}{1+7x}$

2. $\int\frac{2}{(x-1)(x+2)}dx$

3. $\int \frac{x-1}{x(x-2)(x-3)}dx$

4. $\int \frac{x}{4-x^2}dx$

5. $\int \frac{x+6}{x^2-8x}dx$

6. $\int \frac{x+5}{x^2-4x-12}dx$

7. $\int \frac{2x}{x^2-4x+20}dx$

8. $\int \frac{2x+1}{x^2(x+2)}dx$

9. $\int \frac{3}{x(1+x^2)}dx$

10. $\int \frac{3x}{x+1}dx$

11. $\int \frac{x^3}{x(x+3)}dx$

7.3.3.7 Vingrinājumu atrisinājumi

1. $\int \frac{dx}{1+7x}$

Atrisinājums

$$\int \frac{dx}{1+7x} = \frac{1}{7}\int \frac{d(7x)}{1+7x} = \frac{1}{7}\ln|1+7x| + C$$

2. $\int \frac{2}{(x-1)(x+2)}dx$

Atrisinājums

Atrodam elementārdaļas

$$\frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$2 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x = 1; \quad 2 = A \cdot 3; \quad A = \frac{2}{3}$$

$$x = -2;\;\; 2 = B\cdot(-3);\;\; B = \frac{-2}{3}$$

$$\frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+2}$$

Pārveidojam doto integrāli

$$\int \frac{2}{(x-1)(x+2)}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{2}{3}\ln|x+2| + C$$

3. $\int \frac{x-1}{x(x-2)(x-3)}dx$

Atrisinājums

Izveidojam elementārdaļas

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$x - 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$

$$x = 0;\;\; -1 = A(-2)(-3);\;\; A = -\frac{1}{6}$$

$$x = 2;\;\; 1 = B\cdot 2\cdot(-1);\;\; B = -\frac{1}{2}$$

$$x = 3;\;\; 2 = C\cdot 3;\;\; C = \frac{2}{3}$$

Aprēķinām Integrāli

$$\int \frac{x-1}{x(x-2)(x-3)}dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-3} =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x-3| + C$$

4. $\int \frac{x}{4-x^2}dx$

Atrisinājums

Saucēju sadalām reizinātājos

$$\frac{x}{4-x^2}=\frac{x}{(2-x)(2+x)}$$

Atrodam elementārdaļas

$$\frac{x}{(2-x)(2+x)}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{2+x}$$

$$x=A(2+x)+B(2-x)$$

$$x=2;\;\; 2=A\cdot 4;\;\; A=\frac{1}{2}$$

$$x=-2;\;\; -2=B\cdot 4;\;\; B=-\frac{1}{2}$$

Aprēķinam integrāli

$$\int\frac{x}{4-x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2-x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2+x}==$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|2-x|-\frac{1}{2}\ln|2+x|+C$$

Komentārs

$$\int\frac{dx}{2-x}=$$

$$=-\int\frac{dx}{x-2}=-\ln|x-2|+C=$$

$$=-\ln|2-x|+C$$

5. $\int\frac{x+6}{x^2-8x}dx$

Atrisinājums

Saucēju sadalām reizinātājos

$$\frac{x+6}{x^2-8x}=\frac{x+6}{x(x-8)}$$

Doto racionālo daļu izsakām elementārdaļās

$$\frac{x+6}{x(x-8)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-8}$$

$$x + 6 = A(x - 8) + Bx$$

$$x = 0;\;\; 6 = A \cdot (-8);\;\; A = -\frac{3}{4}$$

$$x = 8;\;\; 14 = B \cdot 8;\;\; B = \frac{7}{4}$$

Aprēķinām integrāli

$$\int \frac{x+6}{x^2 - 8x} dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x-8} =$$

$$= -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{7}{4}\ln|x-8| + C$$

6. $\int \frac{x+5}{x^2 - 4x - 12} dx$

Atrisinājums

Saucēju sadala reizinātājos

$$\frac{x+5}{x^2 - 4x - 12} = \frac{x+5}{(x-6)(x+2)}$$

Iegūst elementārdaļas

$$\frac{x+5}{(x-6)(x+2)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+2}$$

$$x + 5 = A(x+2) + B(x-6)$$

$$x = 6;\;\; 11 = A \cdot 8;\;\; A = \frac{11}{8}$$

$$x = -2;\;\; 3 = B \cdot (-8);\;\; B = -\frac{3}{8}$$

Atrisina integrāli

$$\int \frac{x+5}{x^2 - 4x - 12} dx =$$

$$= \frac{11}{8}\int \frac{dx}{x-6} - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{11}{8}\ln|x-6| - \frac{3}{8}\ln|x+2| + C$$

7. $\int \frac{2x}{x^2 - 4x + 20} dx$

Atrisinājums

Piemērā doto saucēju nevar sadalīt reizinātājos, jo kvadrātiskajai formai ir kompleksas saknes. Lietosim citu metodi – substitūciju.

Izveidosim divas racionālās daļas

$$\frac{2x}{x^2 - 4x + 20} = \frac{2x - 4 + 4}{x^2 - 4x + 20} = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 20} + \frac{4}{x^2 - 4x + 20}$$

Tagad var integrēt divas funkcijas

$$\int \frac{2x}{x^2 - 4x + 20} dx = \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 20} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 20} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \text{pirmajā integrālī} & \text{otrajā integrālī} \\ \text{lai} \quad u = x^2 - 4x + 20; & \text{lai } u = x - 2; \;\; x^2 - 4x + 4 + 16 = u^2 + 16 \\ \text{tad } \; du = (2x - 4)dx; & \text{tad } \; du = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u} + 4 \int \frac{du}{u^2 + 16} = \ln|u| + 4 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{u}{4} + C =$$

$$= \ln|x^2 - 4x + 20| + \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{4} + C$$

8. $\int \frac{2x + 1}{x^2(x + 2)} dx$

Atrisinājums

Atrodam atbilstošās zemintegrāļa funkcijas elementārdaļas

$$\frac{2x + 1}{x^2(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 2}$$

$$2x + 1 = Ax(x + 2) + B(x + 2) + Cx^2$$

$$x = 0; \quad 1 = 2B; \quad B = 0.5$$

$$x = -2; \quad -4 + 1 = 4C; \quad C = -0.75$$

$$x = -1; \quad -2 + 1 = -A + B + C;$$

$$-1 = -A - 0.25; \quad A = 0.75$$

Doto integrāli sadalām vairākos saskaitāmajos

$$\int \frac{2x + 1}{x^2(x + 2)} dx =$$

$$= 0.75\int\frac{dx}{x} + 0.5\int\frac{dx}{x^2} - 0.75\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= 0.75\ln|x| - 0.5\frac{1}{x} - 0.75\ln|x+2| + C$$

9. $\int\frac{3}{x(1+x^2)}dx$

Atrisinājums

Atrodam elementārdaļas un lietojam kombinēto metodi

$$\frac{3}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$3 = A(1+x^2) + Bx^2 + Cx$$

$$x = 0;\;\; 3 = A$$

Citu koeficientu aprēķināšanai izveidojam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \end{cases};\;\; B = -3$$

Integrējam

$$\int\frac{3}{x(1+x^2)}dx =$$

$$= 3\int\frac{dx}{x} - 3\int\frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= 3\ln|x| - 1.5\int\frac{2xdx}{1+x^2} =$$

$$= 3\ln|x| - 1.5\ln(1+x^2) + C$$

10. $\int\frac{3x}{x+1}dx$

Atrisinājums

Zemintegrāļa funkcija ir neīsta racionālā daļa. Pārveidosim to sekojošā veidā

$$\frac{3x}{x+1} = 3\frac{x+1-1}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$$

Integrējam

$$\int\frac{3x}{x+1}dx =$$

$$= 3\int dx - 3\int\frac{dx}{x+1} =$$

$$= 3x - 3\ln|x+1| + C$$

11. $\int \frac{x^3}{x(x+3)}dx$

Atrisinājums

Vienkāršosim izteiksmi un veiksim polinomu dalīšanu

$$\frac{x^3}{x(x+3)} = \frac{x^2}{x+3}$$

$$\begin{array}{r}
x-3 \\
x+3\overline{)x^2} \\
\underline{-(x^2+3x)} \\
-3x \\
\underline{-(-3x-9)} \\
9
\end{array}$$

$$\frac{x^2}{x+3} = x-3+\frac{9}{x+3}$$

Integrēsim

$$\int \frac{x^3}{x(x+3)}dx =$$

$$= \int \frac{x^2}{x+3}dx =$$

$$= \int xdx - 3\int dx + 9\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 9\ln|x+3| + C$$

7.3.4 Integrēšanas Tehnika: Trigonometrisko Funkciju Integrēšana

DETALIZĒTS APRAKSTS:

Ar trigonometrisko funkciju palīdzību var aprakstīt dažādus svārstību procesus. Šo procesu izpētē var izmantot integrāļus no saliktām trigonometriskām funkcijām. Trigonometrijas identitātes tiek lietotas, lai pārveidotu šādus integrāļus un vienkāršotu aprēķinus. Šajā nodaļā tiks aplūkotas trigonometrijas formulas plašāk izmantojamiem integrāļiem, kā arī piemēroti substitūciju veidi. Papildus tiks aplūkota arī trigonometriskā substitūcija.

MĒRĶIS: Mācīties pielietot trigonometrijas identitātes un substitūciju trigonometrisko integrāļu aprēķināšanā.

Mācību rezultāts:

1. Studenti māk integrēt integrāļus no trigonometriskām funkcijām, pielietojot trigonometriskās identitātes.
2. Studenti prot pielietot trigonometrisko substitūciju.

Priekšzināšanas: integrēšanas un atvasināšanas pamatformulas, substitūciju metode, algebras un trigonometrijas formulas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: trigonometriskas funkcijas tiek lietotas, lai aprakstītu sinusoidālus procesus. Trigonometrisko funkciju integrāļi palīdz atrisināt dažādas problēmas, piemēram, lai izstrādātu efektīvu propelleru spārnu formu; lai ar kuģa vadības iekārtām aprēķinātu viļņu pretestību, tā novērtējot kuģa gaitas stabilitāti.

Saturs

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Trigonometrisko Funkciju Integrēšana

7.3.4.1 Saliktas trigonometriskas funkcijas, kuru arguments ir lineārs

Vienkāršākie saliktu trigonometrisko funkciju integrāļi ir sekojošie

$$\int \sin ax\,dx\,; \quad \int \cos ax\,dx\,; \quad \int \mathrm{tg} ax\,dx$$

Te var lietot vienkāršu substitūciju, piemēram, kā tas parādīts piemērā 1.1:

Piemērs 1.1 Aprēķināt integrāli

$$\int \sin ax\,dx$$

Atrisinājums

$$\int \sin ax\,dx = \begin{vmatrix} \text{lai} \quad u = ax \\ \text{tad } du = a dx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \sin u\,du = -\frac{1}{a}\cos u + C =$$

$$= -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

Nedaudz sarežģītāk ir integrēt tangensa funkciju

Piemērs 1.2 Aprēķināt integrāli

$$\int \mathrm{tg} ax dx$$

Atrisinājums

$$\int \mathrm{tg} ax\,dx = \int \frac{\sin ax}{\cos ax} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{lai} \quad u = \cos ax \\ \text{tad } du = -a\sin ax\,dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{a}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{a}\ln|u| + C =$$

$$= -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$$

Pie integrāļu pamatformulu saraksta varam pievienot speciālgadījumus:

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$$

$$\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$$

7.3.4.2 Sinusa un kosinusa funkciju reizinājums

Aplūkosim tādu trigonometrisko funkciju reizinājumu, kurām ir dažādi argumenti, piemēram,

$$\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$$

Lai vienkāršotu šāda veida integrālus, pielietosim argumentu saskaitīšanas formulas

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(ax+bx) + \sin(ax-bx))$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(ax+bx) + \cos(ax-bx))$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(ax-bx) - \cos(ax+bx))$$

Pēc zemintegrāļa funkcijas sadalīšanas divos saskaitāmajos, var lietot paragrāfā 1 minēto apzīmēšanu.

Piemērs 2.1 Aprēķināt integrāli

$$\int \sin 5x \cdot \sin 2x\, dx$$

Atrisinājums

$$\int \sin 5x \cdot \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 3x - \cos 7x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 3x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x\, dx =$$

$$= \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C$$

7.3.4.3 Trigonometrisko funkciju pakāpes

Šajā paragrāfā apskatīsim integrāļus, kuri satur sinusa vai kosinusa funkcijas veselā pakāpē. Vispārīgā veidā to var pierakstīt

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$$

Ja kaut viens no kāpinātājiem ir nepāra pakāpē, var lietot substitūciju, līdzīgi, kā parādīts piemērā 3.1.

Piemērs 3.1 Aprēķināt integrāli

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^3 x \, dx$$

Ievērosim, ka abām funkcijām ir nepāra kāpinātāji, bet kosinusa funkcijai ir lielāks kāpinātājs nekā sinusa funkcijai. Tāpēc mēs apzīmēsim kosinusa funkciju ar u. Bet vispirms sadalīsim sinusa funkcijas pakāpi reizinātajos un lietosim trigonometrijas pamatidentitāti (jeb tā saukto Pitagora teorēmu trigonometriskā formā)

$$\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Atrisinājums

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^3 x \, dx = \int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x \, dx =$$

$$= \int \cos^5 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{lai } u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int u^5 (1 - u^2) du =$$

$$= -\int u^5 du + \int u^7 du =$$

$$= -\frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{8} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + C$$

Piemērs 3.2 Aprēķināt integrāli

$$\int \frac{\mathrm{ctg} x}{\sin^3 x} dx$$

Atrisinājums

$$\int \frac{\mathrm{ctg} x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin^3 x} dx =$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u^4} = \int u^{-4} du = \frac{u^{-3}}{-3} + C =$$

$$= \frac{\sin^{-3} x}{-3} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

7.3.4.4 Dubultleņķa formulas

Iepriekšējā paragrāfā aplūkojām gadījumus, kad vismaz vienas no zemintegrāļa funkcijām – sinusa vai kosinusa – kāpinātājs ir nepāra skaitlis. Ja abi kāpinātāji ir pāra skaitļi, tad, lai samazinātu trigonometrisko funkciju pakāpi, lietosim kosinusa dubultleņķa formulas

$$\mathbf{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$\mathbf{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

Piemērs 4.1 Aprēķināt integrāli

$$\int \cos^2 x \, dx$$

Atrisinājums

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

Piemērs 4.2 Aprēķināt integrāli

$$\int \sin^4 x \, dx$$

Atrisinājums

$$\int \sin^4 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{4}\int \cos 2x\,d2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 4x\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

Atzīmēsim, ka piemēra 4.2 risinājumā dubultleņķa formulas tika lietotas atkārtoti.

7.3.4.5 Trigonometriskā substitūcija

Te aplūkosim nedaudz sarežģītākus integrāļus, kuri satur kvadrātsakni no kvadrātiskas izteiksmes, piemēram,

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx;\quad \int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3}dx$$

Trigonometrisku substitūciju var lietot, lai vienkāršotu zemintegrāļa izteiksmi. Substitūcija pamatojas uz trigonometrisko pamatidentitāti

$$\boldsymbol{\sin^2 x+\cos^2 x=1}$$

Dalot abas vienādības puses ar $\cos^2 x$, iegūstam speciālgadījumu

$$\boldsymbol{\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}}$$

Šīs identitātes var lietot sekojošajos gadījumos:

Gadījums 1. Zem kvadrātsaknes $\sqrt{a^2-x^2}$ apzīmējam $x=a\sin u$ vai $x=a\cos u$

Gadījums 2. Zem kvadrātsaknes $\sqrt{a^2+x^2}$ apzīmējam $x=a\,\mathrm{tg}u$

Gadījums 3. Zem kvadrātsaknes $\sqrt{x^2-a^2}$ apzīmējam $x=\dfrac{a}{\cos u}$

Piemērs 5.1 Aprēķināt integrāli

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx$$

Atrisinājums

Lai atrisinātu integrāli, lietosim trigonometrisko substitūciju un pēc zemintegrāļa izteiksmes vienkāršošanas, izveidosim funkcijas diferenciāli, lai var integrēt pakāpes funkciju.

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} \text{lai } x = 2\sin u, \text{ tad } dx = 2\cos u\, du \\ 4-x^2 = 4-4\sin^2 u = 4\cos^2 u \end{array} \right| =$$

$$= \int 2\sin u\sqrt{4\cos^2 u}\, 2\cos u\; du =$$

$$= 8\int \cos^2 u\; \sin u\, du =$$

$$= -8\int \cos^2 u\, d(\cos u) = -8\frac{\cos^3 u}{3} + C$$

Atgriezīsimies pie funkcijas, kuras arguments ir x

$$\cos^3 u = \cos^2 u \cdot \cos u = (1-\sin^2 u)\sqrt{1-\sin^2 u} =$$

$$= \left| \text{ja } x = 2\sin u, \quad \text{seko } 1-\sin^2 u = 1-\frac{x^2}{4} \right| =$$

$$= \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

Integrāļa atrisinājums ir

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx = -8\frac{\cos^3 u}{3} + C =$$

$$= -\frac{8}{3}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^3 + C =$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}{3} + C$$

Piemērs 5.2 Aprēķināt integrāli

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3}dx$$

Atrisinājums

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3}dx = \left| \begin{array}{c} \text{lai } x = \dfrac{5}{\cos u}, \text{ tad } dx = \dfrac{2\sin u}{\cos^2 u}du \\ 25-x^2 = 25\mathrm{tg}^2 u \end{array} \right| =$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$= \int \frac{\sqrt{25\mathrm{tg}^2 u} \cdot \cos^3 u}{125} \frac{2\sin u}{\cos^2 u} du \;=$$

$$= \frac{2}{25} \int \mathrm{tg} u \cdot \cos u \cdot \sin u \, du =$$

$$= \frac{2}{25} \int \sin^2 u \, du = \frac{1}{25} \int (1 - \cos 2u) du =$$

$$= \frac{1}{25}\left(u - \frac{1}{2}\sin 2u\right) + C =$$

$$= \left| \text{ja } \cos u = \frac{5}{x}, \text{tad } \sin 2u = 2 \cdot \frac{5}{x}\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}} = \frac{10}{x^2}\sqrt{x^2 - 25} \right| =$$

$$= \frac{1}{25}\left(\arccos\frac{5}{x} - \frac{5}{x^2}\sqrt{x^2 - 25}\right) + C$$

Lai atgrieztos pie argumenta x, funkcijas $\sin 2u$ pārveidošanai lietojām formulu

$$\mathbf{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$$

7.3.4.6 Vingrinājumi

Aprēķināt integrāļus

1. $\int \sin 12x \, dx$

2. $\int \mathrm{ctg}\frac{3x}{4} dx$

3. $\int \sin 5x \cdot \cos 4.5x \, dx$

4. $\int \sin^{11} x \cdot \cos x \, dx$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$

6. $\int 8(1 - \cos^2 x) dx$

7. Lietot trigonometrisko substitūciju

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.3.4.7 Atrisinājumi

1. $\int \sin 12x \, dx$

Atrisinājums

$$\int \sin 12x \, dx = \frac{1}{12}\int \sin 12x \, d12x =$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 12x + C$$

2. $\int \operatorname{ctg}\frac{3x}{4} dx$

Atrisinājums

$$\int \operatorname{ctg}\frac{3x}{4} dx = \int \frac{\cos\frac{3x}{4}}{\sin\frac{3x}{4}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \sin\frac{3x}{4} \\ du = \frac{3}{4}\cos\frac{3x}{4} dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{4}{3}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sin\frac{3x}{4}\right| + C$$

3. $\int \sin 5x \cdot \cos 4.5x \, dx$

Atrisinājums

$$\int \sin 5x \cdot \cos 4.5x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 9.5x + \sin 0.5x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{19}\int \sin 9.5x \, d9.5x + \frac{1}{2}\cdot 2\int \sin 0.5x \, d0.5x =$$

$$= -\frac{1}{19}\cos 9.5x - \cos 0.5x + C$$

4. $\int \sin^{11}x \cdot \cos x \, dx$

Atrisinājums

$$\int \sin^{11}x \cdot \cos x \, dx = \begin{vmatrix} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int u^{11} du = \frac{u^{12}}{12} + C =$$

$$= \frac{\sin^{12}x}{12} + C$$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$

Atrisinājums

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^5 x} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{vmatrix} = \int \frac{1-u^2}{u^5} du =$$

$$= \int u^{-5} \, du - \int u^{-3} \, du =$$

$$= \frac{u^{-4}}{-4} - \frac{u^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

6. $\int 8(1-\cos^2 x)dx$

Atrisinājums

$$\int 8(1-\cos^2 x)dx = 8\int \sin^2 x \;\, dx =$$

$$= 4\int (1-\cos 2x) \, dx =$$

$$= 4\int dx - 2\int \cos 2x \, d2x =$$

$$= 4x - 2\sin 2x + C$$

7. Lietot trigonometrisko substitūciju

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Atrisinājums

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} \text{ja } \ x = \sin u \\ dx = \cos u\, du \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\, du =$$

$$= \int \cos u \cdot \cos u\, du = \int \frac{1+\cos 2u}{2}\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{4}\int \cos 2u\, d2u =$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \arcsin x \\ \sin 2u = 2\sin u \cos u = 2x\sqrt{1-x^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

7.4 Noteiktais Integrālis

DETAILIZĒTS APRAKSTS:

Nodaļa lasītāju iepazīstina ar noteiktā integrāļa jēdzienu. Apraksts sākas ar sekojošu jautājumu: kā aprēķināt figūras laukumu, ja tā ierobežota ar liektu līniju un taisnēm? Atbilde uz jautājumu tiek meklēta ar aptuveno aprēķinu palīdzību. Metode tiek vispārināta , iegūstot precīzu minētās figūras laukuma aprēķināšanas paņēmienu un tiek definēts noteiktais integrālis. Nodaļa aplūko arī noteiktā integrāļa īpašības, kā arī Ņūtona – Leibnica formulu. Studentiem var ieteikt internetā pieejamo kalkulatoru "Integral Calculator" https://www.integral-calculator.com/. Šajā programmā integrāļi tiek risināti soli pa solim, tiek doti gan zemintegrāļa funkcijas, gan primitīvās funkcijas grafiki. Programma dod iespēju pārbaudīt studenta patstāvīgi veiktu aprēķinu. Uzdevumu risinājumā nepieciešamos grafikus var konstruēt ar brīvpieejas programmām GeoGebra Classic; DESMOS Graphing Calculator kā arī ar Microsoft Excel.

Ieteicamā mācību literatūra:

5. K.Šteiners, B.Siliņa. Augstākā matemātika. III, IV daļa. Rīga, Zvaigzne ABC, 1998
6. B.Siliņa, K.Šteiners. Rokasgrāmata augstākajā matemātikā. Rīga, Zvaigzne ABC, 2006
7. E.Kronbergs, P.Rivža, Dz.Bože. Augstākā matemātika. I, II daļa, Rīga, Zvaigzne, 1988
8. V.Liepiņa. Matemātika. Integrālrēķini un diferenciālvienādojumi. Metodiskais līdzeklis un individuālie aprēķinu darbi, II daļa, Rīga, LJA, 2010

MĒRĶIS: Iepazīt noteikto integrāli, izprast tā būtību kā summas robežu.

Mācību rezultāts:

1. Saprast noteiktā integrāļa definīciju
2. Saprast un lietot noteiktā integrāļa aprēķināšanas likumus

Priekšzināšanas: Integrēšanas un atvasināšanas pamatformulas; elementāro funkciju īpašības un grafiki; algebras un trigonometrijas formulas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Noteiktie integrāļi tiek plaši pielietoti inženier-tehniskajās zinātnēs. Ar noteikto integrāļu palīdzību var aprēķinat dažādu formu figūru laukumu, kā arī risināt daudzveidīgus ģeometrijas uzdevumus. Noteiktos integrāļus lieto kuģu būvē dažādu konstrukciju aprēķinos. Integrāļi nepieciešami arī stabilitātes teorijā, elektrotehnikā, kravas transporta teorijā, ekonomikā, klasiskajā signālu teorijā un citās specialitātēs.

Saturs

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Noteiktais Integrālis

7.4.1 Figūras laukuma problēma

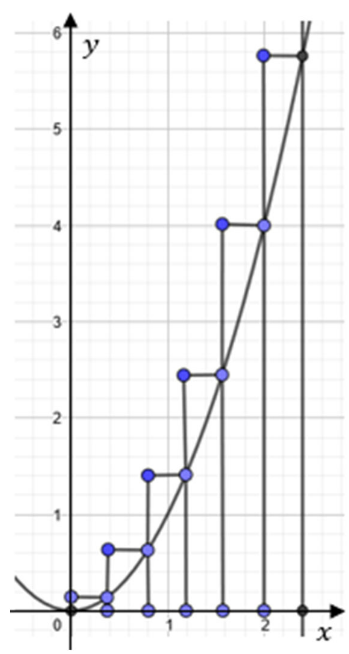
Zinot Eiklīda ģeometrijas pamatus, mēs zinām kā aprēķināt dažādu figūru laukumu – taisnstūrim, trijstūrim, riņķim un citām vienkāršām plaknes figūrām. Ja ir dots poligons, tad to var pilnībā sadalīt trijstūros, lai aprēķināti tā laukumu. Daudz sarežģītāks ir gadījums, ja jāaprēķina figūras laukums, kura ierobežota ar līknēm.

Piemērā aplūkosim, kā aprēķināt Dekarta koordinātu sistēmā dota ierobežota plaknes apgabala laukumu.

Piemērs 1.1. Aprēķināt figūras laukumu, ko ierobežo parabola $y = x^2$, divas vertikālas taisnes $x = 0$ un $x = 2.4$ un x-ass $y = 0$.

Atrisinājums

Laukumu aprēķināsim aptuveni. Intervālu $[0, 2.4]$ sadalīsim vienādās daļās. Katrā apakšintervālā konstruēsim taisnstūri, kuru augstums sakrīt ar funkcijas vērtību šī apakšintervāla galapunktā:



Zīmējums 1.1

Intervāla $[0; 2.4]$ garums ir 2.4 vienības (skat.zīm. 1.1). Katrs apakšintervāls ir 0.4 vienības garš. Aprēķināsim visu taisnstūru laukumu

$$0.4 \cdot 0.4^2 + 0.4 \cdot 0.8^2 + 0.4 \cdot 1.2^2 + 0.4 \cdot 1.6^2 + 0.4 \cdot 2^2 + 0.4 \cdot 2.4^2 = 5.824 \text{ lauk. vien.}$$

Zīmējumā 1.1 ir redzams, ka visu aprēķināto laukumu summa ir lielāka nekā dotās figūras laukums. Sadalot intervālu $[0, 2.4]$ mazākos apakšintervālos, aprēķina kļūda kļūst mazāka. Ja katra apakšintervāla garums ir 0.01, iegūstam

$$0.01(0.01^2 + 0.02^2 + 0.03^2 + \cdots + 2.4^2) \approx 4.63684 \quad \text{laukuma vienības}$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Ieteicams izmantot kādu datorprogrammu, piemēram, Microsoft Excel, lai saskaitītu šo 261 skaitli. Tā, dalot intervālu $[0, 2.4]$ arvien sīkākās un sīkākās daļās, var samazināt aprēķina kļūdu. Tomēr joprojām ir jautājums – kā precīzi aprēķināt laukumu?

7.4.2 Noteiktā integrāļa definīcija

Slēgtā intervālā $[a, b]$ dota patvaļīga, nepārtraukta funkcija $y = f(x)$. Uzdevums ir aprēķināt tādas figūras laukumu S, ko ierobežo dotās funkcijas veidotā līkne, x-ass un divas vertikālas taisnes $x = a$ un $x = b$ (skat.zīm. 2.1).

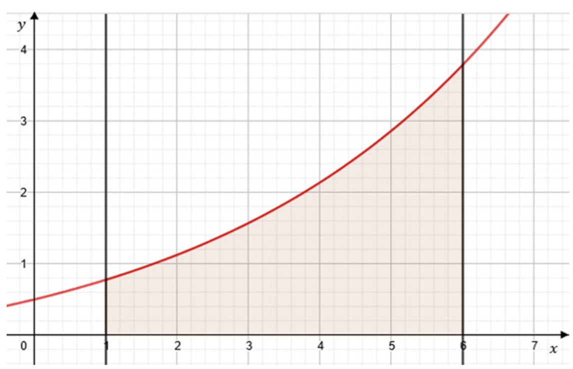
Intervālā $[a, b]$ izvēlēsimies sekojošo punktu kopu

$$\{x_1 = a, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}, \text{ kur}$$

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$$

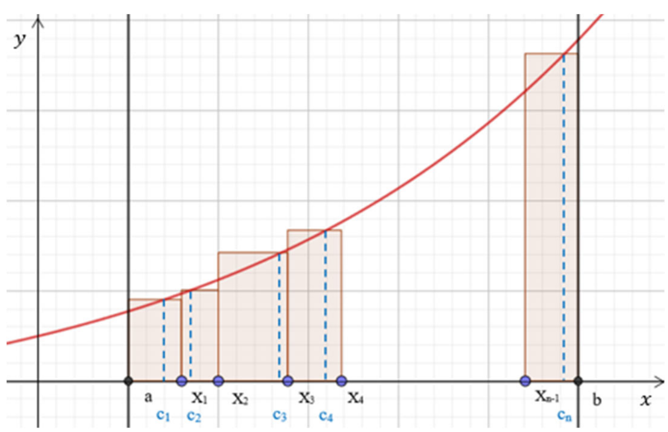
Intervāla $[a, b]$ sadalījuma punkti nosaka ***intervāla sadalījumu apakšintervālos*** $[x_{i-1}, x_i]$, kur $i = 1,2,3, \dots, n$. Katra apakšintervāla garums ir

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



Zīmējums 2.1

Katrā intervālā izvēlēsimies iekšēju punktu c_i, tas ir, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, kur $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Konstruēsim taisnstūri ar apakšējās malas garumu Δx_i un sānu malas garumu $f(c_i)$ (skat.zīm. 2.2).



Zīmējums 2.2

Aprēķināsim katra taisnstūra laukumu un aprēķināsim visu laukumu summu. Summas aprēķināšanas formulu īsāk var pierakstīt, izmantojot simbolu ***sigma***

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Šī summa ir aptuvens figūras S laukuma lieluma aprēķins. Sadalot intervālu $[a, b]$ arvien sīkākās un sīkākās daļās tā, ka lielākā apakšintervāla garums tiecas uz nulli

$$\max\Delta x_i \to 0,$$

atšķirība starp summas vērtību un figūras S laukuma lielumu samazinās. Aprēķinot robežvērtību, figūras S laukumu var aprēķināt precīzi

$$S = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Definīcija. Ja robeža S eksistē pie jebkura intervāla $[a, b]$ sadalījuma un pie jebkuru iekšējo punktu c_i izvēles, un ir viena un tā pati, tad šo robežu sauc par funkcijas $f(x)$ noteikto integrāli intervālā $[a, b]$. Noteikto integrāli apzīmē ar simbolu

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Ja robeža eksistē, sakām, ka funkcija $f(x)$ ir ***integrējama*** intervālā $[a, b]$.

Simbolu ∫ sauc par integrāļa zīmi (tā atgādina izstieptu burtu S, kas reprezentē summas robežu).

Skaitļus a un b sauc par ***integrēšanas robežām***, a ir *apakšējā robeža* un b ir a***ugšējā robeža***.

Funkcija $f(x)$ ir ***zemintegrāļa funkcija***, x ir integrāļa arguments.

dx ir argumenta x ***diferenciālis***.

Funkciju un diferenciāli $f(x)\,dx$ sauc par ***zemintegrāļa izteiksmi***.

Integrāļa vērtība ir viena un tā pati, neatkarīgi no tā, kā apzīmē mainīgo. Tas ir, argumentu x var aizvietot ar jebkādu citu argumentu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

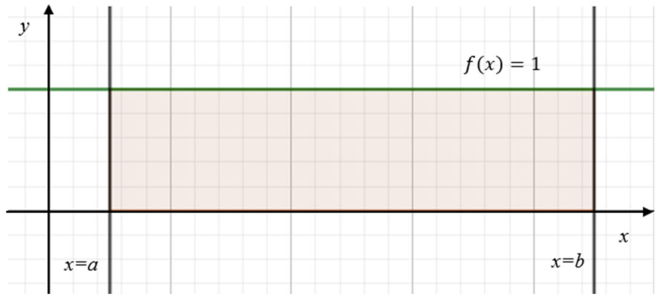
Piemērs 2.1 Aprēķināt tādas figūras laukumu, ko ierobežo taisnes $f(x) = 1, x = a, x = b, y = 0$.

Atrisinājums

Figūras laukumu var aprēķināt ar integrāli

$$\int_a^b 1 \cdot dx$$

Dotais apgabals ir taisnstūris (skat.zīm. 2.3).



Zīmējums 2.3

Tāpēc integrāļa vērtība sakrīt ar taisnstūra laukumu

$$\int_a^b dx = (b-a)\cdot 1 = b-a \quad \text{kvadrātvienības}$$

7.4.3 Noteiktā integrāļa īpašības

Zemāk dotajā sarakstā iekļautas svarīgākās noteiktā integrāļa īpašības. Lielāko daļu no tām var pierādīt, pamatojoties uz noteiktā integrāļa definīciju.

Ja funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ ir nepārtrauktas un diferencējamas intervālā $[a,b]$, tad

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, kur c ir patvaļīga konstante.

4. $\int_a^b (cf(x) + kg(x))\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx$, kur c un k ir patvaļīgas konstantes.

5. Ja $f(x) \le g(x)$ pie visiem argumentiem $x \in [a,b]$, tad $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

6. Visiem argumentiem $x \in [a,b]$ ir spēkā $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$

7. Ja dots integrālis ar simetriskām robežām un funkcija $f(x)$ ir nepāra funkcija $(f(-x) = -f(x))$, tad $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

8. Ja dots integrālis ar simetriskām robežām un funkcija $f(x)$ ir pāra funkcija $(f(-x) = f(x))$, tad $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Nākamās ir integrāļu novērtēšanas īpašības.

9. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, kur m ir funkcijas $f(x)$ mazākā vērtība intervālā $[a,b]$, M ir lielākā vērtība intervālā $[a,b]$.

Desmito īpašību sauc par ***Vidējās vērtības teorēmu***.

10. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, kur $c \in [a,b]$.

Ar vidējās vērtības teorēmas palīdzību var aprēķināt integrējamas funkcijas $f(x)$ ***vidējo vērtību*** intervālā $[a,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

7.4.4 Noteiktā integrāļa aprēķināšana

Ņūtona – Leibnica formula. Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a,b]$ un funkcija $F(x)$ ir funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija, tad

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Kā lietot šo formulu? Vispirms aprēķinām atbilstošo nenoteikto integrāli

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

Pēc tam aprēķinām iznākuma vērtību pie augšējās integrēšanas robežas un atņemam iznākuma vērtību pie apakšējās integrēšanas robežas

$$F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

Aprēķins parāda, ka integrēšanas konstante *C* saīsinās. Tāpēc Ņūtona – Leibnica formulu var papildināt ar novērtējuma zīmi – vertikālu nogriezni pie primitīvās funkcijas, norādot integrēšanas robežas

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Tagad precīzi varam aprēķinat piemērā 1.1 dotās figūras laukumu

$$\int_0^{2.4} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{2.4} = \frac{2.4^3}{3} - 0 = 4.608 \quad \text{kv. vien.}$$

Piemērs 4.1

Ņūtona – Leibnica formulas pielietojums

$$\int_1^3 2xdx = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1 = 8$$

Piemērs 4.2 Aprēķināt integrāli

$$\int_1^4 (3+\sqrt{x})\,dx$$

Atrisinājums

Risinājumā lietosim noteikto integrāļu 4. īpašību

$$\int_1^4 (3+\sqrt{x})\,dx = \int_1^4 3\,dx + \int_1^4 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \left(3x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= 3(4-1) + \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - 1\right) =$$

$$= 9 + \frac{2}{3}\cdot 7 = 13\frac{2}{3}$$

Piemērs 4.3 Aprēķināt integrāli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi$$

Atrisinājums

Lai atrisināt šo integrāli, pārveidosim diferenciāli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi\, d(2\varphi) = \frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi - (0 - \sin 0) = \frac{\pi}{4}$$

Piemērs 4.4 Aprēķināt integrāli

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2} \sqrt[3]{x^4}\cdot x^{\frac{2}{3}}\,dx$$

Atrisinājums

Lietosim trešo īpašību, lai vienkāršotu uzdevumu

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2} \sqrt[3]{x^4}\cdot x^{\frac{2}{3}}\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2} x^2\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

Piemērs 4.5

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 2x\,dx = 0,$$

jo ir dots integrālis ar simetriskām robežām no nepāra funkcijas (skat. īpašību 7).

Piemērs 4.6

Aprēķināt funkcijas $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$ vidējo vērtību intervālā $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Atrisinājums

Lietosim vidējās vērtības teorēmu

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Intervāla garums ir

$$b - a = \frac{\pi}{4}$$

Aprēķināsim funkcijas vidējo vērtību

$$\frac{1}{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x\,dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-cos^2x}{\cos^2x}dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2x}dx - \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx = \frac{4}{\pi}(\mathrm{tg}x - x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi} - 1$$

7.4.5 Vingrinājumi

Aprēķināt integrāļus

1. $\int_{0}^{2} (x^4 - x^3)\,dx$

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin x\,dx$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

4. $\int_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{2^{3x}}{7}dx$

5. $\int_{-2}^{7} \frac{2dx}{x+3}$

7.4.6 Atrisinājumi

1. $\int_{0}^{2} (x^4 - x^3)\,dx$

Atrisinājums

$$\int_0^2 (x^4 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{32}{5} - \frac{16}{4} = 2.4$$

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin x \, dx$

Atrisinājums

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin x dx = -\cos x\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} =$$

$$= -\cos 0 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}}$

Atrisinājums

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{2}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Integrāļa vērtību aprēķinājām, ievērojot, ka funkcija $\arcsin x$ ir nepāra funkcija.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

4. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2^{3x}}{7} dx$

Atrisinājums

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2^{3x}}{7} dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{3}} 2^{3x} d(3x) = \frac{1}{27} \cdot \frac{2^{3x}}{\ln 2} \Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{27\ln 2} - \frac{1}{27\ln 2} = \frac{1}{27\ln 2}$$

Piemēru var risināt arī citādi, ievērojot pakāpju un logaritmu īpašības

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2^{3x}}{7} dx = \frac{1}{7} \int_0^{\frac{1}{3}} 8^x dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{8^x}{\ln 8} \Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt[3]{8}}{\ln 8} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\ln 8} =$$

$$= \frac{2}{7 \cdot 3\ln 2} - \frac{1}{7 \cdot 3\ln 2} = \frac{1}{27\ln 2}$$

5. $\int_{-2}^{7} \frac{2dx}{x+3}$

Atrisinājums

$$\int_{-2}^{7} \frac{2dx}{x+3} = 2 \int_{-2}^{7} \frac{d(x+3)}{x+3} = 2\ln|x+3| \Bigg|_{-2}^{7} =$$

$$= 2\ln 10 - 2\ln 1 = 2\ln 10$$

7.5 Dažas Noteikto Integrāļu Risināšanas Metodes

DETALIZĒTS APRAKSTS:

Noteikto integrāļu aprēķināšanas pamatlikumi tika doti iepriekšējā nodaļā. Te tiek aplūkota parciālās integrēšanas metode un substitūciju metode noteiktajam integrālim.

MĒRĶIS: Demonstrēt īpašas noteikto integrāļu aprēķināšanas metodes, ja ir dota netriviāla zemintegrāļa funkcija.

Mācību rezultāts:

Studenti prot risināt noteiktos integrāļus, pielietojot dažādas integrēšanas metodes.

Priekšzināšanas: integrēšanas pamatlikumi; nenoteikto integrāļu risināšanas metodes; Ņūtona – Leibnica formula.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Noteiktie integrāļi tiek plaši pielietoti inženier-tehniskajās zinātnēs. Ar noteikto integrāļu palīdzību var aprēķinat dažādu formu figūru laukumu, kā arī risināt daudzveidīgus ģeometrijas uzdevumus. Noteiktos integrāļus lieto kuģu būvē dažādu konstrukciju aprēķinos. Integrāļi nepieciešami arī stabilitātes teorijā, elektrotehnikā, kravas transporta teorijā, ekonomikā, klasiskajā signālu teorijā un citās specialitātēs.

Saturs

1. Parciālā integrēšana
2. Substitūciju metode noteiktajam integrālim
3. Vingrinājumi
4. Piemēri

Dažas Noteikto Integrāļu Risināšanas Metodes

7.5.1 Parciālā integrēšana

Pieņemsim, ka dots integrālis, ko var integrēt pa daļām. Nenoteiktajam integrālim var lietot parciālās integrēšanas formulu

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Formulu var izmantot arī noteiktajam integrālim, aprēķinus veicot ar Ņūtona – Leibnica formulas palīdzību

$$\int_a^b u dv = \left(uv - \int v du\right)\Bigg|_a^b$$

Iegūst parciālās integrēšanas formulu noteiktajam integrālim

$$\boldsymbol{\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du}$$

Piemērs 1.1 Aprēķināt integrāli

$$\int_0^2 x e^x dx$$

Atrisinājums

$$\int_0^2 x e^x dx = \begin{vmatrix} \text{lai } u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= x e^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx =$$

$$= 2 \cdot e^2 - 0 - e^x\Big|_0^2 =$$

$$= 2e^2 - e^2 + e^0 = e^2 + 1$$

Piemērs 1.2 Aprēķināt integrāli

$$\int_4^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

Atrisinājums

$$\int_4^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = \ln x, & dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \dfrac{1}{x} dx, & v = 2\sqrt{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x \Big|_4^{e^2} - 2\int_4^{e^2} \frac{\sqrt{x}}{x} dx = 2 \cdot 2\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{e^2}\ln(e^2) - 2 \cdot 2\ln 4 \Big|_4^{e^2} - 2 \cdot 2\sqrt{x} \Big|_4^{e^2} =$$

$$= 4e - 4\ln 4 - 4\sqrt{e^2} + 8 = 8 - 4\ln 4$$

7.5.2 Substitūciju metode noteiktajam integrālim

Atcerēsimies substitūciju metodi nenoteiktajam integrālim. Ja zemintegrāļa izteiksme satur saliktas funkcijas reizinājumu ar tās argumenta atvasinājumu, integrāli var integrēt pēc pamatformulām

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Nenoteiktā integrāļa atrisinājums ir visu primitīvo funkciju kopa $F(x) + C$. Noteiktā integrāļa atrisinājums ir skaitlis. Ievērojot, ka noteiktā integrāļa argumenta x vērtības pieder intervālam $[a, b]$, ar substitūcijas palīdzību ieviestais jaunai arguments u pieder atbilstošajam intervālam $[\alpha, \beta]$. Situāciju precīzi apraksta sekojošā teorēma:

Teorēma. Pieņemsim, ka funkcija $g(x)$ ir diferencējama intervālā $[a, b]$ un apmierina nosacījumus $g(a) = \alpha$ un $g(b) = \beta$. Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta funkcijas $g(x)$ maiņas robežās. Tad no apzīmēšanas $u = g(x)$ seko

$$\int_a^b \boldsymbol{f(g(x))g'(x)dx} = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{f(u)du}$$

Piemērs 2.1 Aprēķināt integrāli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, e^{\sin x} \, dx$$

Atrisinājums

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, e^{\sin x} \, dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = \sin x, & du = \cos x \, dx \\ u_1 = \sin 0 = 0, & u_2 = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^1 e^u du = e^u \Big|_0^1 = e - 1$$

Piemērs 2.2 Aprēķināt integrāli

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2 - 8x^5)^2 x^4 dx$$

Atrisinājums

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2 - 8x^5)^2 x^4 dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = 2 - 8x^5, \; du = -40x^4 dx \\ u_1 = 1.75, \; u_2 = -6 \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{40} \int_{1.75}^{-6} u^2 du = \frac{1}{40} \int_{-6}^{1.75} u^2 du =$$

$$= \frac{1}{40} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_{-6}^{1.75} = \frac{1}{120} \left(\frac{343}{64} - \left(\frac{-1}{216} \right) \right) \approx 0.045$$

Risinot integrāli, integrāļa augšējo un apakšējo robežu mainījām vietām.

Piemērs 2.3 Aprēķināt integrāli

$$\int_1^2 \frac{2t^3}{t^2 + 1} dt$$

Atrisinājums

$$\int_1^2 \frac{2t^3}{t^2 + 1} dt = \int_1^2 \frac{2t \cdot t^2}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{lai } u = t^2 + 1, \; du = 2tdt \\ u_1 = 1 + 1 = 2, \; u_2 = 2^2 + 1 = 5 \\ t^2 = u - 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_2^5 \frac{u - 1}{u} du = \int_2^5 du - \int_2^5 \frac{du}{u} = (u - \ln u) \Big|_2^5 =$$

$$= 5 - \ln 5 - 2 + \ln 2 = 3 - \ln 2.5$$

7.5.3 Vingrinājumi

Aprēķināt integrāļus

1. $\int_0^2 (x^2+1)x\,dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}\varphi\,d\varphi$

3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{5^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{0.75+2t^4}dx$

5. $\int_{-1}^{3} \frac{4dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

7.5.4 Atrisinājumi

1. $\int_0^2 (x^2+1)x\,dx$

Atrisinājums

$$\int_0^2 (x^2+1)x\,dx = \left|\begin{matrix}\text{lai } u = x^2+1, \;\; du = 2xdx \\ u_1 = 1, \;\; u_2 = 5\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^5 udu = \frac{u^2}{4}\Bigg|_1^5 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \text{ctg}\varphi \, d\varphi$

Atrisinājums

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \text{ctg}\varphi \, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{lai } u = \sin\varphi, \ \ du = \cos\varphi \, d\varphi \\ u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \ u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.5\ln 1.5$$

3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{5^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Atrisinājums

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{5^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{lai } u = \arcsin x, \ \ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ u_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \ \ u_2 = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} 5^u du = \frac{5^u}{\ln 5}\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0} = \frac{1}{\ln 5} - \frac{5^{-\frac{\pi}{6}}}{\ln 5}$$

4. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{0.75 + 2t^4} dx$

Atrisinājums

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{0.75-16\,t^4}dt = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = 0.75-16t^4, & du = -64t^3dt \\ u_1 = 0.75, & u_2 = -0.25 \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{64}\int_{0.75}^{-0.25} \frac{du}{u} = \frac{1}{64}\int_{-0.25}^{0.75} \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{64}\ln u \Big|_{-0.25}^{0.75} = \frac{1}{64}(\ln 0.75 - \ln|-0.25|) =$$

$$= \frac{1}{64}(\ln 0.75 - \ln 0.25) = \frac{1}{64}\ln\frac{0.75}{0.25} = \frac{\ln 3}{64}$$

5. $\int_{-1}^{3} \frac{4dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

Atrisinājums

$$\int_1^3 \frac{4dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = \sqrt{x}, \quad du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \\ u_1 = 1, \ u_2 = \sqrt{3} \\ x = u^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= 4 \cdot 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = 8\text{arctg}\sqrt{x} \Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 8\left(\text{arctg}\sqrt{3} - \text{arctg}1\right) = 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

7.6 Neīstie Integrāļi

DETAILIZĒTS APRAKSTS:

Šajā nodaļā paplašināsim noteiktā integrāļa jēdzienu. Tiks aplūkoti integrāļi, kuri definēti neierobežotā intervālā. Iepazīsimies ar divu veidu neīstajiem integrāļiem – integrāli ar bezgalīgu integrācijas intervālu un integrāli, kuram dotajā integrēšanas intervālā ir otrā veida pārtraukuma punkts. Integrāļi tiks definēti ar robežu palīdzību. Tiks demonstrēts šādu integrāļu aprēķināšanas veids, doti gan konverģentu, gan diverģentu neīsto integrāļu aprēķināšanas piemēri.

Funkciju grafiku konstruēšanai var ieteikt izmantot brīvpieejas datorprogrammas GeoGebra, DESMOS, vai arī Microsoft Excel. Lai pārbaudītu atrisinājumus un gūtu dziļāku izpratni par integrēšanas metodēm, studenti var lietot programmu *Definite and Improper Integral Calculator* (https://www.emathhelp.net/calculators/calculus-2/definite-integral-calculator/)

MĒRĶIS: apgūt neīsto integrāļu novērtēšanas metodes, izprast konverģences un diverģences jēdzienus.

Mācību rezultāts:

1. Apgūt pirmā veida neīsto integrāļu novērtēšanas metodes.
2. Pazīt otrā veida neīstos integrāļus un apgūt to atrisināšanas metodes.

Priekšzināšanas: Noteiktie integrāļi; robežas; funkcijas definīcijas apgabals; elementārās funkcijas un to grafiki.

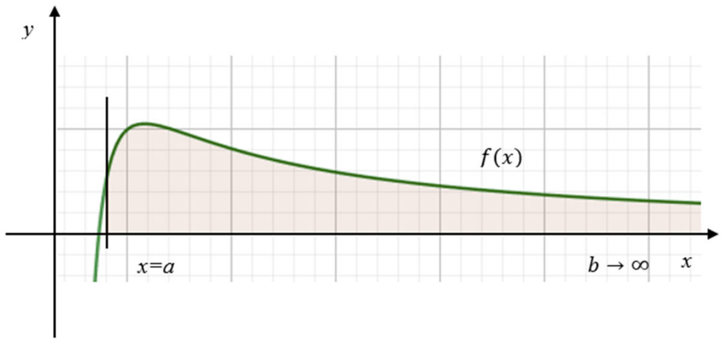
Sakars ar jūrniecības problēmām: Aprakstot kuģa korpusa formu matemātiski, ir iespējams pētīt kuģa korpusa pretestību pret ūdens viļņu iedarbību, ko var izteikt ar neīstā integrāļa palīdzību. Neīstos integrāļus lieto, lai aprakstītu dotā lauka elektrisko potenciālu. Nepārtraukta gadījuma lieluma varbūtību blīvuma funkciju definē ar neīsto integrāli.

Saturs

Neīstie Integrāļi

7.6.1 Neīstais integrālis ar bezgalīgu augšējo robežu

Iepriekšējās nodaļās aplūkojām noteiktos integrāļus, kas definēti slēgtā intervālā. Te aplūkosim nepārtrauktu funkciju $f(x)$, kas definēta no kreisās puses ierobežotā intervālā $[a, \infty)$ (skat.zīm. 1.1).



Zīmējums 1.1

Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir integrējama visā intervālā, tāpēc varam integrēt funkciju kādā apakšintervālā ar augšējo robežu B, $B \in [a, \infty)$

$$\int_a^B f(x)dx$$

Izvēloties dažādas skaitļa B vērtības

$$a \leq B_1 < B_2 < B_3 < \cdots,$$

var iegūt skaitļu virkni

$$\int_a^{B_1} f(x)dx\,; \int_a^{B_2} f(x)dx\,; \int_a^{B_3} f(x)dx; \ \ldots$$

Šī virkne var konverģēt vai diverģēt.

Definīcija. Par *pirmā veida neīsto integrāli* sauc robežu

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Ja robežas vērtība ir galīgs skaitlis, sakām, ka neīstais integrālis ***konverģē***. Ja robežvērtība ir bezgalība vai arī robeža nav definēta, sakām, ka integrālis ***diverģē***.

Neīstā integrāļa aprēķināšana notiek līdzīgi kā zināmā noteiktā integrāļa aprēķināšana. Atrodam atbilstošo primitīvo funkciju, lietojam Ņūtona – Leibnica formulu un aprēķinām robežu, kad skaitlis b tiecas uz bezgalību

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

Simboliski to var pierakstīt

$$\boldsymbol{\int_a^\infty f(x)dx = F(\infty) - F(a),}$$

Atcerēsimies, ka simbols $F(\infty)$ nozīmē atbilstošas robežas aprēķināšanu.

Līdzīgi rīkojas, ja dots integrālis ar bezgalīgu apakšējo robežu vai arī tā abas integrēšanas robežas ir bezgalīgas

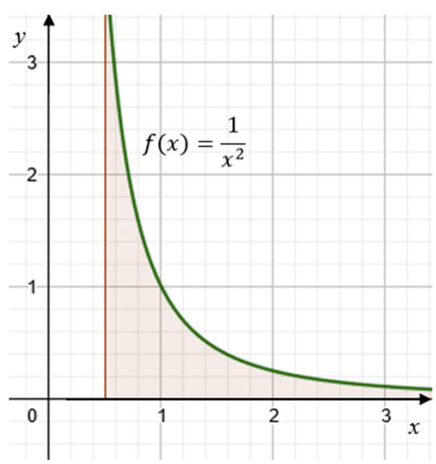
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx\,; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Piemērs 1.1 Novērtēt integrāli

$$\int_{0.5}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$$

Atrisinājums

Konstruēsim grafiku



Zīmējums 1.2

Zīmējumā 1.2 ir attēlots tādas funkcijas grafiks, kura asimptotiski tuvojas x-asij, kad mainīgais x tiecas uz bezgalību. Novērtēsim integrāli

$$\int_{0.5}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_{0.5}^{b}x^{-2}\,dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_{0.5}^{b}=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\bigg|_{0.5}^{b}=$$

$$=-\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}-2\right)=2$$

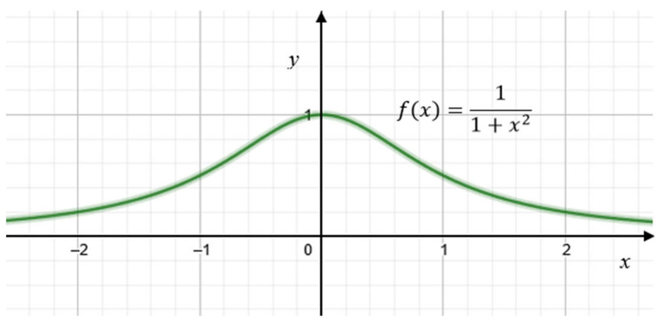
Atbilde Dotais integrālis konverģē, tā robežvērtība ir 2.

Piemērs 1.2 Novērtēt integrāli

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

Atrisinājums

Zemintegrāļa funkcijas grafiks ir sekojošais



Zīmējums 1.3

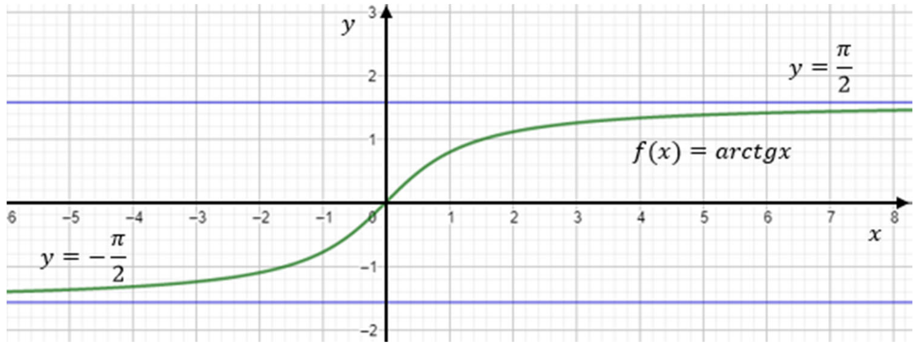
Zīmējumā 1.3 dots pāra funkcijas grafiks, tas ir simetrisks attiecībā pret y-asi. Lai novērtētu šo integrāli, sadalīsim to divās daļās punktā $x=0$, tā iegūstot divus integrāļus, kuru intervāli ir ierobežoti no vienas puses. Tāpat izmantosim simetrijas principu.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=2\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\bigg|_{0}^{b}=$$

$$=2\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0=2\frac{\pi}{2}=\pi$$

Funkcijas $f(x)=\operatorname{arctg}x$ grafikam ir divas horizontālas asimptotas $y=-\frac{\pi}{2}$ un $y=\frac{\pi}{2}$ (skat.zīm. 1.4)



Zīmējums 1.4

Atbilde Dotā integrāļa robežvērtība ir skaitlis π, integrālis konverģē.

Piemērs 1.3 Novērtēt integrāli

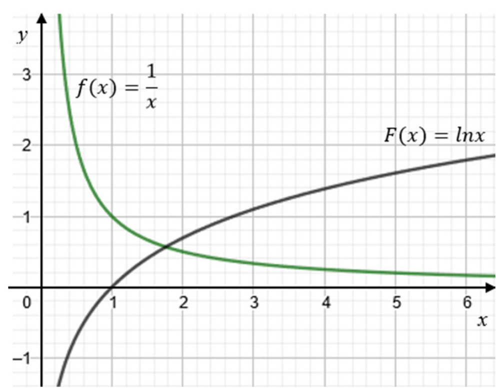
$$\int_{0.2}^{\infty} \frac{dx}{x}$$

Atrisinājums

$$\int_{0.2}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_{0.2}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln b - \ln 0.2 = \infty$$

Zemintegrāļa funkcijas $f(x)$ un tās primitīvās funkcijas $F(x)$ grafiki ir konstruēti zīmējumā 1.5. Funkcija $F(x) = \ln x$ neierobežoti pieaug.



Zīmējums 1.5

Atbilde Dotais neīstais integrālis diverģē.

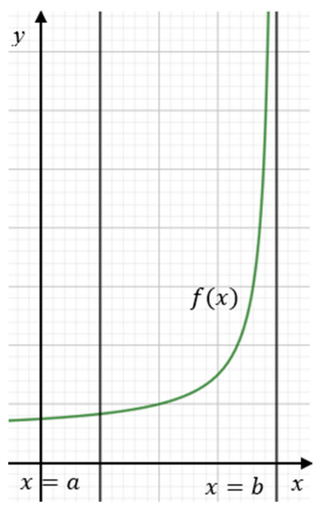
7.6.2 Neīstais integrālis ar otrā veidā pārtraukuma punktu integrēšanas intervālā

Izpētīsim tādas funkcijas $f(x)$ gadījumu, kad, argumentam x tuvojoties vienam no intervāla $[a, b]$ galapunktiem, funkcijas vērtības neierobežoti pieaug. Zīmējumā 2.1 dota funkcija, kurai punktā b ir otrā veida partraukuma punkts. Funkcijas vērtības tiecas uz bezgalību, kad arguments x tuvojas intervāla robežai b. Lai integrētu šādu funkciju, ir jāaprēķinā vienpusējā robeža.

Definīcija. Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a, b)$ un tās pārtraukuma punkts ir intervāla galapunktā b, tad ***otrā veida neīstais integrālis*** ir robeža

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Ja robeža eksistē, tad sakām, ka integrālis ***konverģē***. Ja robeža ir bezgalība vai arī nav definēta, sakām, ka integrālis ***diverģē.***



Zīmējums 2.1

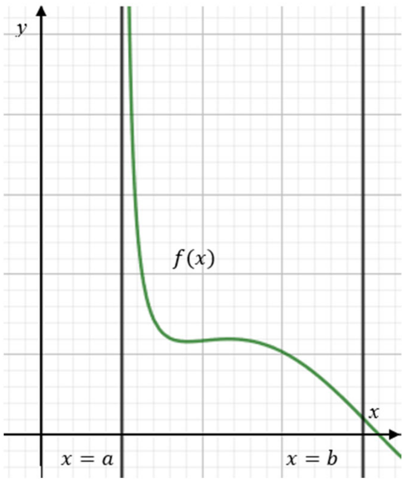
Līdzīgi, ja funkcijai ir pārtraukuma punkts intervāla kreisajā galapunktā (skat.zīm. 2.2), integrāļa robeža ir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

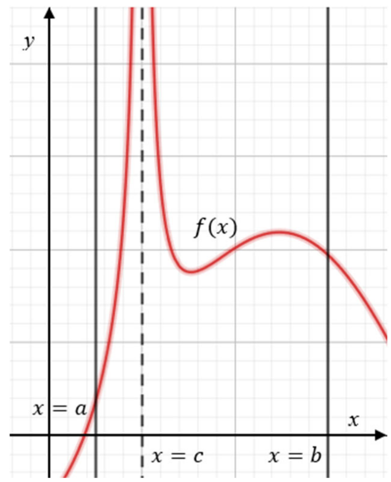
Ja funkcijai pārtraukuma punkts ir integrācijas intervāla iekšpusē (skat.zīm. 2.3), tad nepieciešams integrāli sadalīt divās daļās. Dotais integrālis konverģē tikai tajā gadījumā, ja konverģē abi neīstie integrāļi.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$



Zīmējums 2.2



Zīmējums 2.3

Piemērs 2.1 Novērtēt integrāli

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$$

Atrisinājums

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-1/3} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{lai } u = 1-x, & du = -dx \\ u_1 = 1, & u_2 = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(-\int_1^{0+\varepsilon} u^{-1/3} du \right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} \Big|_1^{0+\varepsilon} = -\frac{3}{2}(0-1) = \frac{3}{2}$$

Atbilde Šī integrāļa robežvērtība ir $\frac{3}{2}$, integrālis konverģē .

Piemērs 2.2 Novērtēt integrāli

$$\int_0^3 \frac{2dx}{(x-1)^2}$$

Atrisinājums Te zemintegrāļa funkcija nav definēta integrēšanas intervāla iekšējā punktā $x = 1$. Tāpēc nepieciešams integrāli sadalīt divās daļās.

$$\int_0^3 \frac{2dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{2dx}{(x-1)^2} + \int_1^3 \frac{2dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{2dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{2dx}{(x-1)^2}$$

Katru no robežām aprēķināsim atsevišķi

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{2dx}{(x-1)^2} = 2 \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{-1}{x-1}\bigg|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{-\varepsilon} + 1 = \infty$$

Līdzīgi arī otrs neīstais integrālis tiecas uz bezgalību. Nav nepieciešams risināt šo otro integrāli, jo, ja kaut viens saskaitāmais tiecas uz bezgalību, tad dotais integrālis diverģē.

7.6.3 Vingrinājumi

Novērtēt dotos integrāļus, konstruēt zemintegrāļa funkciju un tām atbilstošo primitīvo funkciju grafikus.

1. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

2. $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

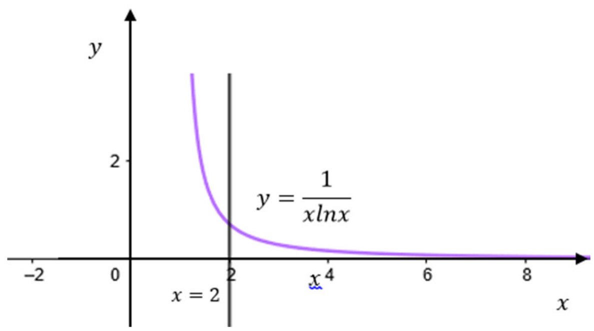
4. $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}x\, dx$

7.6.4 Atrisinājumi

1. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

Atrisinājums Zīmējumā 4.1 dots zemintegrāļa funkcijas grafiks, kas attēlo dilstošu funkciju dotajā integrēšanas intervālā



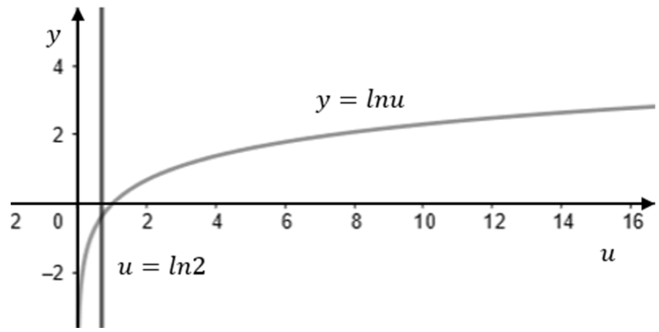
Zīmējums4.1

Dotā integrāļa augšējā robeža ir bezgalība. Tāpēc tas ir pirmā veida neīstais integrālis. Pēc tam, kad tiks atrasta primitīvā funkcija $\ln u$, aprēķināsim robežu. Ievērojot, ka logaritmiskā funkcija ir augoša pie bāzes skaitļa, kas lielāks par 1, tās robeža ir bezgalība, kad arguments x tiecas uz bezgalību (skat.zīm. 4.2).

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = \ln x \quad \text{tad } du = \dfrac{dx}{x} \\ u_1 = \ln 2, \;\; u_2 = \infty \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{ln2}^{\infty} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_{ln2}^{\infty} =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \ln u - \ln \ln 2 = \infty$$



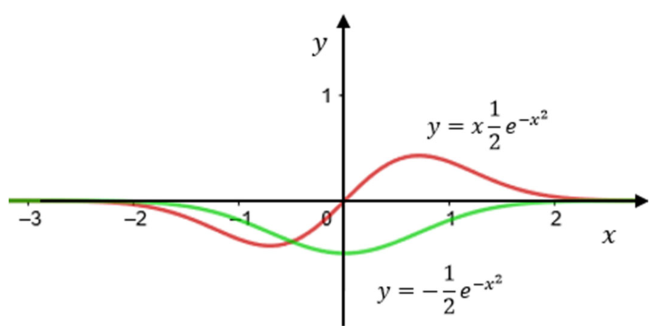
Zīmējums 4.2

Dotais neīstais integrālis diverģē.

2. $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$

Atrisinājums

Zīmējumā 4.3 sarkanā krāsā ir attēlota zemintegrāļa funkcija, bet zaļā krāsā – tās primitīvā funkcija. Abi grafiki ir simetriski attiecībā pret koordinātu sākuma punktu, kas nozīmē, ka abas funkcijas ir nepāra funkcijas.



Zīmējums 4.3

Ievērojot, ka dotā integrāļa apakšējā robeža ir bezgalība, dotais integrālis ir pirmā veida neīstais integrālis. Aprēķināsim integrāli, izmantojot panešanu zem diferenciāla zīmes, un aprēķināsim tā robežu.

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}d(x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^0 - \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(1-0) = -\frac{1}{2}$$

Dotais integrālis konverģē.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Atrisinājums

Integrālis, kura abas integrēšanas robežas ir bezgalīgas, ir pirmā veida neīstais integrālis. Sadalīsim to divās daļās

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Abiem integrāļiem ir viena un tā pati zemintegrāļa funkcija. Šo funkciju var integrēt, atdalot pilno kvadrātu

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \left| \begin{matrix} x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = \\ = (x+1)^2+1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

Atrasto primitīvo funkciju izmantosim, lai novērtētu abus neīstos integrāļus, pielietojot funkcijas $\operatorname{arctg}x$ īpašības

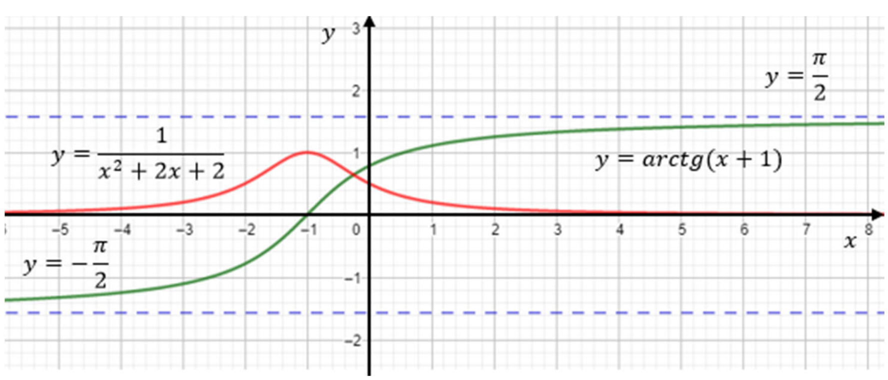
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-\infty}^{0} + \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{0}^{\infty} =$$

$$= \operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}(-\infty) + \operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg}0 =$$

$$= 2\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}x = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

Integrālis konverģē uz skaitli π. Abu funkciju grafiki doti zīmējumā 4.4



Zīmējums 4.4

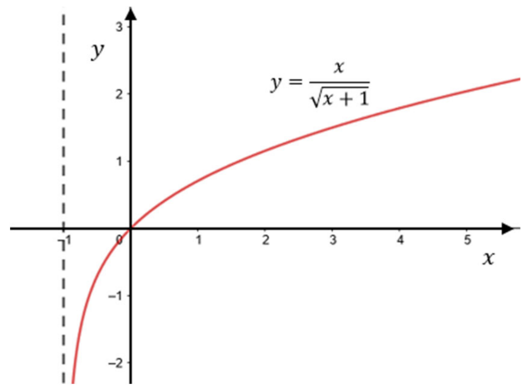
4. $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

Atrisinājums

Noteiksim zemintegrāļa funkcijas definīcijas apgabalu

$$x > -1$$

Funkcija nav definēta pie integrāļa apakšējās robežas, tāpēc dotais integrālis ir otrā veida neīstais integrālis. Zemintegrāļa funkcijas grafiks dots zīmējumā 4.5



Zīmējums 4.5

Atbilstošo nenoteikto integrāli aprēķināsim ar substitūcijas palīdzību

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } x+1 = u^2 \\ dx = 2udu \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{u^2-1}{u} 2udu =$$

$$= 2\int (u^2-1)du = 2\left(\frac{u^3}{3} - u\right) + C =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{x+1}^3}{3} - \sqrt{x+1}\right) + C$$

Atgriezīsimies pie neīstā integrāļa

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx =$$

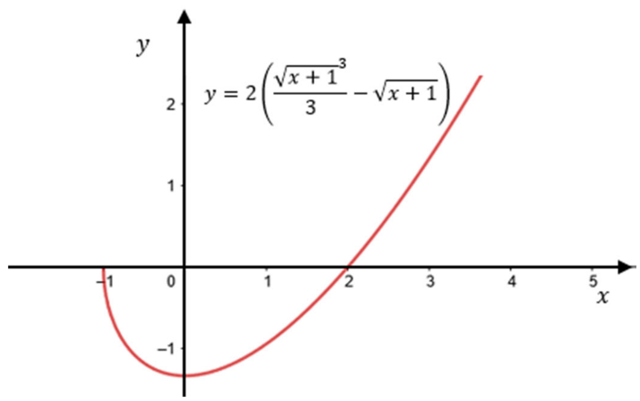
$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} 2\left(\frac{\sqrt{x+1}^3}{3} - \sqrt{x+1}\right)\Bigg|_{-1+\varepsilon}^{2} =$$

$$= 2\frac{\sqrt{3}^3}{3} - 2\sqrt{3} - 2\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{\sqrt{-1+\varepsilon+1}^3}{3} - \sqrt{-1+\varepsilon+1}\right) =$$

$$= 2\frac{\sqrt{3}^3}{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

Dotā neīstā integrāļa robežvērtība ir galīgs skaitlis, tāpēc tas konverģē.

Primitīvas funkcijas grafiku var apskatīt zīmējumā 4.6. Funkcijas vērtība punktā $x = 2$ ir 0, funkcijas grafiks šajā punktā krusto x-asi. Primitīvās funkcijas ekstrēma punkts (minimuma punkts) dotajā intervālā ir punktā $x = 0$.



Zīmējums 4.6

5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}x\, dx$

Atrisinājums

Tangensa funkcija nav definēta punktā $x = \frac{\pi}{2}$. Te risinām otrā veida neīsto integrāli. Zemintegrāļa funkcijas un tai atbilstošās primitīvās funkcijas grafiki ir konstruēti zīmējumā 4.7.

Doto integrāli risināsim, sinusa funkciju panesot zem diferenciāļa zīmes.

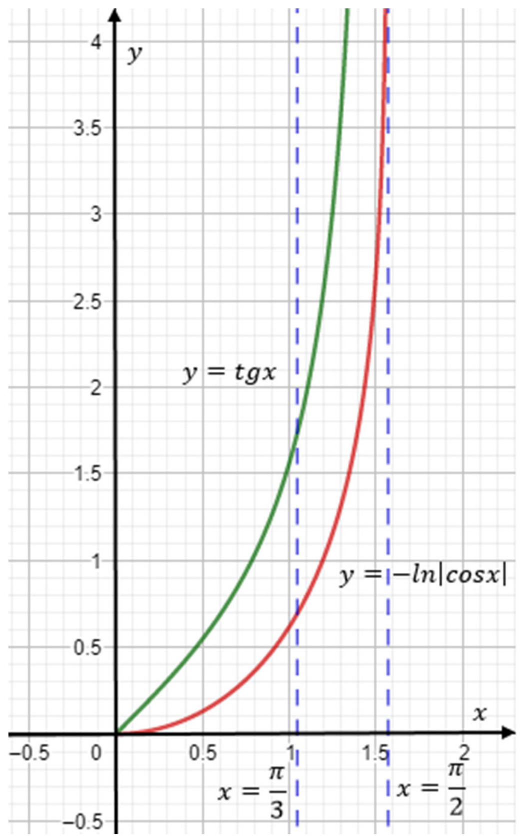
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= -\ln|\cos x|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right) = -\infty$$

Integrālis diverģē, jo tā robežvērtība ir bezgalīga.



Zīmējums 4.7

7.7 Noteiktā Integrāļa Pielietojumi: Loka Garums

DETALIZĒTS APRAKSTS:

Dažāda veida līkņu garumu var aprēķināt ar noteikto integrāļu palīdzību. Šajā nodaļā tiek paskaidrots, kā iegūst formulu loka garuma aprēķināšanai, kā arī kā pārveidot formulu, lai var aprēķināt arī tādu loku garumu, kas doti parametriski vai arī polārajā koordinātu sistēmā. Saturs ir papildināts ar grafiku piemēriem, kas konstruēti ar programmu GeoGebra un Desmos palīdzību.

MĒRĶIS: demonstrēt Dekarta koordinātu sistēmā vai polārajā koordinātu sistēmā dotu līniju loka garuma aprēķināšanu.

Mācību rezultāts:

1. Studenti izprot noteiktā integrāļa nozīmi ģeometrisku jautājumu risināšanā.
2. Studenti prot aprēķināt dotā līnijas loka garumu.

Priekšzināšanas: Integrēšanas un atvasināšanas pamatlikumi; Ņūtona – Leibnica formula; funkciju īpašības; funkciju grafiku konstruēšana; algebras un trigonometrijas formulas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Ar noteikto integrāļu palīdzību var aprēķināt dažādu objektu garumu, ja tos var aprakstīt ar funkciju palīdzību. Piemēram, var aprēķināt tauvas garumu, kas iekārta starp diviem atbalsta punktiem.

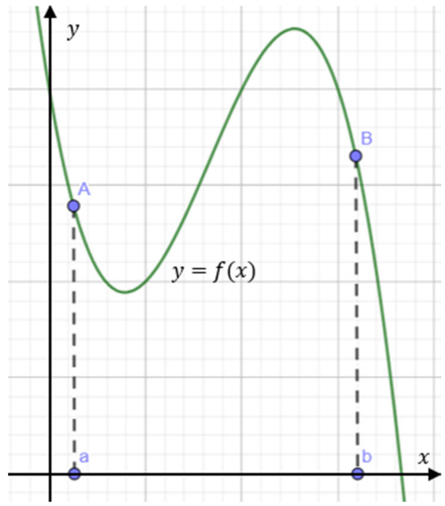
Saturs

1. Loka garuma aprēķināšanas formula
2. Parametriski dotas līnijas loka garums
3. Līknes loka garuma aprēķināšana, ja tā dota polārajā koordinātu sistēmā
4. Vingrinājumi
5. Atrisinājumi

Loka Garums

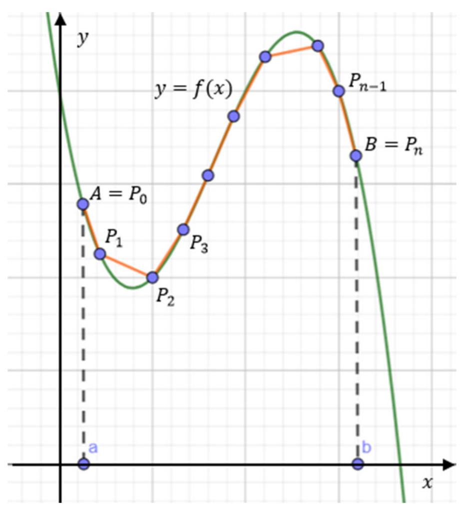
7.7.1 Loka garuma aprēķināšanas formula

Aplūkosim funkciju $y = f(x)$, kura ir dota intervālā $[a, b]$. Aprēķināsim šīs līknes loka $\overset{\frown}{AB}$ garumu (skat.zīm. 1.1).



Zīmējums 1.1

Izveidosim lauztu līniju, kas iet caur punktiem $A = P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots,$ un $P_n = B$ (skat.zīm. 1.2).



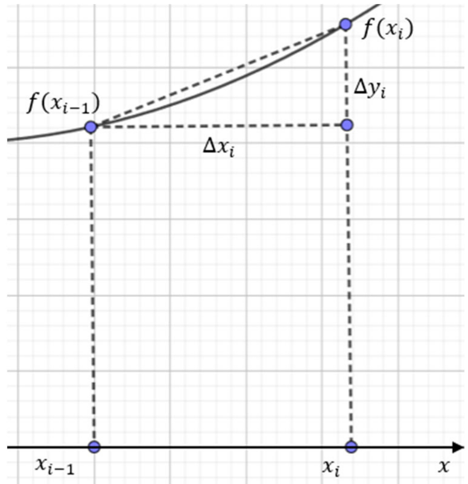
Zīmējums 1.2

Aprēķināsim katra nogriežņa $[P_{i-1}, P_i]$ garumu pie katra indeksa i (skat.zīm.1.3) pēc Pitagora teorēmas:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

kur

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \;\; \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$



Zīmējums 1.3

Pārveidosim izteiksmi

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Loka $\breve{AB}$ garumu var apēķināt aptuveni, summējot visu segmentu garumus Δl_i

$$\breve{AB} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Iznākums varētu kļūt precīzāks, ja loku sadalītu arvien sīkākās un sīkākās daļās. Aprēķinot robežgadījumu, kad maksimālais intervāla Δx_i garums tiecas uz nulli, var iegūt loka precīzo garumu dotajās garuma vienībās

$$\breve{AB} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Atcerēsimies funkcijas $y = f(x)$ atvasinājuma pēc argumenta x definīciju

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

Ievērojot šo definīciju, izteiksim aplūkoto robežu ar integrāļa palīdzību sekojošā veidā, tā iegūstot loka garuma aprēķināšanas formulu

$$\breve{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Piemērs 1.1

Aprēķināt taisnes $y = 3x - 2$ segmenta garumu robežās no $a = -2$ līdz $b = 3$.

Atrisinājums

Lai pielietotu loka garuma aprēķināšanas formulu, ir nepieciešams aprēķināt atvasinājumu

$$y' = (3x - 2)' = 3$$

Tad

$$L = \int_{-2}^{3} \sqrt{1 + (3)^2}\, dx = \sqrt{10} \int_{-2}^{3} dx = \sqrt{10}x \Big|_{-2}^{3} =$$

$$= \sqrt{10}(3 + 2) = 5\sqrt{10} \approx 15.8 \text{ vienības}$$

7.7.2 Parametriski dotas funkcijas loka garums

Loks $\widetilde{AB} = L$ ir aprakstīts ar parametriskajiem vienādojumiem pēc argumenta t intervālā $[a, b]$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Loka garuma aprēķināšanas formulu pārveidosim, izmantojot substitūciju pēc argumenta t kā arī ievērojot parametriski dotas funkcijas atvasinājumu pēc argumenta x

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \left| \begin{matrix} x = x(t), \;\; dx = d(x(t)) = (x'(t))_t dt = \dot{x}dt \\ y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}, \;\; x(t_1) = a, \;\; x(t_2) = b \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \cdot \dot{x}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dx$$

Parametriski dotas funkcijas loka garumu var aprēķināt pēc sekojošās formulas

$$\boldsymbol{L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dx}$$

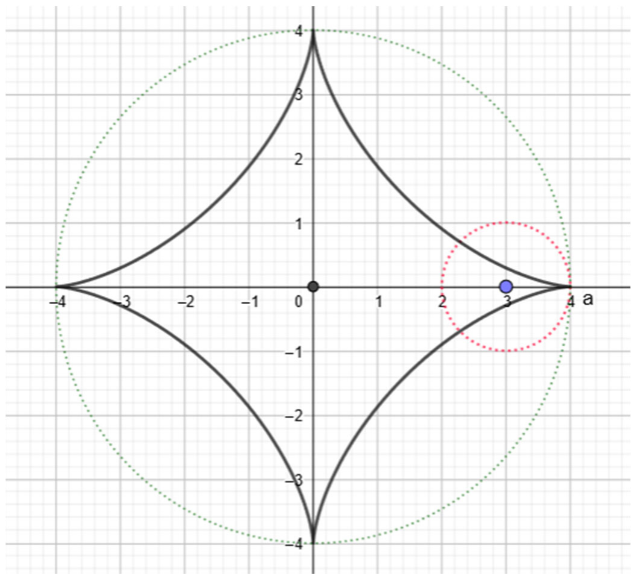
Piemērs 2.1

Aprēķināt astroīdas garumu

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$$

Atrisinājums

Astroīda ir četrstarainas zvaigznes veida līkne, kuru apraksta riņķa līnijas punkts, ja šī riņķa līnija rotē pa lielākas riņķa līnijas iekšpusi. Lielākajai riņķa līnijai ir četras reizes lielāks rādiuss (skat.zīm.2.1). Parametrs t izsaka leņķi – līkni var konstruēt, ja parametrs t mainās no 0 līdz 2π.



Zīmējums 2.1

Astroīdas līkne ir centrāli simetriska attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu. Tāpēc var aprēķināt līknes ceturtās daļas garumu, ja parametrs t mainās no 0 līdz $\pi/2$.

Lai sastādītu integrāli, vispirms ir nepieciešams aprēķināt abu parametrisko funkciju atvasinājumu pēc argumenta t

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 \cdot 3\cos^2 t(-\sin t) \\ \dot{y} = 4 \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t \end{cases}$$

Dotās astroīdas garums ir četras reizes garāks, nekā izvēlētais loks

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(4 \cdot 3\cos^2 t(-\sin t))^2 + (4 \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{144\cos^4 t\sin^2 t + 144\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{144\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

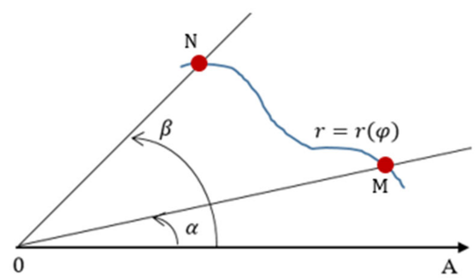
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 12\text{sint}\cdot\ \text{cost}\ dt = 48\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sint}\ d(\text{sint})\ = 48\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 24(1-0) = 24\ \text{vienības}$$

7.7.3 Līknes loka garuma aprēķināšana, ja tā dota polārajā koordinātu sistēmā

Polārās līnijas $r = r(\varphi)$ loka $\breve{MN}$ garumu starp stariem α un β (skat.zīm. 3.1) var aprēķināt pēc formulas

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$



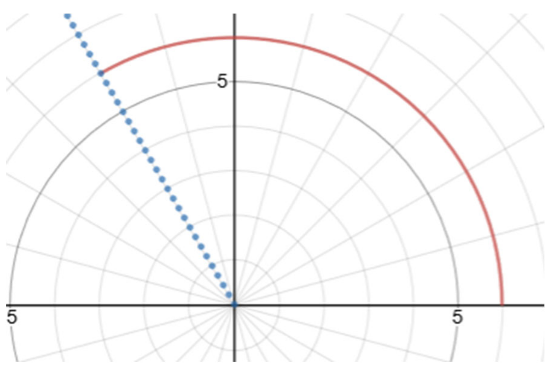
Zīmējums 3.1

Piemērs 3.1

Aprēķināt riņķa līnijas $r = 6$ loka garumu sekojošās robežās $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$

Atrisinājums

Aprēķināsim tāda riņķa līnijas ar rādiusu 6 loka garumu, kas ir trešā daļa no šīs riņķa līnijas (skat.zīm.3.2)



Zīmējums 3.2

Ievērojot funkcijas atvasinājumu pēc argumenta φ, $r' = 0$, loka garums ir

$$L = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{36+0}\, d\varphi = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 6\, d\varphi = 6\varphi \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = 4\pi \quad \text{vienības}$$

7.7.4 Vingrinājumi

1. Aprēķināt līknes $y = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ loka garumu no $x = 1$ līdz $x = 2$.
2. Aprēķināt līknes $y = \ln x$ loka garumu no $x = 1$ līdz $x = \sqrt{2}$.
3. Aprēķināt cikloīdas viena loka garumu, ja tā dota ar parametriskajiem vienādojumiem

$$\begin{cases} x = 2(1 - \sin t) \\ y = 2(t - \cos t) \end{cases}$$

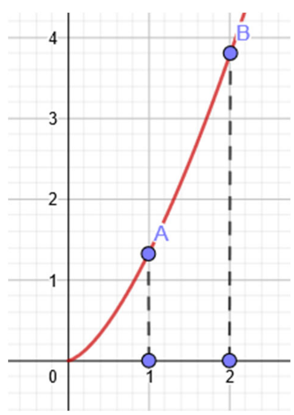
4. Aprēķināt riņķa līnijas $r = 4\cos\varphi$ loka garumu starp stariem $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ un $\varphi = \frac{\pi}{5}$.

7.7.5 Atrisinājumi

1. Aprēķināt līknes $y = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ loka garumu no $x = 1$ līdz $x = 2$.

Atrisinājums

Konstruēsim grafiku



Zīmējums 5.1

Aprēķināsim loka garumu starp punktiem A un B. Atvasināsim funkciju

$$y' = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = 2\sqrt{x}$$

Pielietosim loka garuma formulu

$$\breve{AB} = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+\left(2\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+4x}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = 1+4x, \;\; du = 4dx \\ x_1 = 1, \;\; u_1 = 5, x_2 = 2, \;\; u_2 = 9 \end{array} \right| =$$

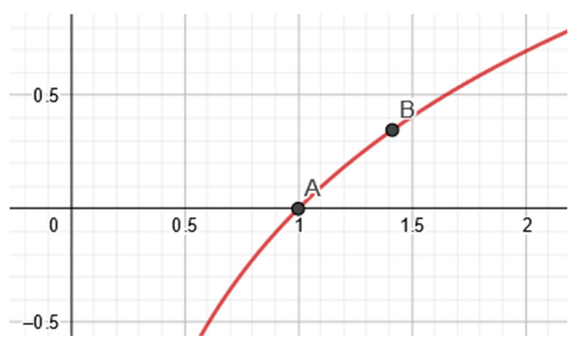
$$= \frac{1}{4}\int_5^9 u^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_5^9 = \frac{1}{6}\left(3^3 - \sqrt{5^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(27 - 5\sqrt{5}\right) \approx 2.64 \;\; \text{vienības}$$

2. Aprēķināt līknes $y = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ loka garumu no $x = 1$ līdz $x = 2$.

Atrisinājums

Konstruēsim dotās funkcijas grafiku



Zīmējums 5.2

Funkcijas $y = \ln x$ atvasinājums ir

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Integrāļa aprēķināšanai pārveidosim zemintegrāļa funkciju un pielietosim apzīmēšanu

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$L=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx=$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}xdx=\left|\begin{matrix}u^2=x^2+1, & 2udu=2xdx\\ u_1=\sqrt{2}, & u_2=\sqrt{3}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{u}{u^2-1}udu=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{u^2-1+1}{u^2-1}du=$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}du+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2-1}du=\left(u+\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}=$$

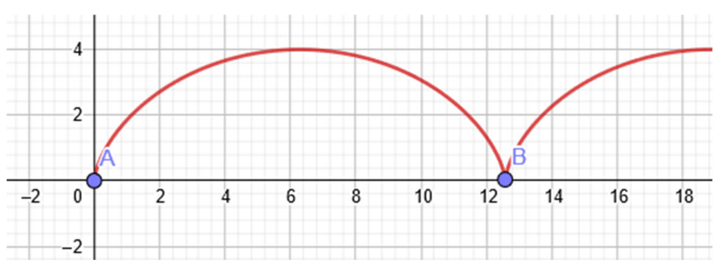
$$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|-ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right)\approx 0.54\quad \text{vienības}$$

3. Aprēķināt cikloīdas viena loka garumu, ja tā dota ar parametriskajiem vienādojumiem

$$\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$$

Atrisinājums

Aprēķināsim tā cikloīdas loka garumu, kuras parametrs pieder intervālam $t\in\ [0,2\pi]$ (skat.zīm. 5.3).



Zīmējums 5.3

Vispirms veiksim atvasināšanu

$$\dot{x}=2(1-\cos t)$$
$$\dot{y}=2\sin t$$

Vienkāršosim izteiksmi, pielietojot trigonometrijas un algebras formulas

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=4(1-\cos t)^2+4\sin^2 t=$$

$$=4(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)=$$

$$= 4(2 - 2\,\cos t) = 8 \cdot 2\sin^2\frac{t}{2} = 16\sin^2\frac{t}{2}$$

Te pārveidojumos lietojām sekojošas trigonometrijas formulas

$$\mathbf{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

$$\mathbf{1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}}$$

Cikloīdas loka garums ir

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

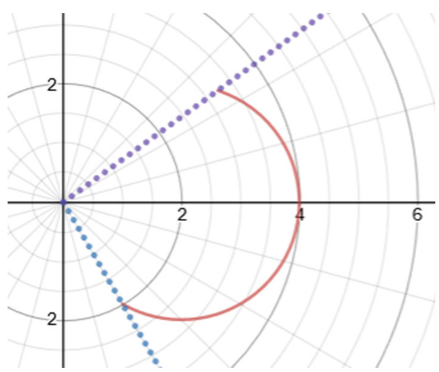
$$= \int_0^{2\pi} 4\sin\frac{t}{2}\,dt = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -8(\cos\pi - \cos 0) = -8 \cdot (-2) = 16 \quad \text{vienības}$$

4. Aprēķināt riņķa līnijas $r = 4\cos\varphi$ loka garumu starp stariem $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ un $\varphi = \frac{\pi}{5}$.

Atrisinājums

Konstruēsim līkni polārajā koordinātu sistēmā (skat.zīm.5.4)



Zīmējums 5.4

Aprēķināsim funkcijas atvasinājumu un veiksim trigonometriskos pārveidojumus

$$r' = (4\cos\varphi)' = -4\sin\varphi$$

$$r^2 + r'^2 = 16\cos^2\varphi + 16\sin^2\varphi = 16$$

Izveidosim integrāli loka garuma aprēķināšanai

$$L = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{5}} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{5}} \sqrt{16}\, d\varphi = 4\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{5}} = 4\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{32\pi}{15} \quad \text{vienības}$$

7.8 Noteikto Integrāļu pielietojumi: Plaknes Figūru Laukuma Aprēķināšana

DETALIZĒTS APRAKSTS:

Noteiktie integrāļi tiek lietoti, lai risinātu dažādas problēmas. Viens no populārākajiem pielietojumiem ir ar līknēm ierobežotu figūru laukuma aprēķināšana. Šajā nodaļā tiek apskatīti dažāda veida laukumi, kā arī speciālas metodes to aprēķināšanai. Noteikto integrāļu formulas dotas gadījumiem, ja līknes ir aprakstītas analītiski vai ar parametriskiem vienādojumiem, vai dotas polārajā koordinātu sistēmā. Lai konstruētu šādas līknes, var tikt lietotas dažādas datorprogrammas, piemēram, GeoGebra Classic vai Desmos Graphing Calculator, vai citas. Studenti savu risinājumu pareizību var pārbaudīt ar integrāļu kalkulatora palīdzību (https://www.integral-calculator.com/) kā arī konstruēt zemintegrāļa funkciju un primitīvo funkciju grafikus.

MĒRĶIS: izskaidrot dažāda veida plaknes figūru laukuma aprēķināšanas metodes.

Mācību rezultāts:

1. Studenti izprot noteiktā integrāļa ģeometrisko nozīmi.
2. Studenti prot aprēķinat ar līknēm ierobežotu figūru laukumu
3. Studenti saprot, kādos gadījumos plaknes figūru vajag sadalīt divos vai vairākos apgabalos.

Priekšzināšanas: Integrēšanas un atvasināšanas pamatlikumi; Ņūtona – Leibnica formula; funkciju īpašības; funkciju grafiku konstruēšana; algebras un trigonometrijas formulas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Viens no kuģu būves pamatjautājumiem ir dažādu specifisku konstrukciju laukuma aprēķināšana. Konstrukciju formas var būt tik komplicētas, ka to aprēķināšanai tiek lietotas skaitliskās metodes. Detaļu virsmu laukumu aprēķināšanai ir ari nozīme fizikā, piemēram, lai aprēķinātu kādas vielas spiedienu uz detaļas virsmu, ir nepieciešams zināt šīs virsmas laukumu.

Saturs

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Plaknes Figūru Laukuma Aprēķināšana

7.8.1 Funkcijas grafika ierobežotais laukums

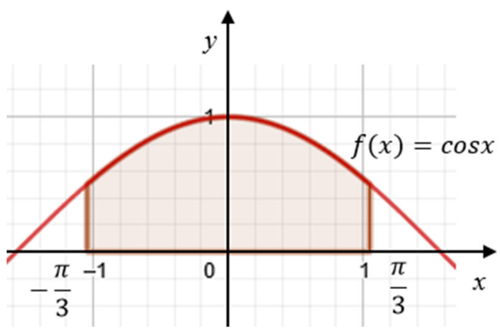
Noteiktais integrālis tika definēts ar figūras laukuma palīdzību. Ar noteiktā integrāļa palīdzību var aprēķināt tā sauktās līklīniju trapeces S laukumu – tā ir figūra, kuru ierobežo nepārtrauktas funkcijas $f(x)$ grafiks intervālā $[a, b]$, divas vertikālas taisnes $x = a$ un $x = b$, un x-ass

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Piemērs 1.1

Aprēķināt laukumu, ko ierobežo funkcija $y = \cos x$, vertikālas taisnes $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$ un x-ass.

Atrisinājums Konstruēsim funkcijas grafiku (skat. zīm. 1.1) un sastādīsim integrāli



Zīmējums 1.1

$$S = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sin\frac{\pi}{3} - 0 = \sqrt{3} \quad \text{kv. vienības}$$

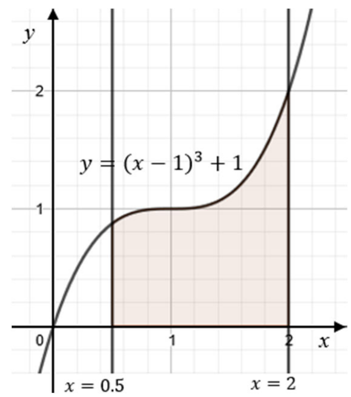
Ievērosim, ka integrālim ir simetriskas integrācijas robežas un ka kosinusa funkcija ir pāra funkcija, tāpēc intervālu var sadalīt uz pusēm.

Piemērs 1.2 Aprēķināsim tādas plaknes figūras laukumu, ko ierobežo funkciju grafiki

$y = (x-1)^3 + 1$, $x = 0.5$, $x = 2$ un $y = 0$.

Atrisinājums Figūra ir ierobežota ar divām vertikālām taisnēm $x = 0.5$, $x = 2$, x-asi un kubisko parabolu (skat. zīm. 1.2).

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Zīmējums 1.2

Figūras laukums *S* ir

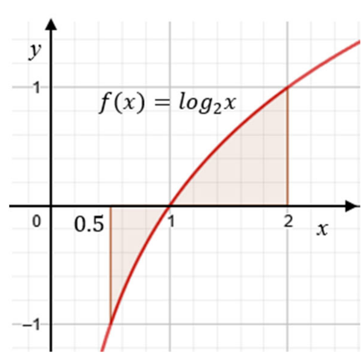
$$S = \int_{0.5}^{2} ((x-1)^3 + 1)dx = \int_{0.5}^{2} (x-1)^3 d(x-1) + \int_{0.5}^{2} dx =$$

$$= \left(\frac{(x-1)^4}{4} + x\right)\Bigg|_{0.5}^{2} = \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{64} - 0.5 \approx 1.73 \quad \text{kv. vien.}$$

Ja jāaprēķina tādas figūras laukumu, ko dotajā intervālā ierobežo funkcijas grafiks līdz x-asij un ja dotais intervāls satur tādus apakšintervālus, kur katrā no tiem funkcija pieņem tikai pozitīvas vai tikai negatīvas vērtības, tad šī funkcija ir jāintegrē atsevišķi katrā no apakšintervāliem. Jāņem vērā, ka negatīvas funkcijas integrāļa vērtība ir negatīva. Tāpēc tajos apakšintervālos, kur funkcijas vērtības ir negatīvas, ir jāaprēķina integrāļa absolūtā vērtība.

Piemērs 1.3 Aprēķināt tādas figūras laukumu, ko ierobežo funkcijas $f(x) = \log_2 x,\ x = 0.5,\ x = 2,$ $y = 0$.

Atrisinājums No funkcijas grafika redzam, ka tai ir negatīvas vērtības intervālā $[0.5,1]$ un pozitīvas vērtības intervālā $[1,2]$ (skat. zīm. 1.3). Tāpēc sadalīsim integrāli divos integrāļos, lai aprēķinātu figūras laukumu.



Zīmējums 1.3

$$S = \int_{0.5}^{2} |\log_2 x| dx = \left| \int_{0.5}^{1} \log_2 x dx \right| + \int_{1}^{2} \log_2 x dx$$

Aprēķināsim atbilstošo nenoteikto integrāli ar parciālās integrēšanas metodi

$$\int \log_2 x dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = \log_2 x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x \ln 2}, & v = x \end{matrix} \right| = x \log_2 x - \frac{1}{\ln 2} \int \frac{x dx}{x} =$$

$$= x \log_2 x - \frac{x}{\ln 2} + C$$

Tagad izmantosim iegūto primitīvo funkciju figūras laukuma S aprēķināšanai, pielietojot Ņūtona – Leibnica formulu

$$S = \left| x \log_2 x - \frac{x}{\ln 2} \right| \Bigg|_{0.5}^{1} + \left(x \log_2 x - \frac{x}{\ln 2} \right) \Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= \left| \log_2 1 - \frac{1}{\ln 2} - 0.5 \log_2 0.5 + \frac{1}{2\ln 2} \right| + 2\log_2 2 - \frac{2}{\ln 2} - \log_2 1 + \frac{1}{\ln 2} =$$

$$= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2} \right| + 2 - \frac{1}{\ln 2} \approx |-0.22| + 0.56 \approx 0.78 \quad \text{kv. vien.}$$

Piemērs 1.4 Pie kādas augšējās robežas b vērtības integrālis ir vienāds ar 4?

$$\int_{1}^{b} \frac{dx}{4\sqrt{x}} = 4$$

Atrisinājums Aprēķināsim integrāli saskaņā ar Ņūtona – Leibnica formulu

$$\int_{1}^{b} \frac{dx}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{x} \Bigg|_{1}^{b} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - 1\right)$$

Tad atrisināsim vienādojumu

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - 1\right) = 4$$

$$\sqrt{b} - 1 = 8$$

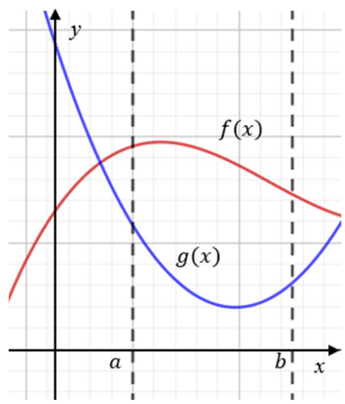
$$\sqrt{b} = 9; \quad b = 81$$

Atbilde Integrāļa augšējai robežai jābūt $b = 81$.

7.8.2 Laukums starp divām līknēm

Ja funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas intervālā $[a,b]$ un $f(x) \geq g(x)$ pie visiem argumentiem $x \in [a,b]$, tad figūras laukumu *S*, ko ierobežo abas līknes $f(x)$ un $g(x)$ var izteikt ar sekojošā integrāļa palīdzību

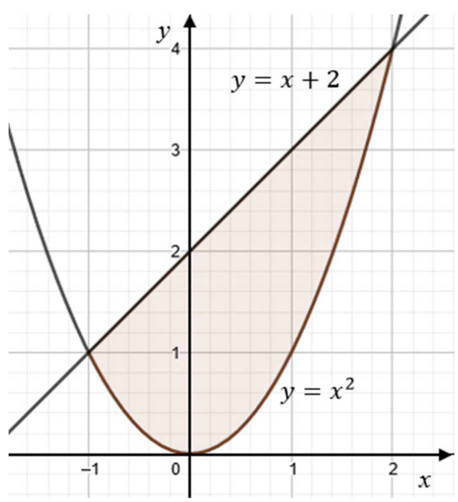
$$\boldsymbol{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx}$$



Zīmējums 2.1

Piemērs 2.2 Aprēķināt tādas figūras laukumu, ko ierobežo divas līknes $y = x^2$, $y = x + 2$

Atrisinājums Konstruēsim doto funkciju grafikus (skat.zīm. 2.2). Lai noteiktu integrāļa robežas, jāaprēķina figūras projekciju uz x-asi, tas ir, jāatrisina vienādojumu sistēma, lai noteiktu abu līkņu krustpunktus.



Zīmējums 2.2

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Vienādojumam ir divas saknes

$$x_1 = -1, \;\; x_2 = 2$$

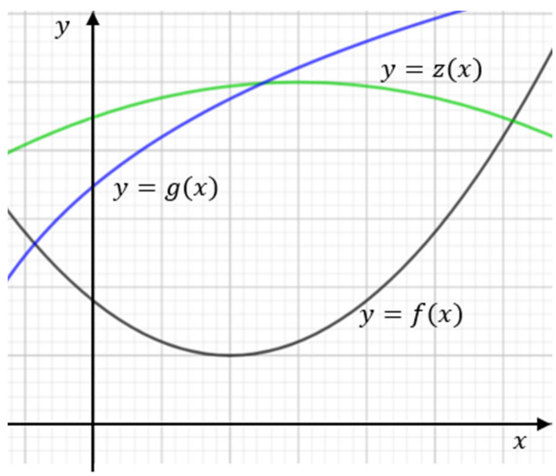
Ievērojot, ka parabola ir figūras apakšējā līkne, sastādām integrāli

$$S = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 4.5 \quad \text{kv. vien.}$$

7.8.3 Saliktas figūras gadījums

Aplūkosim tādu gadījumu, kad figūru ierobežo vairāk nekā divas līknes. Pieņemsim, ka figūru ierobežo līknes $f(x)$, $g(x)$, $z(x)$ (skat.zīm. 3.1).

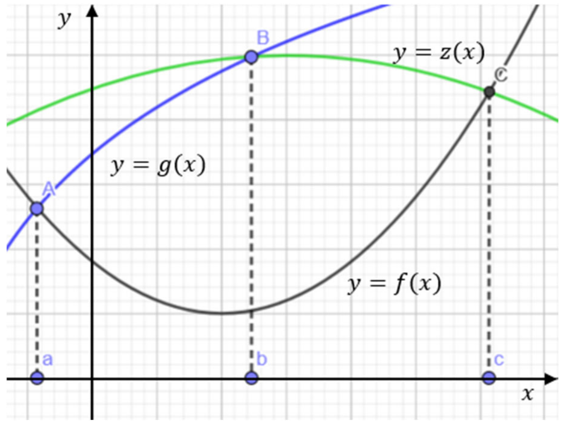


Zīmējums 3.1

Te dotas divas augšējās funkcijas $g(x)$ un $z(x)$ un viena apakšējā funkcija $f(x)$. Noteiksim funkciju grafiku krustpunktus, kuri definē divus dažādus apgabalus, kuriem ir atšķirīgi projekciju intervāli $[a, b]$ un $[b, c]$ (skat.zīm. 3.2). Ir jāizveido divi integrāļi, lai aprēķinātu dotās figūras laukumu

$$\boldsymbol{S = \int_{a}^{b} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{b}^{c} (z(x) - f(x))\,dx}$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

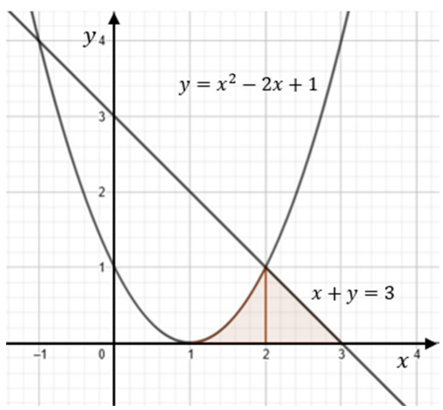


Zīmējums 3.2

Piemērs 3.1 Aprēķināt tādas figūras laukumu, ko ierobežo parabola $y = x^2 - 2x + 1$ un divas taisnes $x + y = 3,\ y = 0$.

Atrisinājums

Zīmējumā 3.3 redzami vairāki ierobežoti apgabali. Atradīsim laukumu, ko ierobežo parabola un tieši divas taisnes, kur viena no taisnēm ir x-ass (skat. iekrāsoto apgabalu).



Zīmējums 3.3

Risinājumu var izpildīt vairākos soļos:

1.solis. Noteiksim figūras projekcijas intervālu

$$x^2 - 2x + 1 = 0; \quad x = 1$$

$$x + y - 3 = 0; \quad x = 3$$

Projekcijas intervāls ir $[1, 3]$.

2.solis.

Aprēķināsim parabolas un taisnes $x + y = 3$ krustpunktu

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

$$3 - x = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Vienādojumam ir divas saknes $x = -1$; $x = 2$. Punkts $x = 2$ pieder intervālam $[1, 3]$.

3.solis. Lai aprēķinātu figūras laukumu, tās projekcijas intervālu nepieciešams sadalīt divās daļās

$$[1, 3] = [1, 2] + [2, 3]$$

un sastādīt divus dažādus integrāļus

$$S = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)\, dx + \int_2^3 (3 - x)\, dx$$

4.solis. Aprēķināsim figūras laukumu

$$S = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)\, dx + \int_2^3 (3 - x)\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Bigg|_1^2 + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3 =$$

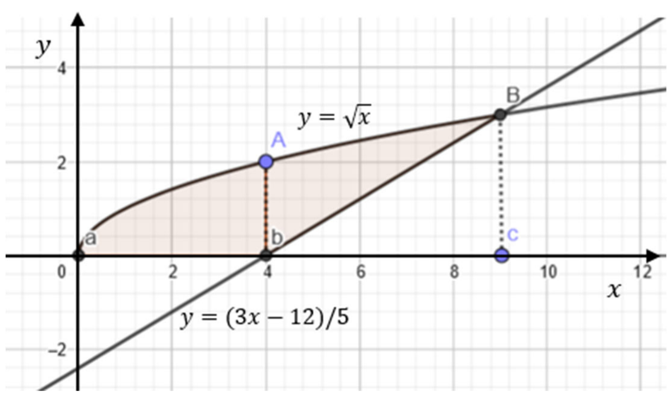
$$= \frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3} + 1 - 1 + 9 - \frac{9}{2} - 6 + 2 = \frac{5}{6} \text{ kv. vien.}$$

Piemērs 3.2 Aprēķināt figūras laukumu, ko ierobežo līnijas $y = \sqrt{x}$, $3x - 5y - 12 = 0$, $y = 0$.

Atrisināsim doto uzdevumu divos dažādos veidos.

Atrisinājums 1

1.solis. Konstruēsim doto apgabalu.



Zīmējums 3.4

2.solis. Noteiksim integrāļa robežas. Zīmējumā 3.4 parādīts salikts apgabals, kura lielumu var aprēķinat ar divu integrāļu palīdzību. Pirmais integrālis ir definēts intervālā $[0, 4]$, jo taisnes krustpunkts ar x-asi ir $x = 4$. Otra integrāļa robežas ir $[4, 9]$. Intervāla labo robežu $x = 9$ var atrast, aprēķinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{3x - 12}{5} \end{cases}$$

$$5\sqrt{x} = 3x - 12$$

$$25x = 9x^2 - 72x + 144$$

$$9x^2 - 97x + 144 = 0$$

$$x = 9; \;\; x = \frac{16}{9}$$

Tā punkta B koordinātes ir $B(9, 3)$ (skat.zīm.3.4)

3.solis. Sastādīsim integrāļus

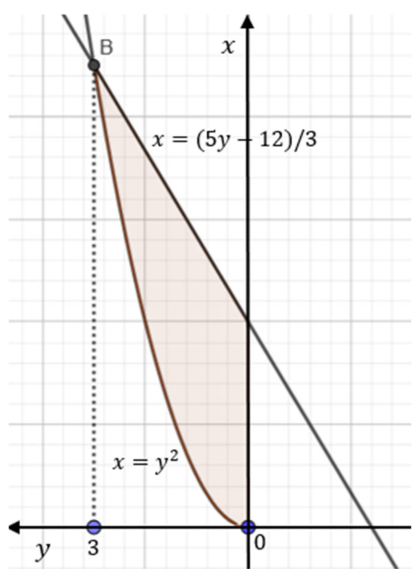
$$S = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx + \int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{3x - 12}{5}\right) dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\bigg|_0^4 + \frac{x^{3/2}}{3/2}\bigg|_4^9 - \frac{3x^2}{10}\bigg|_4^9 + \frac{12x}{5}\bigg|_4^9 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 27 - \frac{3}{10} \cdot 65 + \frac{12}{5} \cdot 5 = 10.5 \;\; \text{kv. vien.}$$

Atrisinājums 2

Mēs aprēķinājām laukumu, atrisinot divus integrāļus. Ja pagriezīsim zīmējumu 3.4 ar x-asi uz augšu, tad dotās funkcijas var izteikt kā funcijas pēc argumenta y (skat.zīm. 3.5)

$$x = y^2; \quad x = \frac{5y + 12}{3}$$



Zīmējums 3.5

Punkta B koordinātes ir $(9,0)$ (skat.zīm. 3.5). Figūras projekcija uz y-asi ir $[0,3]$. Tāpēc varam aplūkot vienkāršāku integrāli

$$S=\int_0^3\left(\frac{5y+12}{3}-y^2\right)dy=\left(\frac{5y^2}{6}+4y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=5\cdot\frac{9}{6}+12-9=10.5\ \text{kv. vien.}$$

7.8.4 Laukums, ko ierobežo parametriski dota līkne

Ar parametriskajiem vienādojumiem tiek aprakstītas dažādas līknes. Riņķa līnija, elipse, cikloīda, astroīda ir dažas no zināmākajām līknēm, kuras var aprakstīt ar parametriskajiem vienādojumiem. Lai aprēķinātu parametriski dotas figūras laukumu, pārveidosim formulu, izmantojot apzīmēšanu.

Ja plaknes apgabals S ir ierobežots ar funkciju $f(x)$, divām vertikālām taisnēm $x=a$ un $x=b$ un x-asi, tā laukumu var aprēķinat ar sekojošas formulas palīdzību

$$\boldsymbol{S=\int_a^b f(x)dx}$$

Ja funkcija ir definēta ar vienādojumiem $x=x(t)$ un $y=y(t)$, kur parametrs *t* mainās robežās no t_1 līdz t_2 un atbilstoši

$$a=x(t_1);\ \ b=x(t_2)$$

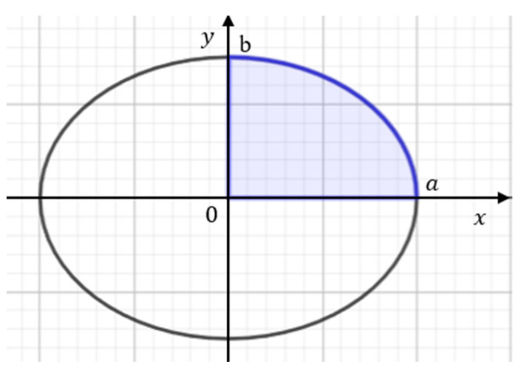
tad, pielietojot apzīmēšanu, iegūstam

$$\boldsymbol{S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)d(x(t))=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt}$$

Piemērs 4.1 Aprēķināt elipses laukumu.

Atrisinājums

Aplūkosim elipsi, kuras simetrijas asis sakrīt ar koordinātu sistēmas asīm. Tāpēc varam aprēķinat elipses ceturtās daļas laukumu (skat. Zīmējumu 4.1)



Zīmējums **4.1**

Elipses parametriskie vienādojumi ir

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$$

Aprēķināsim elipses laukumu, atceroties, ka integrāli sastādām ceturtajai daļai elipses laukuma, tāpēc izmantosim koeficientu 4

$$S = 4\int_0^a f(x)dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } x = a\cos t, & \text{tad } dx = -a\sin t\, dt \\ x_1 = 0, \text{ tad } t_1 = \frac{\pi}{2}; & x_2 = a, \ t_2 = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} bsint\ asint\ dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\ dt =$$

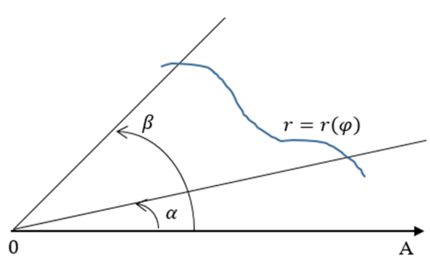
$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\ - ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\ d(2t) =$$

$$= 2abt\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2} \\ 0\end{matrix}\right. - ab\sin 2t\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2} \\ 0\end{matrix}\right. = \pi ab\ \text{ kv. vien.}$$

7.8.5 Līknes polārā koordinātu sistēmā

Līklīniju sektoru definē funkciju $r = r(\varphi)$ un diviem stariem $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$. Lai aprēķinātu šī sektora laukumu, lietosim formulu

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi}$$

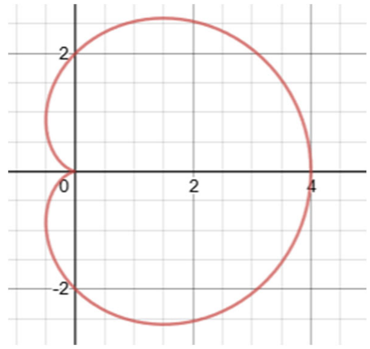


Zīmējums 5.1

Piemērs 5.1 Aprēķināt kardiodīdas $r = 2 + 2\cos\varphi$ laukumu!

Atrisinājums

Doto kardiodīdu var aplūkot zīmējumā 5.2.



Zīmējums 5.2

Polārā ass ir kardiodīdas simetrijas ass. Varam sastādīt integrāli, lai aprēķinātu pusi no kardiodīdas laukuma. Figūras puse ir ierobežota ar stariem 0° līdz 180°. Kardiodīdas laukumu aprēķināsim, integrācijas robežas izsakot radiānos

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (2 + 2\cos\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi} (4 + 4\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi} d\varphi + 4\int_0^{\pi} \cos\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \left(4\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = 4.5\pi \ \text{kv. vien.}$$

7.8.6 Vingrinājumi

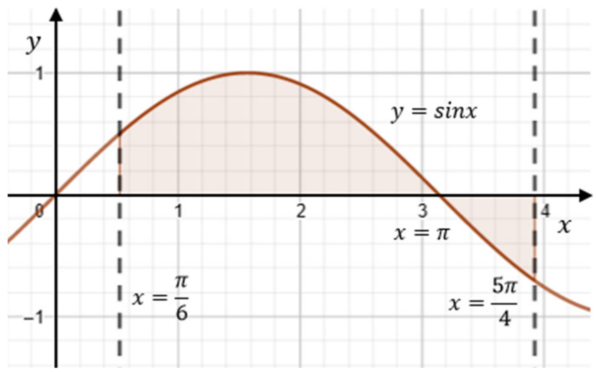
1. Aprēķināt tādas figūras laukumu, ko ierobežo sinusoīda $y = \sin x$ un x-ass intervālā $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right]$.
2. Aprēķināt tāda apgabala laukumu, ko ierobežo taisnes $y = x$, $x + 2y - 6 = 0$ un x-ass.
3. Aprēķināt laukumu starp divām parabolām $y = (x + 2)^2$ un $y = 4 - x^2$.
4. Aprēķināt apgabalu, kas ierobežots ar līnijām $y = 0.5^x$, $y = 0.5x\sqrt{1 + x^2}$, $x = -2$ un y-asi.
5. Aprēķināt cikloīdas vienas arkas laukumu
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$
6. Aprēķināt polārās rozes vienas lapas laukumu $r = 4\cos 3\varphi$.

7.8.7 Atrisinājumi

1. Aprēķināt tādas figūras laukumu, ko ierobežo sinusoīda $y = \sin x$ un x-ass intervālā $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Atrisinājums

Konstruēsim līkni un vertikālās taisnes (skat.zīm. 7.1).



Zīmējums 7.1

Dotajā intervālā funkcijai $y = \sin x$ ir pozitīvas un negatīvas vērtības. Lai aprēķinātu figūras laukumu, nepieciešams to sadalīt divās daļās. Grafiks krusto x–asi punktā $x = \pi$. Izveidosim divus integrāļus

$$S = S_1 + S_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin x\, dx + \left| \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x\, dx \right| = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} + |-\cos x| \Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

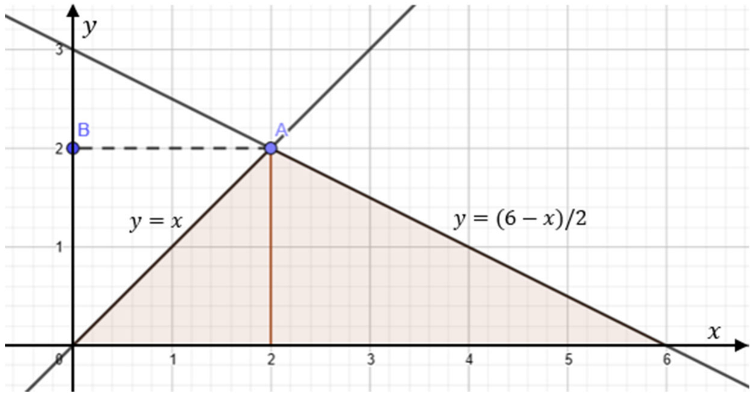
$$= -\left(\cos \pi - \cos\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{5\pi}{4} - \cos \pi =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{4+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \approx 2.16\ kv.vien.$$

2. Aprēķināt tāda apgabala laukumu, ko ierobežo taisnes $y = x$, $x + 2y - 6 = 0$ un x-ass.

Atrisinājums

Konstruēsim dotās taisnes un projicēsim doto apgabalu uz y-asi.



Zīmējums 7.2

Aprēķināsim taišņu krustpunkta A koordinātes

$$\begin{cases} y = x \\ y = (6-x)/2 \end{cases}$$

$$x = (6-x)/2$$

$$2x = 6 - x$$

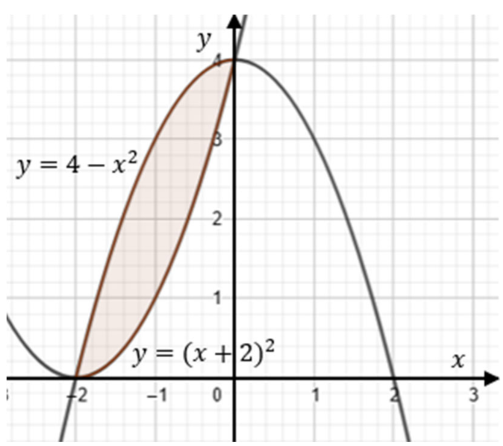
$$3x = 6; \quad x = 2$$

Krustpunkta A koordinātes ir A (2,2). Attiecībā pret mainīgo y, integrācijas robežas, tas ir, figūras projekcija uz y-asi, ir intervāls [0,2]. Integrālis ir

$$S = \int_0^2 (6 - 2y - y)\,dy = \left(6y - \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 12 - 3\cdot 2 = 6 \ \text{kv. vien.}$$

3. Aprēķināt laukumu starp divām parabolām $y = (x+2)^2$ un $y = 4 - x^2$.

Atrisinājums



Zīmējums 7.3

Apgabals starp divām parabolām ir definēts intervālā $[-2, 0]$. Atradīsim figūras laukumu

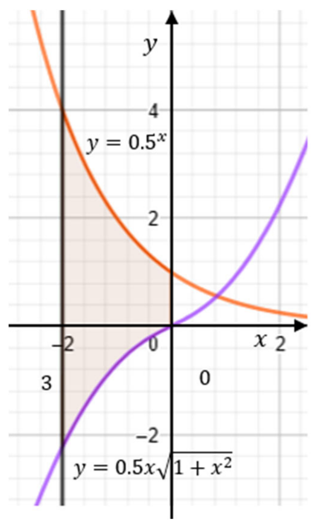
$$S = \int_{-2}^{0} (4 - x^2 - (x+2)^2)\, dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} - \frac{(x+2)^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0} =$$

$$= 0 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3} \text{ kv. vienības}$$

4. Aprēķināt apgabalu, kas ierobežots ar līnijām $y = 0.5^x$, $y = 0.5x\sqrt{1+x^2}$, $x = -2$ un y-asi.

Atrisinājums

Konstruēsim līknes un vertikālo taisni (skat.zīm. 7.4)



Zīmējums 7.4

Sastādīsim integrāli

$$S = \int_{-2}^{0} \left(0.5^x - 0.5x\sqrt{1+x^2}\right) dx = \int_{-2}^{0} 0.5^x\, dx - \int_{-2}^{0} 0.5x\sqrt{1+x^2}\, dx$$

Otro integrāli aprēķināsim atsevišķi, izmantojot substitūciju

$$\int_{-2}^{0} 0.5x\sqrt{1+x^2}\, dx = \left| \begin{matrix} \text{lai } u = 1 + x^2, \text{tad } du = 2xdx \\ u_1 = 5, \ u_2 = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{5}^{1} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{5}^{1} = \frac{1}{6}\left(1 - 5\sqrt{5}\right)$$

Tad

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$S=\left.\frac{0.5^x}{\ln 0.5}\right|_{-2}^{0}-\frac{1-5\sqrt{5}}{6}=\frac{1}{\ln 0.5}\left(1-0.5^{-2}\right)+\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\approx 6.03\ \text{kv. vien.}$$

5. Aprēķināt cikloīdas vienas arkas laukumu

$$\begin{cases} x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$$

Atrisinājums

Cikloīda ir līkne, kāda rodas, ja riņķis ripo pa taisni un fiksētā riņķa līnijas punktā ir pielikts zīmulis, kas izveido šo loku. Cikloīdas konstruēšanas piemēru var aplūkot sekojošā mājas lapā:

Weisstein, Eric W. "Cycloid." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html

Dotās cikloīdas rādiuss ir $R=2$. Tad pirmā cikloīdas arka ir definēta intervālā $[0,2\pi R]=[0,4\pi]$ (skat.zīm. 7.5).

Zīmējums 7.5

Jāaprēķina parametriski dotas funkcijas integrālis. Parametra *t* maiņas robežas aprēķināsim sekojošā veidā:

Zināms, ka $0\le x\le 4\pi$.

Pie apakšējās robežas $x=0$ ievietojam cikloīdas pirmo vienādojumu argumenta x vietā $0=2(t-\sin t)$. Aprēķinām $t_1=0$

Pie augšējās robežas $x=4\pi$ rīkojamies līdzīgi: $4\pi=2(t-\sin t)$; $2\pi=t-\sin t$. Aprēķinām $t_2=2\pi$.

Atbilstoši formulai, kas dota 4. paragrāfā

$$\boldsymbol{S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)d(x(t))=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt}$$

atvasinām funkciju x pēc argumenta t

$$x'=2(1-\cos t)$$

Arkas laukums ir

$$S = \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t)2(1 - \cos t)\,dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t)dt + 2\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\,dt =$$

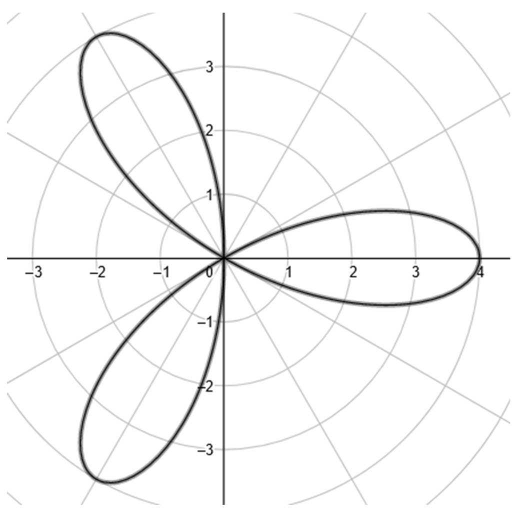
$$= (4t - 8\sin t + 2t + \sin 2t)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 8\pi + 4\pi = 12\pi \ \text{kv. vien.}$$

6. Aprēķināt polārās rozes vienas lapas laukumu $r = 4\cos 3\varphi$.

Atrisinājums

Dotajai polārajai rozei ir 3 lapas:



Zīmējums 7.6

Aprēķināsim tās lapas laukumu, kuras simetrijas ass ir polārā ass. Uz simetrijas pamata var aprēķināt pusi no lapas laukuma. Tā viens no stariem ir nulles stars. Nepieciešams aprēķināt otru staru, kas ierobežo lapu. Uz šī stara grafika punkta attālums līdz polam ir 0

$$0 = 4\cos 3\varphi;\ 3\varphi = \frac{\pi}{2};\ \ \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$$

Sastādīsim integrāli un, lai zinātu pilnu lapas laukumu, integrāli pareizināsim ar 2.

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (4\cos 3\varphi)^2 \, d\varphi =$$

$$= \frac{16}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\varphi) \, d\varphi = 8\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{4\pi}{3} \text{ kv. vien.}$$

7.9 Noteikto Integrāļu Pielietojumi: Rotācijas Ķermeņu Tilpums

DETALIZĒTS APRAKSTS:

Šī nodaļa iepazīstina ar rotācijas ķermeņu tilpuma aprēķiniem. Tiek aplūkoti dažādi piemēri, kur rotācijas ķermeņus veido elementāras pirmās un otrās kārtas līnijas. Ir aplūkots arī gadījums, kad rotācijas virsma tiek veidota ar parametriski dotas līnijas palīdzību. Tiek izskaidroti arī daži gadījumi, ja dots kombinēts rotācijas ķermenis. Tēmas saturs ir papildināts ar grafiku un virsmu konstrukcijām, kas veidotas ar programmas GeoGebra palīdzību.

MĒRĶIS: parādīt rotācijas ķermeņu tilpuma aprēķināšanas metodes.

Mācību rezultāts:

1. Studenti izprot noteikto integrāļu pielietošanu ģeometrisku jautājumu risināšanā.
2. Studenti prot konstruēt rotācijas ķermeņu zīmējumus un izprot šo virsmu formu.
3. Studenti prot aprēķināt vienkāršāko rotācijas ķermeņu tilpumu.

Priekšzināšanas: Integrēšanas un atvasināšanas pamatlikumi; Ņūtona – Leibnica formula; funkciju īpašības; funkciju grafiku konstruēšana; algebras un trigonometrijas formulas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Tilpums ir ļoti svarīgs jēdziens, ja runājam par kuģa kravas tilpņu kapacitāti, degvielas tvertņu vai balasta ūdeņu tvertņu ietilpību, smēreļļu un citām tilpnēm. Ir būtiski zināt nepieciešamā izejmateriāla daudzumu, lai izveidotu tilpnes ar noteiktu tilpumu. Kuģu inženiertehnisko izstrādājumu rūpniecībā svarīga loma ir konteineru, katlu, cisternu tilpumu un tam izmantojamo materiālu aprēķiniem.

Saturs

Noteikto Integrāļu Pielietojumi. Rotācijas Ķermeņu Tilpums

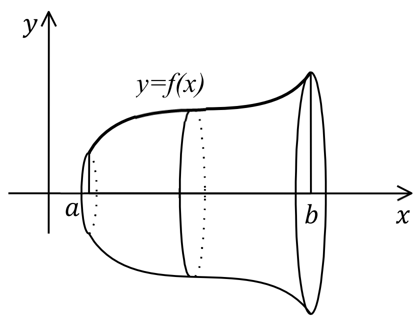
7.9.1 Rotācija ķermeņa tilpuma aprēķināšana, ja tas rotē ap x-asi

Atcerēsimies rotācijas ķermeņa definīciju.

Definīcija. *Rotācijas ķermeni* veido līkne, kura rotē ap taisni – rotācijas asi, kas atrodas tajā pašā plaknē, kur dotā līkne.

Dota intervālā $[a, b]$ nepārtraukta funkcija $y = f(x)$.

Aplūkosim figūru, kas ierobežota ar līkni $f(x)$, taisnēm $x = a$, $x = b$ un x- asi. Šī figūra, rotējot ap x-asi, veido rotācijas ķermeni (skat.zīm. 1.1).



Zīmējums 1.1

Šī ķermeņa tilpumu var aprēķināt pēc formulas:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

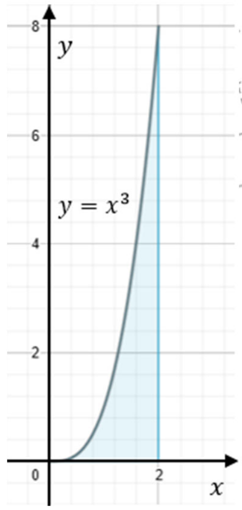
Piemērs 1.1

Atradīsim tāda ķermeņa tilpumu, ko veido figūra, kas ierobežota ar kubisko parabolu $y = x^3$ un x-asi starp $x = 0$ un $x = 2$ (skat.zīm. 1.2). Figūra rotē ap x-asi.

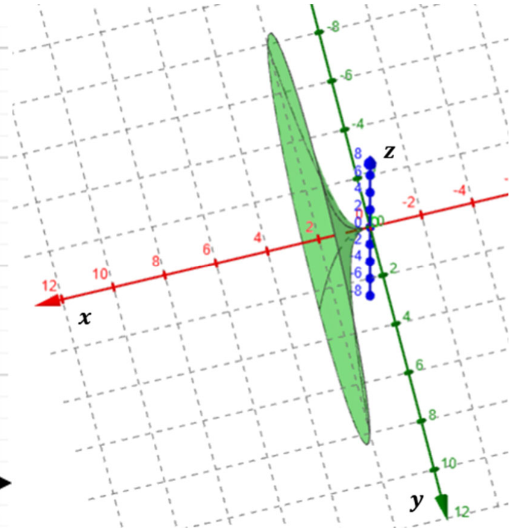
Atrisinājums

Rotācijas ķermeni var aplūkot zīmējumā 1.3.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Zīmējums 1.2



Zīmējums 1.3

Tilpums ir

$$V = \pi \int_0^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^2 x^6 dx = \pi \frac{x^7}{7}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2^7 \cdot \pi}{7} = \frac{128\pi}{7} \approx 57.45 \text{ kubiskās vienības}$$

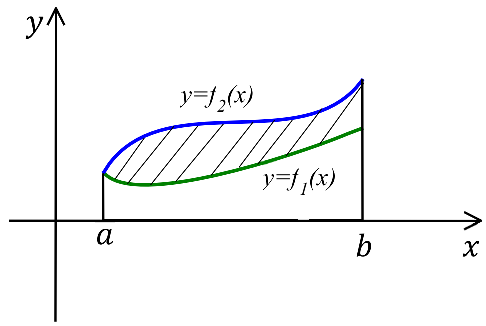
7.9.2 Divu līniju veidota rotācijas ķermeņa tilpums

Ir dotas divas nepārtrauktas un ne-negatīvas funkcijas $f_1(x)$ un $f_2(x)$ intervālā $[a,b]$ un šajā intervālā $f_1(x) \leq f_2(x)$ (skat.zīm. 2.1).

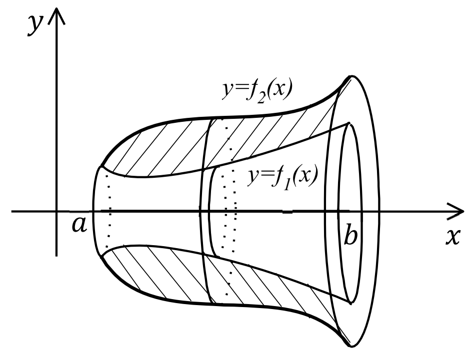
Ja **ap $\boldsymbol{x}$-asi rotē figūra**, kura ierobežota ar funkciju $y = f_2(x)$ un $y = f_1(x)$ grafikiem un vertikālām taisnēm $x = a$ un $x = b$, tad šī rotācijas ķermeņa tilpumu (skat.zīm. 2.2) aprēķina pēc formulas:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b \left[(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2\right] dx}$$

Ievērojot, ka $f_1(x) \leq f_2(x)$, līkne $y = f_2(x)$ ierobežo figūru no augšas (skat.zīm. 2.1), bet līkne $y = f_1(x)$ ierobežo to no apakšas.



Zīmējums 2.1



Zīmējums 2.2

Piemērs 2.1.

Atrast tāda rotācijas ķermeņa tilpumu, kuru veido figūra, kas ierobežota ar līkni $y = x^3$ un taisni $y = 4x$, rotējot ap x-asi.

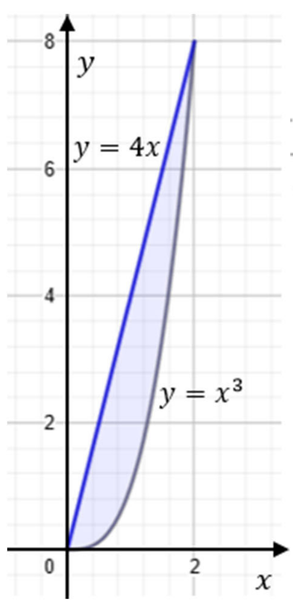
Atrisinājums

Konstruēsim atbilstošo figūru (skat.zīm. 2.3) un rotācijas ķermeni (skat.zīm. 2.4).

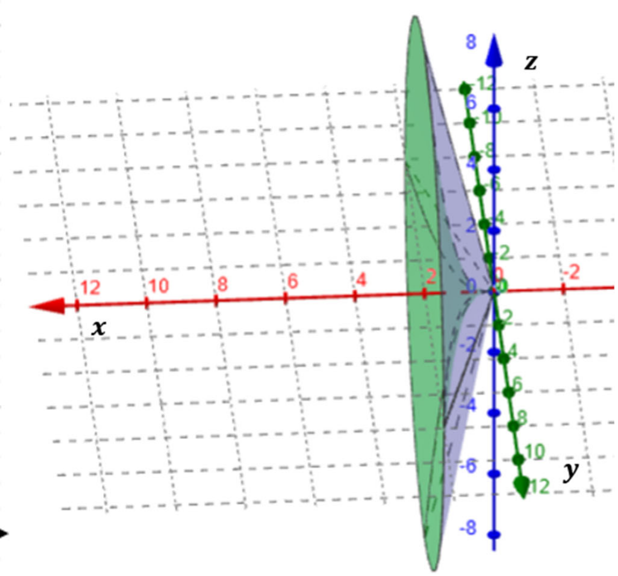
Abu līniju krustpunkti ir $(0,0)$ un $(2,8)$, tāpēc figūra definēta robežās no $x = 0$ līdz $x = 2$. Šajās robežās $x^3 < 4x$. Tas nozīmē, ka taisne $y = 4x$ ierobežo figūru no augšas, bet līkne $y = x^3$ no apakšas.

Lietosim formulu rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanai:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b \left[(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2\right] dx}$$



Zīmējums 2.3



Zīmējums 2.4

Dotajā gadījumā

$$V = \pi \int_0^2 [(4x)^2 - (x^3)^2]dx = \pi \int_0^2 [16x^2 - x^6]dx =$$

$$= \pi \left(\frac{16x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^2 =$$

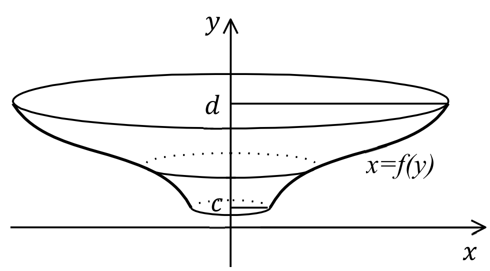
$$= \pi \left(\frac{128}{3} - \frac{128}{7} \right) = \frac{512\pi}{21} \approx 76.59 \text{ kub. vien.}$$

7.9.3 Rotācija ap y-asi

Figūra, ko ierobežo līkne $x = x(y)$, y-ass un taisnes $y = c$ un $y = d$, **rotē ap y-asi** (skat.zīm. 3.1). Rotācijas ķermeņa tilpumu var aprēķināt pēc formulas:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d \left(x(y)\right)^2 dy}$$

Te funkcija $x = x(y)$ ir nepārtraukta intervālā $[c, d]$.



Zīmējums 3.1

Gadījumā, ja figūru ierobežo taisnes $y = c$ un $y = d$ un no labās puses to ierobežo līkne $x = x_2(y)$, bet no kreisās puses līkne $x = x_1(y)$, un šī figūra **rotē ap y-asi**, tad šāda rotācijas ķermeņa tilpumu var aprēķināt pēc formulas

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d \left[\left(x_2(y)\right)^2 - \left(x_1(y)\right)^2\right] dy}$$

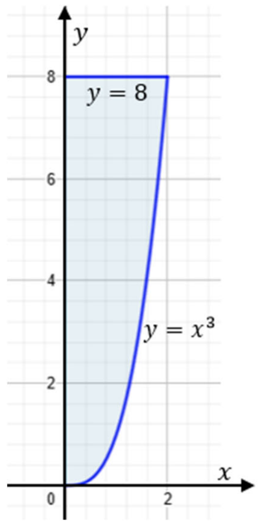
Funkcijas $x = x_1(y)$ un $x = x_2(y)$ ir nepārtrauktas intervālā $[c, d]$ un $x_1(y) \leq x_2(y)$ intervālā $y \in [c, d]$.

Piemērs 3.1

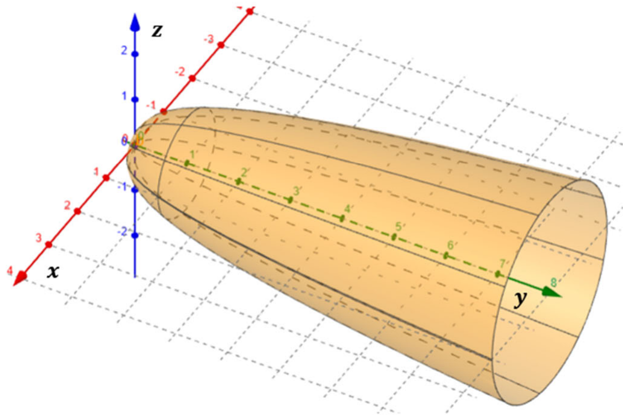
Aprēķināt tāda rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido ar līkni $y = x^3$ un taisni $y = 8$ ierobežota figūra, rotējot ap y-asi.

Atrisinājums

Figūras konstrukcija dota zīmējumā 3.2. Rotācijas ķermenis ir dots zīmējumā 3.3.



Zīmējums 3.2



Zīmējums 3.3

Lietosim formulu

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d \left(x(y)\right)^2 dy}$$

No vienādības $y = x^3$ izteiksim $x = \sqrt[3]{y}$.

Tad

$$V = \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy =$$

$$= \pi \left. \frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5} \right|_0^8 = \pi \frac{3\left(\sqrt[3]{8}\right)^5}{5} = \frac{96\pi}{5} \approx 60.32 \text{ kub. vien.}$$

Piemērs 3.2

Aplūkosim tās pašas funkcijas, kas dotas piemērā 1.1 (skat.zīm. 1.2). Figūra, kas ierobežota ar līnijām $y = x^3$ un $x = 2$, rotē ap y-asi (skat.zīm. 3.4). Aprēķināsim rotācijas ķermeņa tilpumu.

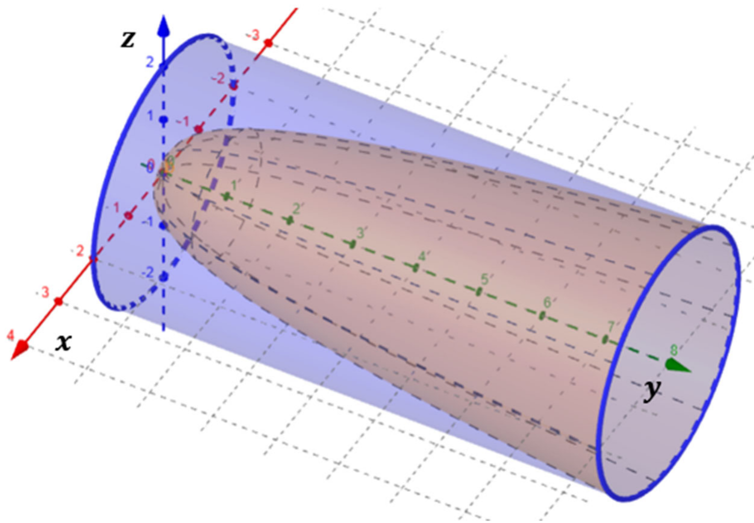
Atrisinājums

Rotācija figūra ir ierobežota ar taisni $x = 2$ no labās puses un ar līkni $y = x^3$ no kreisās, tāpēc lietosim formulu

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d \left[\left(x_2(y)\right)^2 - \left(x_1(y)\right)^2\right] dy}$$

Lai atrastu integrāļa robežas, aprēķināsim funkcijas $y = x^3$ vērību pie argumenta $x = 2$:

$$y(2) = 8$$



Zīmējums 3.4

No vienādības $y = x^3$ izteiksim $x = \sqrt[3]{y}$.

Tad

$$V = \pi \int_0^8 \left[(2)^2 - \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right] dy = \pi \int_0^8 \left[4 - y^{\frac{2}{3}}\right] dy =$$

$$= \pi \left(4y - \frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5}\right)\Bigg|_0^8 = \pi \left(32 - \frac{3\left(\sqrt[3]{8}\right)^5}{5}\right) =$$

$$= \pi \left(32 - \frac{96}{5}\right) = \frac{64\pi}{5} \approx 40.2 \text{ kub. vien.}$$

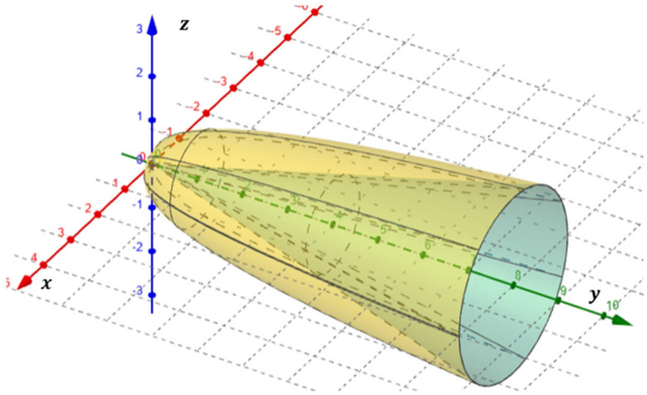
Piemērs 3.3

Aplūkosim figūru, kas dota piemērā 2.1 (skat.zīm. 2.3), bet te figūra rotē ap y-asi. Figūras laukums ir ierobežots ar līnijām $y = x^3$ un $y = 4x$. Lietosim to pašu tilpuma aprēķināšanas formulu, ko iepriekšējā piemērā, lai aprēķinātu rotācijas ķermeņa tilpumu, kas rodas, figūrai rotējot ap y-asi (skat.zīm. 3.5). Apgabals ir ierobežots ar funkciju grafikiem $x = y/4$ un $x = \sqrt[3]{y}$. Mainīgais y pieder intervālam $[0,8]$. Tilpums ir

$$V = \pi \int_0^8 \left[\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2\right] dy =$$

$$= \pi \int_0^8 \left[y^{\frac{2}{3}} - \frac{y^2}{16} \right] dy = \pi \left(\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{y^3}{16 \cdot 3} \right) \Bigg|_0^8 =$$

$$= \pi \left(\frac{3\left(\sqrt[3]{8}\right)^5}{5} - \frac{8^3}{48} \right) = \pi \left(\frac{96}{5} - \frac{32}{3} \right) = \frac{128\pi}{15} \approx 26{,}8 \ \text{kub. vien.}$$



Zīmējums 3.5

7.9.4 Parametriski dotas līnijas rotācija

Plaknes figūra ir ierobežota ar parametriski dotu līniju

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

un taisnēm $\boldsymbol{x = a}$, $\boldsymbol{x = b}$, $\boldsymbol{y = 0}$.

(i) Ja parametra t vērtības pieder intervālam $[t_1, t_2]$ atbilstoši mainīgā x vērtībām, kad $\boldsymbol{x} \in [a, b]$, tad tāda rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido dotā figūra, rotējot ap $\boldsymbol{x}$-asi, aprēķina pēc formulas:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \left(y(t)\right)^2 x'(t) dt}$$

(i) Gadījumā, ja figūru ierobežo parametriski dota līkne

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \end{cases}$$

un taisnes $\boldsymbol{y = c}$, $\boldsymbol{y = d}$, $\boldsymbol{x = 0}$, un tā rotē ap $\boldsymbol{y}$-asi, tad rotācijas ķermeņa tilpumu aprēķina pēc formulas:

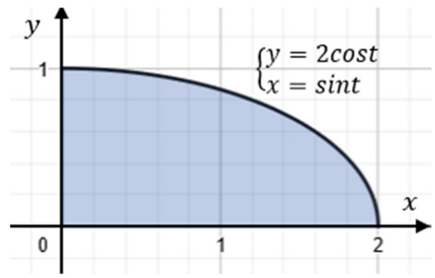
$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \left(x(t)\right)^2 y'(t)dt$$

Piemērs 4.1

Aprēķināt tāda rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido elipses

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

ceturtā daļa pirmajā kvadrantā (skat.zīm. 4.1), rotējot a) ap x-asi; b) ap y-asi.

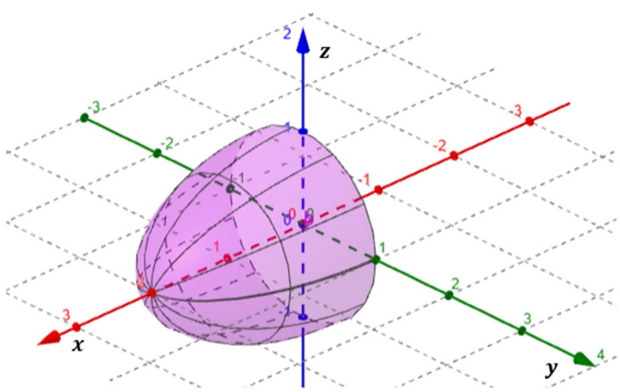


Zīmējums 4.1

Atrisinājums

Gadījums a)

Figūra rotē ap x-asi (skat.zīm. 4.2):



Zīmējums 4.2

Aprēķināsim tās parametra t vērtības, kas atbilst figūras projekcijas uz x-ass intervāla galapunktiem, tas ir, $x = 0$ un $x = 2$:

Ja $x = 0$, tad $\cos t = 0$ un $t = \pi/2$.

Ja $x = 2$, tad $2\cos t = 2$ un $t = 0$.

Lietosim formulu tāda rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanai, ko veido figūra, rotējot ap x-asi:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \left(y(t)\right)^2 x'(t)dt$$

Atvasināsim funkciju $x = 2\cos t$ pēc argumenta t

$$x' = (2\text{cos}t)' = -2\text{sin}t$$

Ķermeņa tilpums ir

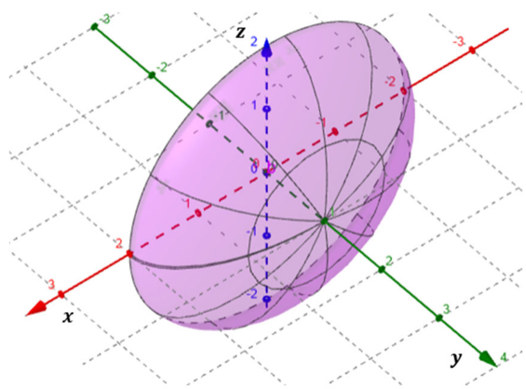
$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\text{sin}t)^2(-2\text{sin}t)dt = -2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \text{sin}^3 t dt = 2\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{sin}^2 t \cdot \text{sin}t dt =$$

$$= -2\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = -2\pi \left(\text{cos}t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -2\pi \left(\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\cos^3 \frac{\pi}{2}}{3} \right) + 2\pi \left(\cos 0 - \frac{\cos^3 0}{3} \right) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} \text{ kub. vien.}$$

Gadījums b)

Figūra rotē ap y-asi (skat.zīm. 4.3)



Zīmējums 4.3

Aprēķināsim tās parametra t vērtības, kas atbilst $y = 0$ un $y = 1$.

Ja $y = 0$, tad $\text{sin}t = 0$ un $t = 0$.

Ja $y = 3$, tad $\text{sin}t = 1$ un $t = \pi/2$.

Lietosim formulu rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanai, ja dotā figūra rotē ap y-asi:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \left(x(t)\right)^2 y'(t) dt}$$

Atvasināsim $y' = (\text{sin}t)' = \text{cos}t$.

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t)^2(\cos t)dt=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot\cos t\,dt=$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)d(\sin t)=4\pi\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=4\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{8\pi}{3}\quad \text{kub. vien.}$$

7.9.5 Vingrinājumi

1. Aprēķināt tāda rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido ap x-asi rotējoša figūra, kas ierobežota ar parabolu $y=x^2+1$ un taisnēm $y=-1, x=1, y=0$.

2. Plaknes apgabals, ko ierobežo divas sinusoīdas $y=3\sin x$ un $y=\sin x$ starp taisnēm $x=1$ un $x=\pi$, rotē ap x-asi. Aprēķināt tā veidotā rotācijas ķermeņa tilpumu!

3. Figūra, ko ierobežo hiperbola $xy=4$ un taisnes $y=1$, $y=4$, and $x=0$, veido rotācijas ķermeni, rotējot ap y-asi. Aprēķināt šī ķermeņa tilpumu!

4. Aprēķināt tāda rotācijas ķermeņa tilpumu, kas iegūts figūrai rotējot ap y-asi, ja figūru ierobežo līnijas $y=\ln x$, $y=0$ un $x=e$.

5. Plaknes figūru ierobežo $y=\mathrm{x}^2$ un taisnes $x+y=2$ un $y=0$. Aprēķināt rotācijas ķermeņa tilpumu, ja figūra rotē a) ap x-asi; b) ap y-asi.

6. Aprēķināt rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido astroīdas $x=\cos^3 t$ un $y=2\sin^3 t$ daļa intervālā $t\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, rotējot ap y-asi.

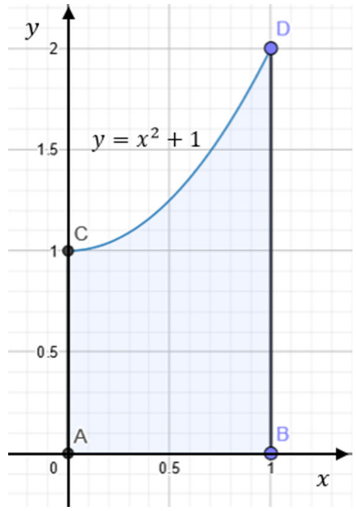
7. Aprēķināt rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido parametriski dota līnija $x=2\mathrm{tg}t$ un $y=2\cos^2 t$ un taisnes $x=-2$, $x=2$, $y=0$, rotējot ap x-asi.

7.9.6 Atrisinājumi

1. Aprēķināt tāda rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido ap x-asi rotējoša figūra, kas ierobežota ar parabolu $y=x^2+1$ un taisnēm $y=-1, x=1, y=0$.

Atrisinājums

Plaknes apgabals ir ierobežots ar līkni un taisnēm (skat.zīm. 6.1)



Zīmējums 6.1

Ievērojot, ka dotais plaknes apgabals jeb figūra (skat.zīm. 6.2) rotē ap x-asi, lietosim rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanas formulu:

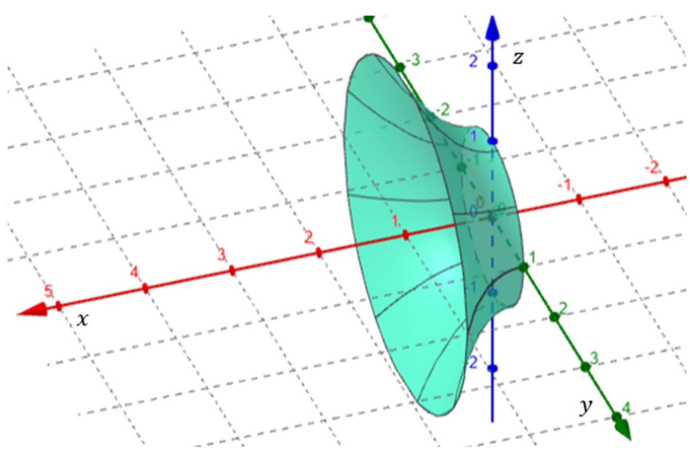
$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx}$$

Tad

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2+1)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \pi \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{56\pi}{15} \approx 11.73 \quad \text{kub. vien.}$$

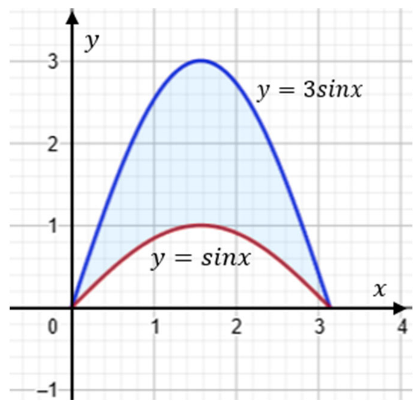


Zīmējums 6.2

2. Plaknes apgabals, ko ierobežo divas sinusoīdas $y = 3\sin x$ un $y = \sin x$ starp taisnēm $x = 1$ un $x = \pi$, rotē ap x-asi. Aprēķināt tā veidotā rotācijas ķermeņa tilpumu!

Atrisinājums

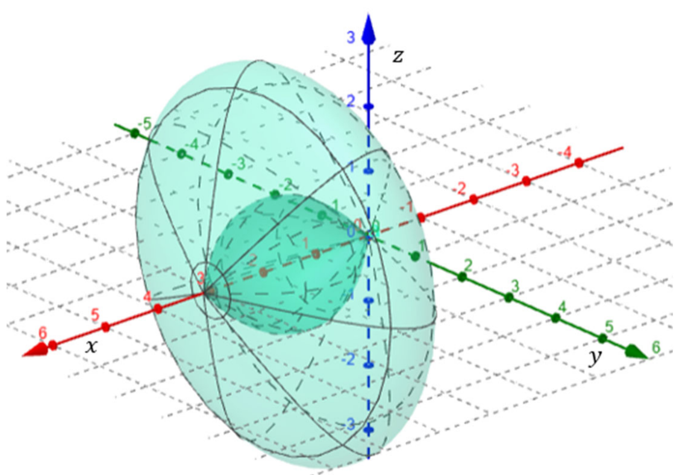
Konstruēsim doto plaknes apgabalu (skat.zīm. 6.3):



Zīmējums 6.3

Plaknes apgabals augšpusē ir ierobežots ar līkni $y = 3\sin x$, bet apakšā ar līkni $y = \sin x$ robežās no $x = 1$ līdz $x = \pi$. Tāpēc, aprēķinot rotācijas ķermeņa tilpumu, kas rodas šai figūrai rotējot ap x-asi (skat.zīm. 6.4), lieto formulu:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b [(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2] dx}$$



Zīmējums 6.4

$$V = \pi \int_0^{\pi} [(3\sin x)^2 - (\sin x)^2] dx = \pi \int_0^{\pi} [9\sin^2 x - \sin^2 x] dx =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} 8\sin^2 x dx = 8\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx =$$

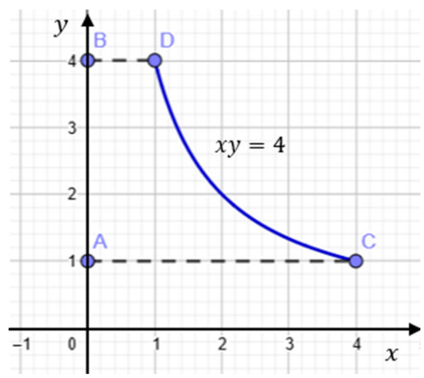
$$= 4\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = 4\pi \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 4\pi \left[\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) \right] = 4\pi^2 \approx 39.48 \text{ kub. vien.}$$

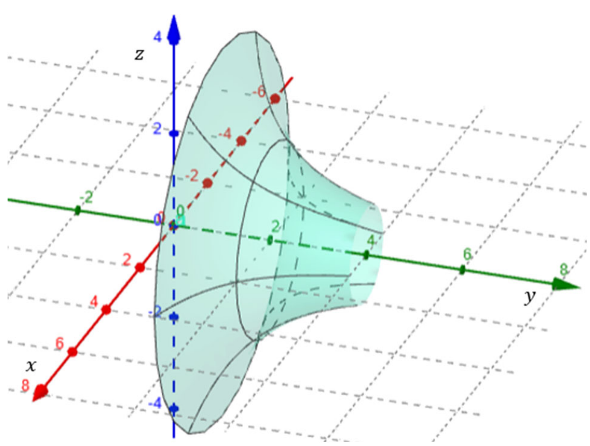
3. Figūra, ko ierobežo hiperbola $xy = 4$ un taisnes $y = 1$, $y = 4$, and $x = 0$, veido rotācijas ķermeni, rotējot ap y-asi. Aprēķināt šī ķermeņa tilpumu!

Atrisinājums

Dotā figūra ir parādīta zīmējumā 6.5.



Zīmējums 6.5



Zīmējums 6.6

Figūra, kura rotē ap y-asi, no labās puses ir ierobežota ar līkni $y = 4/x$ un no kreisās puses ar y-asi starp $y = 1$ un $y = 4$. Tāpēc, lai aprēķinātu rotācijas ķermeņa tilpumu (skat.zīm. 6.6), lietosim formulu:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d (x(y))^2 dy}$$

Atrisinājums ir

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{y}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{16}{y^2} dx =$$

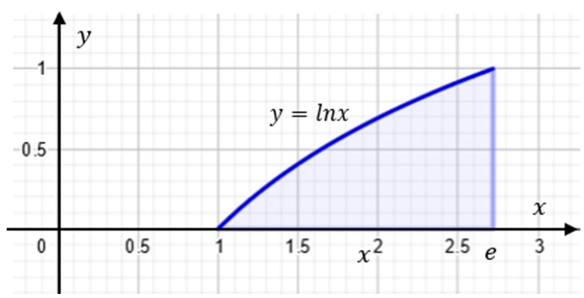
$$= 16\pi \int_1^4 y^{-2} dx = 16\pi \frac{y^{-1}}{-1}\bigg|_1^4 =$$

$$= -16\pi \frac{1}{y}\bigg|_1^4 = -16\pi \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 12\pi \text{ kub. vien.}$$

4. Aprēķināt tāda rotācijas ķermeņa tilpumu, kas iegūts figūrai rotējot ap y-asi, ja figūru ierobežo līnijas $y = \ln x$, $y = 0$ un $x = e$.

Atrisinājums

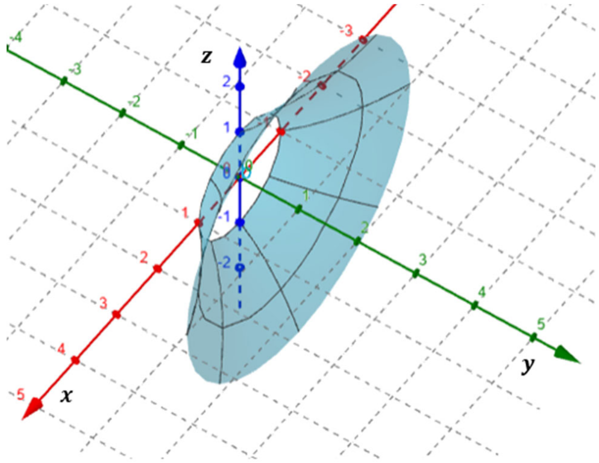
Konstruēsim figūru:



Zīmējums 6.7

Attiecībā pret y-asi, augšējā līnija ir $x = \mathrm{e}$, bet apakšējā līkne ir $y = \ln x$. Rotējot ap y-asi, figūra veido zīmējumā 6.8 redzamo virsmu. Atbilstošā ķermeņa tilpuma aprēķināšanai lietosim formulu:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d \left[\left(x_2(y)\right)^2 - \left(x_1(y)\right)^2\right] dy}$$



Zīmējums 6.8

Lai sastādītu integrāli, izteiksim funkciju x pēc argumenta y, tas ir, $x = e^y$.

$$V = \pi \int_0^1 [\mathrm{e}^2 - (e^y)^2]dy = \pi \int_0^1 [\mathrm{e}^2 - e^{2y}]dy =$$

$$= \pi \left(\mathrm{e}^2 \mathrm{y} - \frac{1}{2}e^{2y}\right)\Bigg|_0^1 =$$

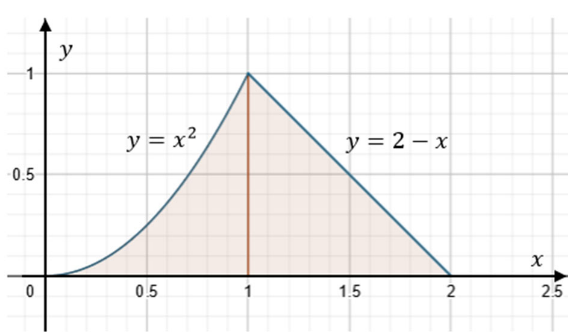
$$= \pi\left(\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}e^2 - \left(0 - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(e^2 + 1) \approx 13.18 \quad \text{kub. vien.}$$

5. Plaknes figūru ierobežo $y = \mathrm{x}^2$ un taisnes $x + y = 2$ un $y = 0$. Aprēķināt rotācijas ķermeņa tilpumu, ja figūra rotē a) ap x-asi; b) ap y-asi.

Atrisinājums

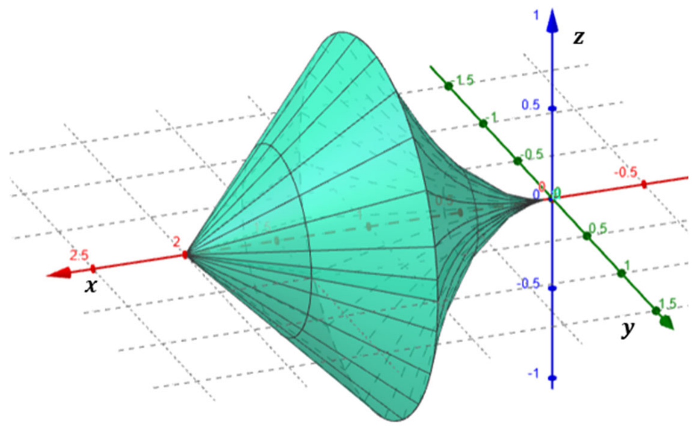
Dotā figūra ir parādīta zīmējumā 6.9.



Zīmējums 6.9

Gadījums a)

Figūra rotē ap x-asi (skat.zīm. 6.10).



Zīmējums 6.10

Šajā gadījumā rotācijas ķermeņa tilpumu var aprēķināt kā divu atsevišķu daļu tilpuma summu V_1 un V_2

$$V = V_1 + V_2,$$

kur V_1 ir tāda ķermeņa tilpums, ko veido parabla $y = x^2$ rotējot ap x-asi intervālā $0 \leq x \leq 1$, un V_2 is ķermeņa tilpums, ko veido taisne $x + y = 2$ rotējot ap x-asi intervālā $1 \leq x \leq 2$.

Tāpēc

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_0^1 (x^2)^2\,dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2\,dx =$$

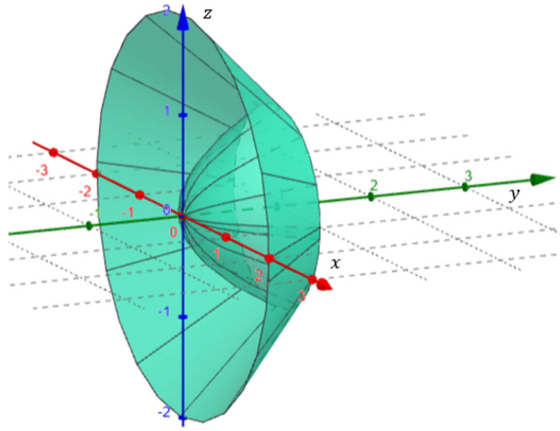
$$= \pi \int_0^1 x^4\,dx + \pi \int_1^2 (4 - 4x + x^2)\,dx =$$

$$= \pi \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 + \pi \left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{5} + \pi\left(8 - 8 + \frac{8}{3}\right) - \pi\left(4 - 2 + \frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{8\pi}{15} \approx 1.68 \ \text{kub. vien.}$$

Gadījums b)

Figūra rotē ap y-asi (skat.zīm. 6.11).



Zīmējums 6.11

Figūras robežas ir no $y = 0$ līdz $y = 1$ un tā ir ierobežota ar taisni $x + y = 2$ no labās puses (skat.zīm. 6.9). No kreisās puses figūra robežojas ar parabolu $y = x^2$. Pagriežot zīmējumu ar x-asi uz augšu, figūras augšējā līnija ir taisne, bet apakšējā līnija ir parabola. Izteiksim abas funkcijas pēc argumenta y:

$$\text{no } x + y = 2 \quad \text{seko} \quad x = 2 - y,$$

$$\text{no } y = x^2 \quad \text{seko} \quad x = \sqrt{y}.$$

Tad

$$V = \pi \int_c^d \left[\left(x_2(y)\right)^2 - \left(x_1(y)\right)^2 \right] dy =$$

$$= \pi \int_0^1 \left[(2-y)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 \right] dy = \pi \int_0^1 [4 - 4y + y^2 - y] dy =$$

$$= \pi \int_0^1 [4 - 5y + y^2] dy = \pi \left(4y - \frac{5y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 =$$

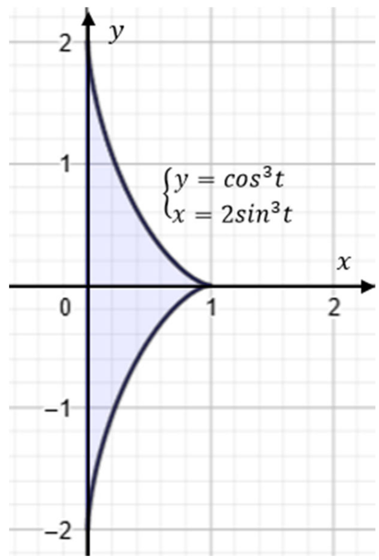
$$= \pi \left(4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11\pi}{6} \approx 5.76 \text{ kub. vien.}$$

6. Aprēķināt rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido astroīdas $x = \cos^3 t$ un $y = 2\sin^3 t$ daļa intervālā $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, rotējot ap y-asi.

Atrisinājums

Plaknes figūra ir konstruēta zīmējumā 6.12. Pielietosim sekojošo formulu, lai aprēķinātu rotācijas ķermeņa tilpumu (skat.zīm. 6.13)

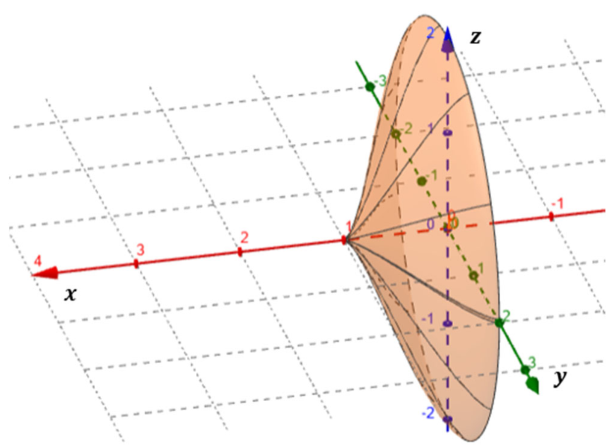
$$\boldsymbol{V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \left(x(t)\right)^2 y'(t)dt}$$



Zīmējums 6.12

Lai aprēķinātu šī ķermeņa tilpumu, ir nepieciešams atvasināt funkciju y pēc argumenta t

$$y' = (2\sin^3 t)' = 6\sin^2 t\cos t$$



Zīmējums 6.13

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t)^2 (6\sin^2 t\cos t)dt = 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \sin^2 t \cdot \cos t dt =$$

$$= 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^3 \sin^2 t \cdot d(\sin t) =$$

$$= 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t) \cdot \sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= 6\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - 3\sin^4 t + 3\sin^6 t - \sin^8 t) d(\sin t) =$$

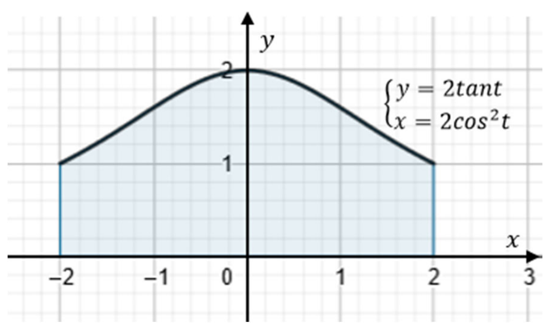
$$= 6\pi \left(\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{3\sin^5 t}{5} + \frac{3\sin^7 t}{7} - \frac{\sin^9 t}{9} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 6\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) - 0 = \frac{32\pi}{105} \approx 0.96 \ \text{kub. vien.}$$

7. Aprēķināt rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido parametriski dota līnija $x = 2\text{tg}t$ un $y = 2\cos^2 t$ un taisnes $x = -2,\ x = 2,\ y = 0,$ rotējot ap x-asi.

Atrisinājums

Figūras konstrukcija dota zīmējumā 6.14. Atbilstošais rotācijas ķermenis ir apskatāms zīmējumā 6.15.



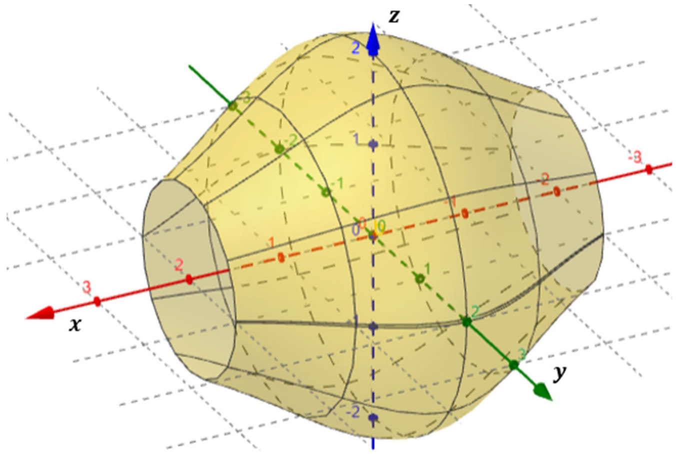
Zīmējums 6.14

Dotā figūra ir simetriska attiecībā pret y-asi, tāpēc var sastādīt integrāli V_1 pusei no ķermeņa tilpuma intervālā $0 \leq x \leq 2$ un to reizināt ar 2, lai noteiktu pilnu ķermeņa tilpumu:

$$V = 2 \cdot V_1$$

Lietosim formulu

$$\boldsymbol{V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \left(y(t)\right)^2 x'(t) dt}$$



Zīmējums 6.15

Aprēķināsim parametra t vērtības, kuras atbilst figūras projekcijai uz x-asi, tas ir, pie $x = 0$ un $x = 2$ atbilstoši:

Ja $x = 0$, tad $2\text{tg}t = 0$ un $t = 0$.

Ja $x = 2$, tad $\text{tg}t = 1$ un $t = \pi/4$.

Atvasināsim

$$x'(t) = (2\text{tg}t)' = \frac{2}{\cos^2 t}$$

Tad

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 t)^2 \cdot \frac{2}{\cos^2 t} dt = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$

$$= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \, dt = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt =$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 4\pi \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 4\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \pi^2 - 2\pi \approx 3.59 \text{ kub. vien.}$$

7.10 Noteiktā Integrāļa Pielietojumi: Rotācijas Ķermeņa Virsmas Laukums

DETALIZĒTS APRAKSTS:

Noteiktos integrāļus var lietot, lai aprēķinātu rotācijas ķermeņa virsmas laukumu. Nodaļā tiek aplūkota speciāla formula šādu virsmas laukumu aprēķināšanai, ja virsmu veido plaknes līnija, rotējot ap x-asi vai ap y-asi. Formulu var pārveidot arī gadījumam, ja plaknes līnija dota ar parametriskajiem vienādojumiem. Dotie piemēri ir papildināti ar grafiku zīmējumiem, kas konstruēti ar programmas GeeoGebra palīdzību. Nodaļas beigās ir doti vingrinājumi studentu patstāvīgajam darbam.

MĒRĶIS: parādīt, kā aprēķināt rotācijas ķermeņu virsmas laukumu, ja tie veidoti ar līnijām, kas dotas Dekarta koordinātu sistēmā.

Mācību rezultāts:

1. Studenti izprot noteikto integrāļu pielietošanu ģeometrisku jautājumu risināšanā.
2. Studenti prot konstruēt rotācijas ķermeņu zīmējumus un izprot šo virsmu formu.
3. Studenti prot aprēķināt vienkāršāko rotācijas ķermeņu virsmas laukumu.

Priekšzināšanas: Integrēšanas un atvasināšanas pamatlikumi; Ņūtona – Leibnica formula; funkciju īpašības; funkciju grafiku konstruēšana; algebras un trigonometrijas formulas.

Sakars ar jūrniecības problēmām: Ķermeņu virsmas laukuma aprēķināšanai ir būtiska loma, izstrādājot dažādu mehānisko iekārtu detaļu dizainu. Piemēram, lai palielinātu centrbēdzes sūkņa darbības efektivitāti, ir lietderīgi aprēķināt virsmas laukumu rotācijas spārniem, kuri ir svarīga sūkņa sastāvdaļa. Tā piemēram, satelīta šķīvim ir rotācijas virsmas forma. Tā virsmas laukuma lielumu ir nepieciešams aprēķināt, lai noteiktu vielas daudzumu, ar ko jāpārklāj šķīvis.

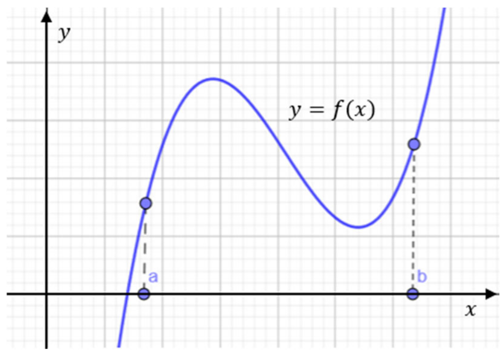
Saturs

Rotācijas ķermeņa virsmas laukums

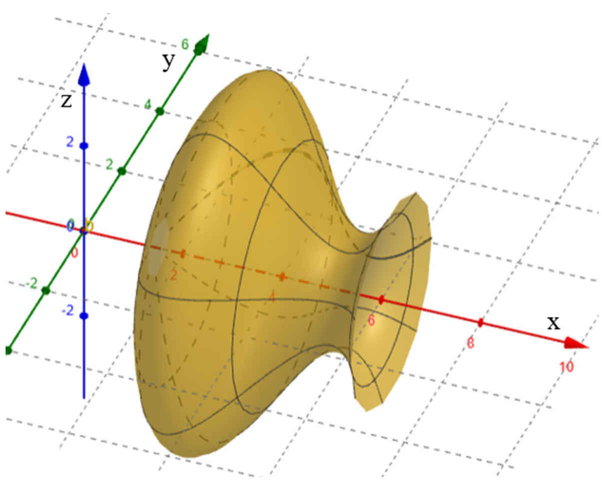
7.10.1 Rotācijas ķermeņa virsmas laukuma aprēķināšanas formula

Dekarta koordinātu sistēmā ir dota funkcija $y = f(x)$ (skat.zīm. 1.1). Funkcijas loks, rotējot ap x-asi intervālā $[a, b]$, veido rotācijas virsmu (skat.zīm. 1.2). Rotācijas virsmas laukumu var aprēķināt pēc formulas

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



Zīmējums 1.1



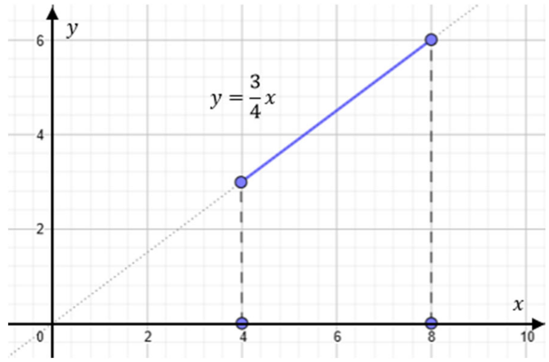
Zīmējums 1.2

Piemērs 1.1 Taisnes $3x + 4y = 0$ nogrieznis, rotējot ap x-asi intervālā $[4,8]$, veido nošķeltu konusu. Aprēķināt šī konusa sānu virsmas laukumu!

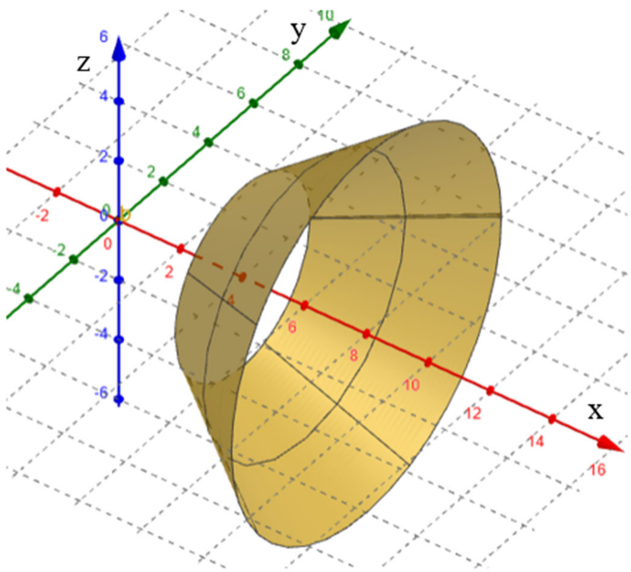
Atrisinājums

Konstruēsim funkcijas grafiku (skat.zīm. 1.3) un konusu (skat.zīm. 1.4).

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Zīmējums 1.3



Zīmējums 1.4

Lai pielietotu virsmas laukuma aprēķināšanas formulu, nepieciešams atvasināt doto funkciju

$$y' = (\frac{3}{4}x)' = \frac{3}{4}$$

Aprēķināsim konusa sānu virsmas laukumu

$$S = 2\pi \int_4^8 \frac{3}{4}x\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx = \frac{3}{2}\pi\int_4^8 x\sqrt{\frac{25}{16}}dx =$$

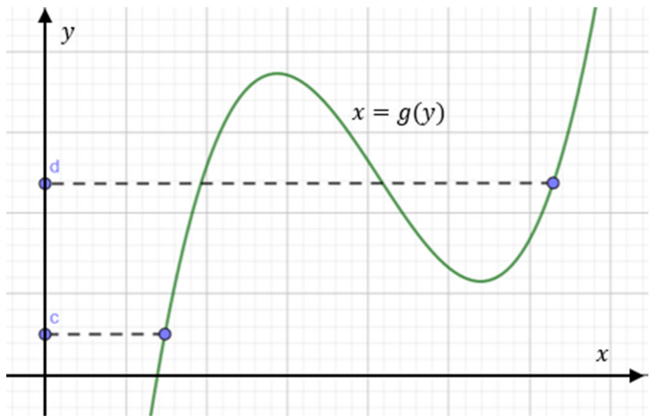
$$= \frac{15}{8}\pi\int_4^8 x\,dx = \frac{15}{8}\pi\frac{x^2}{2}\Big|_4^8 = \frac{15}{16}\pi(64-16) = 5\pi \text{ kvadrāt vienības}$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

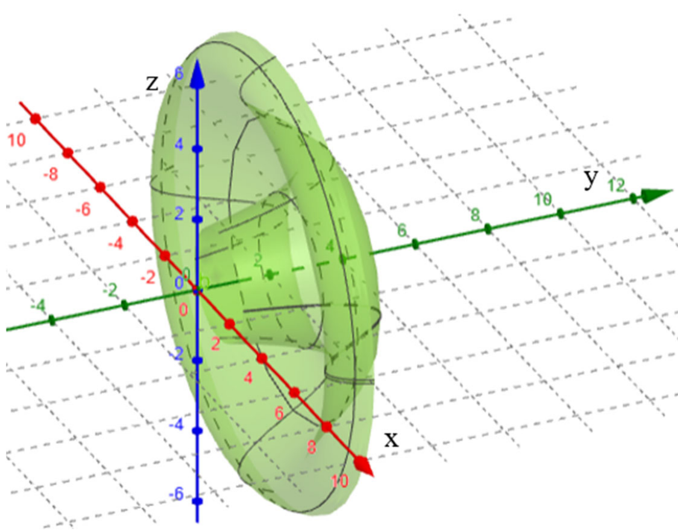
7.10.2 Rotācija ap y-asi

Ja funkcijas $y = f(x)$ loks rotē ap y-asi (skat.zīm. 2.1), ir jāapskata inversā funkcija pēc argumenta y, tas ir, funkcija $x = g(y)$. Noteiksim loka projekcijas intervālu $[c, d]$ uz y-asi (skat.zīm. 2.1). Tad atbilstošā rotācijas virsmas laukuma (skat.zīm. 2.2) formula ir

$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_{c}^{d} g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy}$$



Zīmējums 2.1



Zīmējums 2.2

Piemērs 2.1

Atrast rotācijas virsmas laukumu, ko veido līkne $y = x^2$ intervālā $[0, 2]$, rotējot ap y–asi.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

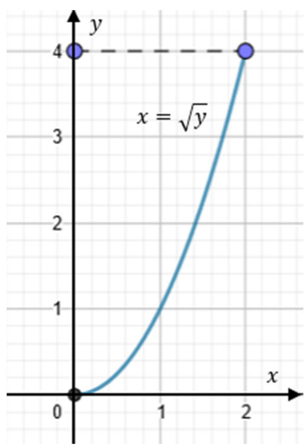
Atrisinājums

Līnijas loks un atbilstošā virsma ir konstruēti zīmējumos 2.3 un 2.4. Pārveidosim līnijas vienādojumu, izsakot to kā funkciju pēc argumenta y

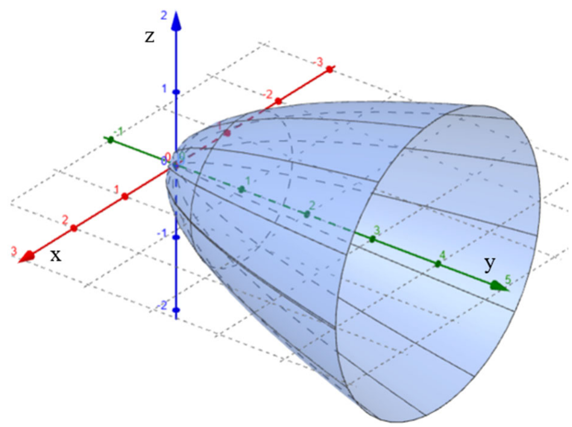
$$x = g(y) = \sqrt{y}$$

Šīs funkcijas atvasinājums pēc argumenta y ir

$$x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$



Zīmējums 2.3



Zīmējums 2.4

Noteiksim loka projekciju uz y-asi – tas ir intervāls [0, 4]. Tad integrālis virsmas laukuma aprēķināšanai ir

$$S = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy =$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \cdot \frac{\sqrt{4y+1}}{2\sqrt{y}}\, dy = \pi \int_0^4 \sqrt{4y+1}\, dy =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^4 \sqrt{4y+1}\, d(4y+1) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{(4y+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{17}^3 - 1\right) \approx 36.18 \text{ kv. vien.}$$

7.10.3 Rotācijas virsmas laukuma aprēķināšana, ja to veido parametriski dota līnija

Virsmas laukuma aprēķināšanas formula, ja to veidojošā līnija $f(x)$ dota Dekarta koordinātu sistēmā, ir

$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Atcerēsimies līnijas loka garuma aprēķināšanas formulu, ja loks ir aprakstīts ar funkciju $y = f(x)$ intervālā $[a, b]$

$$\boldsymbol{L = \int_a^b ds}$$

Izvēršot loka diferenciāli ds, iegūstam formulu

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Loka diferenciāli var izmantot arī, lai rotācijas virsmas laukuma formulu pierakstītu īsākā veidā

$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_a^b f(x) ds}$$

Apskatīsim līkni, kas ir definēta ar parametriskajiem vienādojumiem

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Šajā gadījumā loka diferenciāli aprēķinat sekojošā veidā

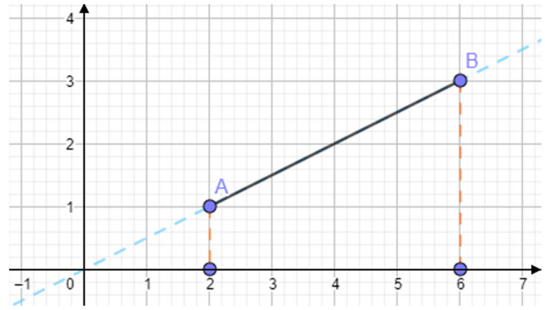
$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

Ievērojot, ka parametrs t pieder intervālam $t \in [\alpha, \beta]$, virsmas laukuma aprēķināšanas formula, ja līkne rotē ap x-asi, ir

$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\, ds = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt}$$

Piemērs 3.1

Taisnes $y = \frac{x}{2}$ segments dots intervālā $[2, 6]$ (skat.zīm. 3.1). Segments rotē ap x-asi. Tas veido nošķelta konusa sānu virsmu. Aprēķināt pilnu konusa virsmas laukumu!



Zīmējums 3.1

Atrisinājums

Lai aprēķinātu nošķeltā konusa (skat.zīm. 3.2) pilnas virsmas laukumu, ir jāaprēķina gan tā sānu virsmas laukums, gan arī augšējā un apakšējā pamatu laukumi. Konusa pamati ir riņķi ar rādiusu $r = 1$ un $R = 3$. To laukumu var aprēķināt, lietojot riņķa laukuma formulu. Sānu virsmu aprēķināsim ar integrāļa palīdzību.

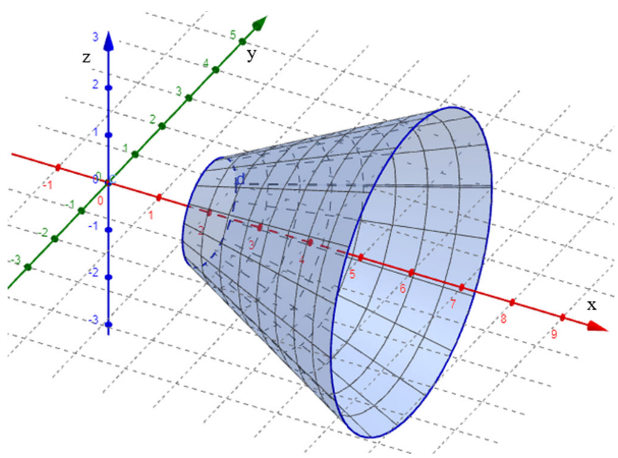
Pārveidosim doto funkciju $y = \frac{x}{2}$ parametriskā formā

$$\begin{cases} x = t \\ y = t/2 \end{cases}; \quad 2 \le t \le 6$$

Atvasināsim abus parametriskos vienādojumus un izveidosim konusa sānu virsmas aprēķināšanas formulu (skat.zīm. 3.2)

$$\dot{x} = 1; \quad \dot{y} = \frac{1}{2}$$

$$S = 2\pi \int_2^6 \frac{t}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dt$$



Zīmējums 3.2

Rotācijas virsmas laukums ir

$$S = 2\pi \int_2^6 \frac{t}{2} \sqrt{\frac{5}{4}} dt = \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \int_2^6 t dt \; =$$

$$= \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_2^6 = \frac{\sqrt{5}\pi}{4}(36-4) = 8\sqrt{5}\pi \text{ kv. vien.}$$

Konusa pilnas virsmas laukums ir

$$S_T = S + \pi r^2 + \pi R^2 = 8\sqrt{5}\pi + 10\pi \approx 87.61 \text{ kv. vien.}$$

7.10.4 Vingrinājumi

1. Aprēķināt tādas virsmas laukumu, ko veido riņķis $x^2 + y^2 = 4$, rotējot ap x-asi.
2. Aprēķināt virsmas laukumu, ko veido līnijas $y = e^{-x}$ loks intervālā $[0, 3]$, rotējot ap x-asi.
3. Aprēķināt virsmas laukumu, ko veido līnijas $y = \arccos x$ loks intervālā $[-1, 1]$, rotējot ap y-asi.
4. Cikloīdas arka rotē ap x-asi. Aprēķināt rotācijas virsmas laukumu, ja cikloīdas parametriskie vienādojumi ir

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

5. Aprēķināt astroīdas loka veidotās rotācijas virsmas laukumu, ja tā rotē ap y-asi

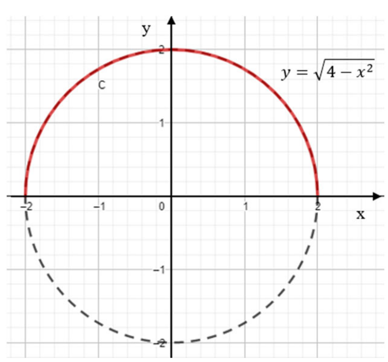
$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$$

7.10.5 Atrisinājumi

1. Aprēķināt tādas virsmas laukumu, ko veido riņķis $x^2 + y^2 = 4$, rotējot ap x-asi.

Atrisinājums

Konstruēsim riņķa līniju.



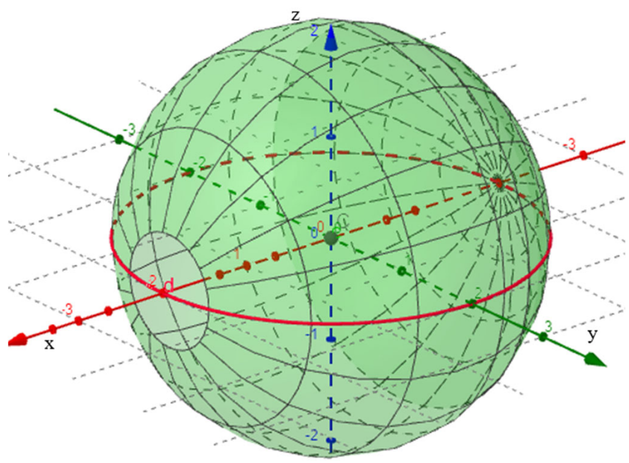
Zīmējums 5.1

Izvēlēsimies riņķa līnijas augšējo pusi $-2 \leq x \leq 2$ (skat.zīm. 5.1). Šo loku var aprakstīt ar funkciju $y = \sqrt{4 - x^2}$. Loks, rotējot ap x-asi, veido virsmu, kas ir sfēra (skat.zīm. 5.2).

Atvasināsim funkciju un vienkāršosim izteiksmi $1 + y'^2$.

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{4}{4 - x^2}$$



Zīmējums 5.2

Lai aprēķinātu sfēras virsmas laukumu, lietosim formulu

$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Dotās funkcijas integrāli aprēķinām

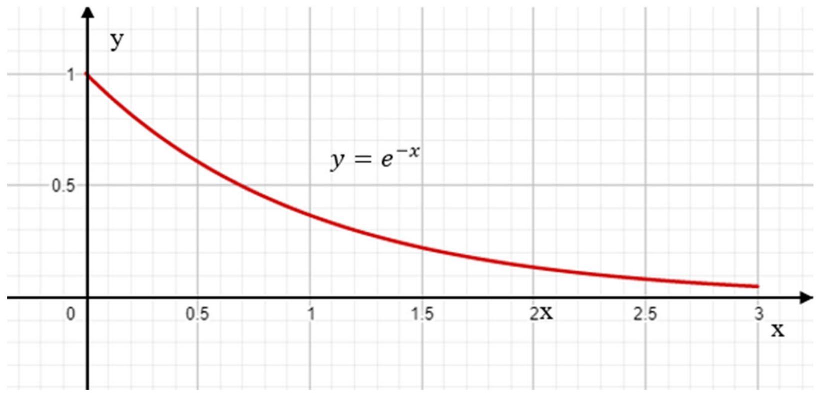
$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}} dx =$$

$$= 4\pi \int_{-2}^{2} dx = 4\pi x \Big|_{-2}^{2} = 16\pi \text{ kv. vien.}$$

2. Aprēķināt virsmas laukumu, ko veido līnijas $y = e^{-x}$ loks intervālā $[0, 3]$, rotējot ap x-asi.

Atrisinājums

Konstruēsim dotās funkcijas grafiku (skat.zīm. 5.3).



Zīmējums 5.3

Funkcijas $y = e^{-x}$ atvasinājums ir

$$y' = (e^{-x})' = -e^{-x}$$

Sastādīsim integrāli virsmas laukuma aprēķināšanai (skat.zīm. 5.4)

$$S = 2\pi \int_0^3 e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx = \left| \begin{matrix} t = e^{-x} & dt = -e^{-x}dx \\ t_1 = e^0 = 1 & t_2 = e^{-3} \end{matrix} \right| =$$

$$= -2\pi \int_1^{e^{-3}} \sqrt{1 + t^2}\, dt =$$

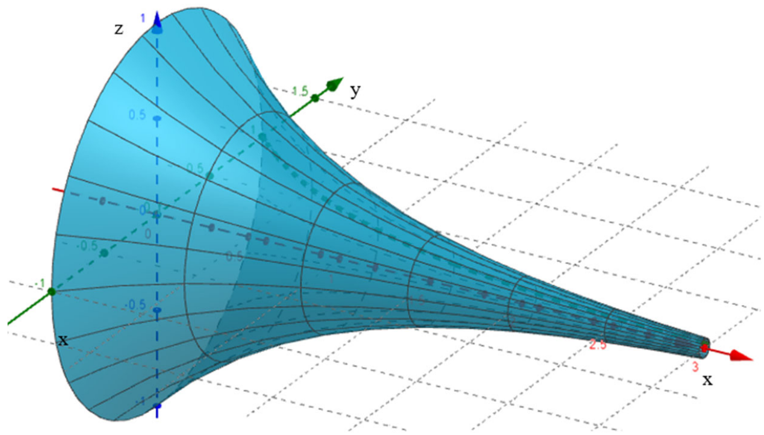
$$= -2\pi \cdot \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 + t^2} + ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right)\Bigg|_1^{e^{-3}} =$$

$$= -\pi\left(e^{-3}\sqrt{1 + e^{-6}} + ln\left|e^{-3} + \sqrt{1 + e^{-6}}\right| - \sqrt{2} - ln\left|1 + \sqrt{2}\right|\right) \approx 6.9 \ \text{kv. vien.}$$

<u>Komentārs.</u> Integrāli

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 + t^2} + ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right) + C$$

Var atrisināt, izmantojot parciālās integrēšanas metodi (skat. Pielikumu nodaļas beigās).



Zīmējums 5.4

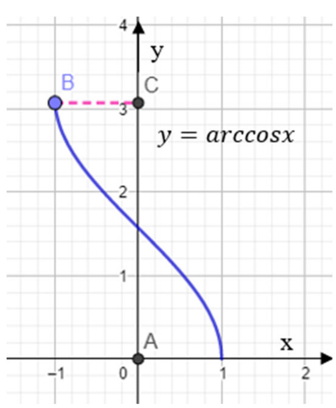
3. Aprēķināt virsmas laukumu, ko veido līnijas $y = \arccos x$ loks intervālā $[-1, 1]$, rotējot ap y-asi.

Atrisinājums

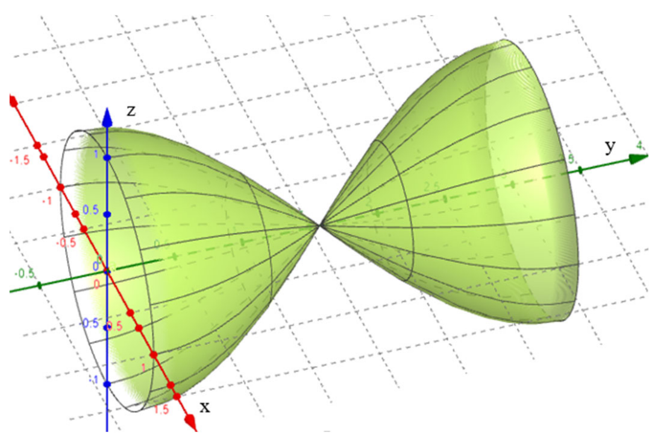
Līkne definēta x-ass intervālā $[-1, 1]$ (skat.zīm. 5.5). Atradīsim līknes projekcijas segmentu uz y-asi – tas ir segments $AC = [0, \pi]$. Izteiksim inverso funkciju x, kuras arguments ir mainīgais y un atvasināsim to

$$x = x(y) = \cos y$$

$$x' = -\sin y$$



Zīmējums 5.5



Zīmējums 5.6

Līkne, rotējot ap y-asi, veido divdaļīgu virsmu (skat.zīm. 5.6). Tāpēc sadalīsim virsmu divās vienādās daļās un aprēķināsim vienas puses S_1 virsmas laukumu robežās no 0 līdz $\frac{\pi}{2}$. Aprēķinam lietosim formulu

$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy}$$

Vienas daļas virsmas laukuma aprēķinam, sastādot integrāli

$$S_1 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\sqrt{1+\sin^2 y}\,dy =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \sin y; & dt = \cos y dy \\ t_1 = \sin 0 = 0; & t_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{matrix} \right| = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= \pi\left(t\sqrt{1+t^2} + ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\sqrt{2} + ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right) \approx 10.34 \ \text{kv. vien.}$$

Kopējais rotācijas ķermeņa virsmas laukums ir

$$S = 2\pi\left(\sqrt{2} + ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right) \approx 20.68 \ \text{kv. vien.}$$

4. Cikloīdas arka rotē ap x-asi. Aprēķināt rotācijas virsmas laukumu, ja cikloīdas parametriskie vienādojumi ir

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

Atrisinājums

Izvēlēsimies cikloīdas vienu arku, kuras parametrs $t \in [0, 2\pi]$ (skat. loku AB zīmējumā 5.7).

Zīmējums 5.7

Lai aprēķinātu rotācijas virsmas laukumu (skat.zīm. 5.8), lietosim formulu

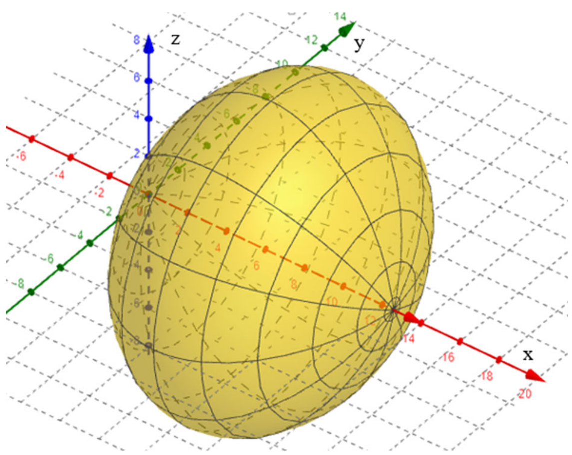
$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt}$$

Vispirms aprēķināsim atvasinājumus

$$\dot{x} = 2(1 - \cos t)$$
$$\dot{y} = 2\sin t$$

Vienkāršosim sekojošo izteiksmi, pielietojot algebras un trigonometrijas formulas

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4(1 - \cos t)^2 + 4\sin^2 t =$$
$$= 4(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) =$$
$$= 4(2 - 2\cos t) = 16\sin^2\frac{t}{2}$$



Zīmējums 5.8

Ķermeņa virsmas laukums, ko veido cikloīdas pirmā arka, rotējot ap x-asi, ir

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t)\sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2} \cdot 4\sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \cos\frac{t}{2}; & du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt \\ u_1 = \cos 0 = 1 & u_2 = \cos\pi = -1 \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{16\pi}{2}\int_{1}^{-1}(1-u^2)\,du = 8\pi\left(\frac{u^3}{3}-u\right)\Bigg|_{1}^{-1} =$$

$$= 8\pi\cdot\frac{4}{3} \approx 33.5 \text{ kv. vien.}$$

5. Aprēķināt astroīdas loka veidotās rotācijas virsmas laukumu, ja tā rotē ap y-asi

$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$$

Atrisinājums

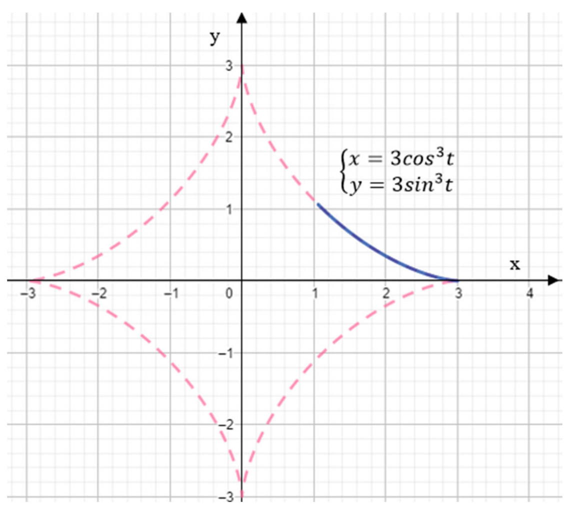
Konstruēsim asteroīdā un iezīmēsim doto arku (skat.zīm. 5.9). Aprēķināsim atvasinājumus un vienkāršosim zemintegrāļa izteiksmi, lai pārveidotu formulā doto kvadrātsakni

$$\dot{x} = -9\cos^2 t\cdot\sin t$$
$$\dot{y} = 9\sin^2 t\cdot\cos t$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 81\cos^4 t\sin^2 t + 81\sin^4 t cos^2 t =$$

$$= 81\cos^2 t\sin^2 t(\sin^2 t + cos^2 t) =$$

$$= 81\sin^2 t cos^2 t$$



Zīmējums 5.9

Sastādīsim integrāli, lai aprēķinātu rotācijas virsmas laukumu (skat.zīm. 5.10)

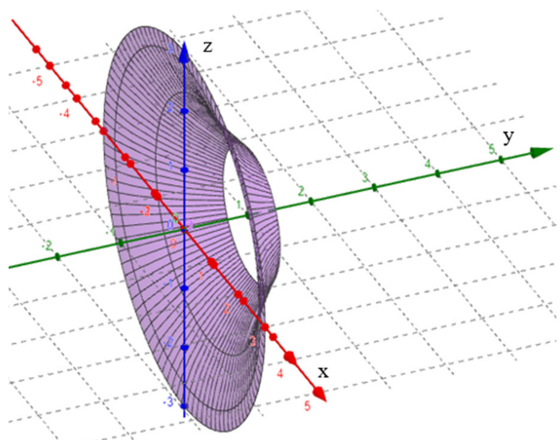
$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\cos^3 t\sqrt{81\sin^2 t cos^2 t}\, dt =$$

$$= 2\pi \cdot 27 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t \sin t \cos t \, dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \cos t & du = -\sin t dt \\ u_1 = \cos 0 = 1 & u_2 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -54\pi \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^4 \, du = -54\,\pi \frac{u^5}{5}\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -\frac{54\pi}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{8} - 1\right) \approx 14.05 \text{ kv. vien.}$$



Zīmējums 5.10

Pielikums: Integrāļa aprēķins

Vingrinājumu 2 un 3 atrisinājumā pielietojām speciālu formulu

$$\boldsymbol{\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\right) + C}$$

Integrāli var atrisināt, pielietojot parciālās integrēšanas metodi. Doto integrāli apzīmēsim ar Int un lietosim minēto metodi

$$Int = \int \sqrt{1+t^2}\,dt = \begin{vmatrix} u = \sqrt{1+t^2} & du = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ dv = dt & v = t \end{vmatrix} =$$

$$= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t \cdot t}{\sqrt{1+t^2}}dt = t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+t^2}}dt =$$

$$= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2+1}{\sqrt{1+t^2}}dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}dt =$$

$$= t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}\,dt + ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|$$

Aplūkojot doto izteiksmi, tās sākuma un beigu daļu, iegūstam vienādojumu

$$Int = t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}\,dt + ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|$$

jeb

$$Int = t\sqrt{1+t^2} - Int + ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|$$

Izteiksim nezināmo lielumu Int no vienādojuma

$$2Int = t\sqrt{1+t^2} + ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|$$

$$Int = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\right)$$

Tā formula ir pamatota

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\right) + C$$

7.11 Noteikto integrāļu pielietojumi

1.piemērs. Reālās situācijās kuģa kustību ietekmē ūdens viļņu enerģija, vējš, kā arī paša kuģa ātrums. Tāpēc kuģa rezultējošā kustība ir sinusoidāla. Pieņemsim, ka kuģa kustības ātrums tiek aprakstīts ar funkciju $v(t) = \rho\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ jūras mezgli stundā, kur ρ ir kāda noteikta konstante. Aprēķināsim kuģa vidējo ātrumu 13 stundu laikā.

Atrisinājums

Funkcijas $f(x)$ vidējās vērtības intervālā $[a,b]$ aprēķināšanas formula ir

$$\boldsymbol{VID = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Dotais laika intervāls ir $t \in [0{,}13]$. Lietosim šo formulu, lai aprēķinātu kuģa kustības vidējo ātrumu

$$v_{vid} = \frac{1}{13}\int_0^{13} \rho\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\,dt =$$

$$= \frac{\rho}{13}\cdot\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big|_0^{13} = \frac{\rho}{13\pi}\ (m/\mathrm{h})$$

Atbilde. Kuģa vidējais ātrums ir $\frac{\rho}{13\pi}$ jūras mezgli stundā.

2.piemērs. Lai ar refrižeratoru kuģi pārvadātu banānus, tilpnes temperatūrai jābūt robežās starp 13,3 un 13,6 grādiem pēc Celsija skalas. Divpadsmit stundu laikā reģistrētā temperatūra tilpnē atbilst funkcijai

$$f(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}01t^2 + 13.4$$

kur t ir stundu skaits ($0 \le t \le 12$). Aprēķināt tilpnes vidējo temperatūru dotajā laika periodā!

Atrisinājums

Vidējo temperatūru var aprēķinat, izmantojot vidējās vērtības teorēmu noteiktajam integrālim. Ja funkciju $y = f(x)$ var integrēt intervālā $[a,b]$ tad funkcijas vidējā vērtība šajā intervālā ir

$$\boldsymbol{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Dotais mainīgais t pieder intervālam [0, 12]. Tad funkcijas vidējo vērtību var aprēķinat sekojoši

$$f_{vid} = \frac{1}{12-1}\int_1^{12} (0{,}001t^3 - 0{,}01t^2 + 13{,}4)\,dx =$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$= \frac{1}{11}\left(0{,}001 \cdot \frac{t^4}{4} - 0{,}01 \cdot \frac{t^3}{3} + 13{,}4t\right)\Big|_{1}^{12} =$$

$$= \frac{1}{11}(5{,}184 - 5{,}76 + 160{,}8 - 0{,}000025 + 0{,}0333 - 13{,}4) \approx$$

$$\approx 13{,}35\ (℃)$$

Atbilde. Banānu kravas tilpnes vidējā temperatūra ir 13,35 ℃, kas atbilst dotajām robežām.

3.piemērs. Vidējais kvadrātiskai spriegums

Lai darbinātu dažādas elektriskās iekārtas, tiek izmantota līdzstrāva vai maiņstrāva. Lai ķēdē noteiktu maiņstrāvas ekvivalentu līdzstrāvai, aprēķina vidējo kvadrātisko (UKV) spriegumu:

$$U_{UKV} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (v(t))^2\, dt}$$

Te $u(t)$ ir periodiska funkcija, kas raksturo spriegumu periodā T. Maiņstrāvas sprieguma UKV vērtību var izmērīt ar voltmetru.

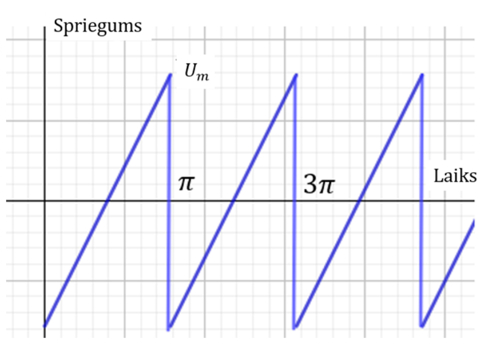
Uzdevums. Spriegums ir definēts kā zāģa funkcija intervālā $[0{,}2\pi]$, kur maksimālā sprieguma vērtība ir $U_m = 170\ V$:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{U_m}{\pi} t, & t \in (0,\pi) \\ -U_m + \frac{U_m}{\pi}(t-\pi), & t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Aprēķināt dotās funkcijas vidējo kvadrātisko vērtību UKV.

Atrisinājums

Dotās funkcijas grafiks attēlots zīmējumā 1.



Zīmējums **1**

Varam pieņemt, ka funkcija ir simetriska attiecībā pret koordinātu sistēmas sākuma punktu. Tad ir pietiekami aprēķināt sprieguma UKV intervālā $[0, \pi]$

$$U_{UKV} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\left(\frac{170}{\pi}t\right)^{2} dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{170^2}{\pi^3}\int_{0}^{\pi} t^2\, dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{170^2}{\pi^3}\cdot \frac{t^3}{3}\bigg|_0^{\pi}} = 170\sqrt{\frac{\pi^3}{\pi^3\cdot 3}} =$$

$$= \frac{170}{\sqrt{3}} \approx 98{,}15\ V$$

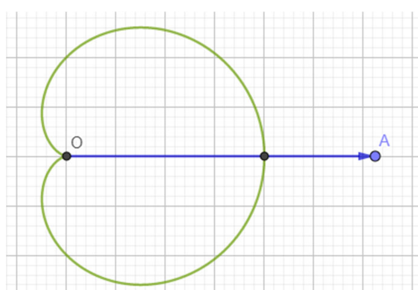
Atbilde. Ķēdes UKV spriegums ir 98,15 volti.

4.piemērs. Cilindriskas tilpnes ārējo sienu ir jāpārklāj ar metālisku loksni. Cik lielu metāliskās loksnes lapu ir jānogriež, ja tilpnes šķērsgriezumu var aprakstīt ar polārās koordinātēs dotu funkciju

$$r = 2(1 + cos\varphi)?$$

Atrisinājums

Lai aprēķinātu, kāds metāliskās loksnes garums nepieciešams, ir jāaprēķina polārās koordinātēs dotās līknes garumu (skat.zīm. 2).



Zīmējums 2

Lietosim līnijas loka garuma aprēķināšanas formulu

$$\boldsymbol{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi}$$

Pusi no līnijas garuma var aprēķināt robežās

$$0 \le \varphi \le \pi$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Tad viss līnijas loka garums ir

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(2+2\cos\varphi)^2 + (2\sin\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = 4\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 8\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 32\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 32$$

Atbilde. No metāla loksnes ir jānogriež 32 garuma vienības liels gabals.

5. piemērs. Ķēde iekārta starp diviem atbalsta punktiem attālumā 50 metri. Iekārtās ķēdes formu var aprakstīt ar hiperboliskā kosinusa funkciju

$$f(x) = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$$

Parametrs a ir atkarīgs no gravitācijas, ķēdes blīvuma, šķērsgriezuma un sprieguma spēka. Aprēķināt ķēdes garumu!

Atrisinājums

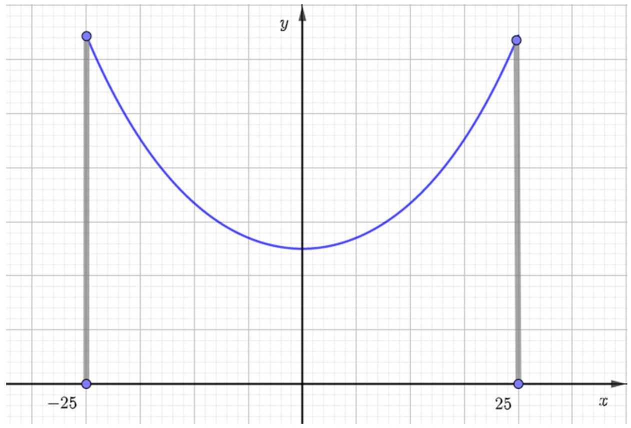
Pielietosim līnijas loka garuma aprēķināšanas formulu

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx}$$

Hiperboliska kosinusa funkcijas atvasinājums ir

$$f'(x) = a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a} = \mathrm{sh}\frac{x}{a}$$

Konstruēsim atbilstošo līkni Dekarta koordinātu sistēmā. Līkne ir simetriska attiecībā pret y-asi (skat zīm. 3). Tāpēc integrācijas apgabalu var sadalīt divās daļās.



Zīmējums 3

Ķēdes garums ir

$$l = 2\int_0^{25} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx$$

$$= 2\int_0^{25} \sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}\,dx =$$

$$= 2\int_0^{25} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= 2a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^{25} =$$

$$= 2a\operatorname{sh}\frac{25}{a}$$

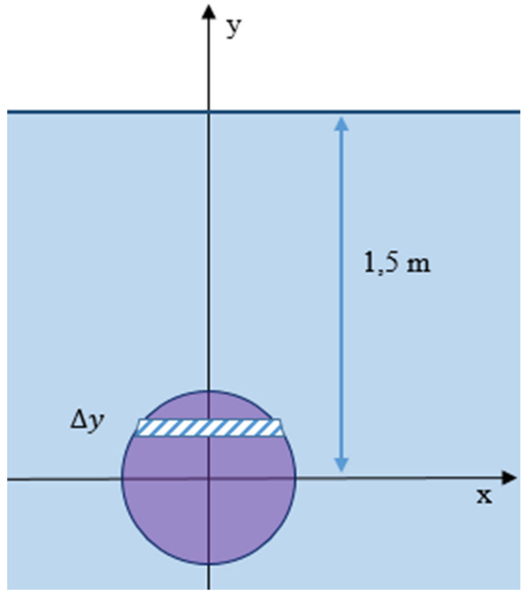
Atbilde. Ķēde ir $2a\operatorname{sh}\frac{25}{a}$ vienības gara.

6.piemērs. Kuģa iluminators ir projektēts tā, lai kuģim iegremdējoties, tas varētu izturēt ūdens spiedienu. Tāpēc iluminatora augstums tiek speciāli aprēķināts.

Uzdevums. Apaļa iluminatora rādiuss kuģa vertikālajā bortā ir 30 cm. Kāds ir ūdens spiediena spēks uz iluminatoru, ja tas atrodas 1,5 m zem ūdens līmeņa?

Atrisinājums

Dotās situācijas aprakstīšanai lietosim Dekarta koordinātu sistēmu. Iluminatora centrs atrodas 1,5 m zem ūdens līmeņa (skat.zīm. 4).



Zīmējums 4

Riņķa līniju aprakstīsim ar atbilstošo vienādojumu

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

kur $R = 30\ cm$

Sadalīsim riņķa līniju joslās ar horizontāliem griezumiem, jo spiediens ir mainīgs , tas palielinās, skatoties no augšas uz leju. Vienas joslas augstumu apzīmēsim ar Δy (skat.zīm. 3). Joslas garumu kā funkciju $x(y) = L(y)$ var izteikt no riņķa līnijas vienādojuma

$$L(y) = \sqrt{0{,}3^2 - y^2} - \left(-\sqrt{0{,}3^2 - y^2}\right) = 2\sqrt{0{,}3^2 - y^2}$$

Joslas attālums no ūdens līmeņa līdz x-asij ir y, bet attālums līdz ūdens virsmai ir $h = 1{,}5 - y$. Ūdens blīvums ir $\rho = 997\ kg/m^3$. Lietosim formulu, kas izsaka šķidruma spiedienu uz iluminatoru, kas iegremdēts ūdenī vertikāli

$$\boldsymbol{F(y) = spiediens\ \cdot laukums = (\rho \cdot dziļums)\ \cdot laukums = \rho \int_a^b hL(y)dy}$$

Dotajos apstākļos integrālis ir

$$F(y) = 997 \int_{-0{,}3}^{0{,}3} (1{,}5 - y)2\sqrt{0{,}3^2 - y^2}dy$$

Sadalīsim integrāli divās daļās

$$F(y) = 1994 \int_{-0{,}3}^{0{,}3} 5 \cdot \sqrt{0{,}3^2 - y^2}dy - 1994 \int_{-0{,}3}^{0{,}3} y\sqrt{0{,}3^2 - y^2}dy$$

Otra saskaitāmā zemintegrāļa funkcija ir nepāra funkcija, tāpēc šī integrālā vērtība ir 0, jo integrālim ir simetriskas robežas. Pirmajam integrālim lietosim trigonometrisko substitūciju.

$$\text{lai } y = 0{,}3\sin u \text{ tad } dy = 0{,}3\cos u\, du$$

Jaunās integrāļa robežas aprēķinam

$$y_1 = -0{,}3 \text{ tad } \; -1 = \sin u; \quad u_1 = -\frac{\pi}{2}$$

Līdzīgi

$$u_2 = \frac{\pi}{2}$$

Pārejam uz jaunu mainīgo

$$1994 \int_{-0{,}3}^{0{,}3} 5 \cdot \sqrt{0{,}3^2 - y^2}dy = 1994 \cdot 5 \cdot 0{,}3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{0{,}3^2 - 0{,}3^2 \sin^2 u} \cos u\, du =$$

$$= 897{,}3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \frac{897{,}3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2u) du =$$

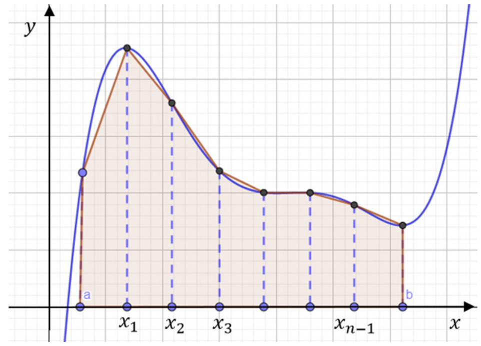
$$= \frac{897{,}3}{2} \left(u - \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 448{,}65\, \pi \quad kg/m^2$$

Atbilde. Spiediena spēks uz iluminatoru ir 448,65 π kilogramu uz kvadrātmetru.

7.piemērs. Noteiktos integrāļus lieto, lai aprakstītu dažādas reālas situācijas. Bieži vien procesus fiksē, uzkrājot datus tabulās, nevis izsakot tos ar speciālu funkciju palīdzību. Ja dati ir uzkrāti tabulā, tos var attēlot arī ar grafika palīdzību un var pieņemt, ka tie ir kādas līdzīgas funkcijas (sauksim to par teorētisko funkciju) mezglu punkti. Tādos gadījumos aprēķinos lieto skaitliskās metodes. Noteikto integrāli izsaka caur Trapeču formulu, tādā veidā aproksimējot teorētisko funkciju:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2n} (f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b))}$$

Dotais intervāls $[a, b]$ tiek sadalīts n vienādās daļās, tā sadalot laukumu zem funkcijas grafika (skat.zīm. 5).



Zīmējums 5

Uzdevums. Sūknis, kas pieslēgts pie ģeneratora, darbojas ar mainīgu ātrumu atkarībā no ģeneratora jaudas. Sūkņa darbības ātrums (galoni minūtē; 1 galons atbilst aptuveni 3,78 litriem) tiek fiksēts vienas stundas laikā ar 5 minūšu intervālu, kā tas norādīts tabulā. Cik galoni vielas tiek izsūknēti šīs stundas laikā?

Sūknēšanas ātrums

laiks	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
galoni	0	40	45	52	44	46	55	52	50	48	46	50	52

Atrisinājums
Pieņemsim, ka $R(t),\ \ 0 \leq t \leq 60$ ir sūknēšanas ātrums, izteikts kā nepārtraukta funkcija attiecībā pret laiku. Stundas intervālu varam sadalīt sīkākos apakšintervālos garumā 5 minūtes, tad varam aprēķināt summu, kas aptuveni atbilst vielas daudzumam, kas izsūknēts stundas laikā

$$\sum_{i=0}^{12} R(t_i)\Delta t$$

Ar noteiktā integrāļa palīdzību var aprēķināt precīzu izsūknēto galonu daudzumu

$$galoni = \int_0^{60} R(t)\, dt$$

Te nav dota funkcijas $R(t)$ analītiskā izteiksme, bet tabulā ar vienādiem intervāliem ir uzdotas funkcijas vērtības. Tāpēc varam doto integrāli aprēķināt aptuveni, izmantojot trapeču formulu:

$$\int_0^{60} R(t)\, dt \approx \frac{5}{2}(0 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 45 + \cdots + 2 \cdot 50 + 52) =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 2(40 + 45 + 52 + 44 + 46 + 55 + 52 + 50 + 48 + 46 + 50 + 26) =$$

$$= \ 5 \cdot 554 = 2770$$

Atbilde. Kopējais vielas daudzums, ko stundas laikā ir izsūknējis sūknis, ir apmēram 2770 galoni.

8.piemērs. Atbilstoši starptautiskajām MARPOL prasībām, uz katra kuģa ir jābūt sanitāro ūdeņu apstrādes iekārtai. Caur šādu iekārtu speciāls kompresors pūš cauri gaisu. Sanitārajiem ūdeņiem periodiski ir jāpievieno bio-aktīvās vielas. Laika periods, pēc kura ir jāpievieno bio-aktīvā viela, aprēķināms atkarībā no vidējā sanitāro ūdeņu attīrīšanās laika

$$\bar{t} = \int_0^\infty t \cdot ke^{-kt} dt,$$

kur *k* ir konstante, kas raksturo attīrīšanās atrumu. Aprēķinā tiek lietots neīstais integrālis.

Atrisinājums

$$\bar{t} = \int_0^\infty t \cdot ke^{-kt} dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T t \cdot ke^{-kt} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{lai} \quad u = t; \qquad dv = ke^{-kt}dt \\ \text{tad } du = dt; \;\; v = k\int_0^T e^{-kt}dt = -\dfrac{ke^{-kt}}{k} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(-te^{-kt}\Big|_0^T + \int_0^T e^{-kt} dt \right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(Te^{-kT} - \frac{e^{-kt}}{k}\Bigg|_0^T \right) =$$

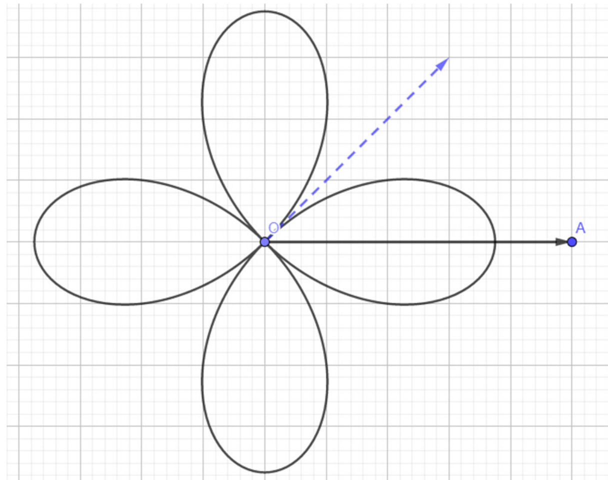
$$= \lim_{T\to\infty} \left(Te^{-kT} - \frac{e^{-kT}}{k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{k}$$

Atbilde. Sagaidāmais sanitāro ūdeņu attīrīšanās laiks laika vienībā ir $\bar{t} = \frac{1}{k}$.

9. piemērs. Kuģa pagriešanās dzenskrūves lāpstiņām ir polārās rozes forma (forma ar 4 lapām). Lāpstiņas ir jānoklāj ar pret-apaugšanas krāsu. Šim nolūkam ir nepieciešams aprēķināt lāpstiņu virsmas laukumu, ja zināms, ka lāpstiņas garums ir 75 cm.

Atrisinājums

Lāpstiņu formu var aprakstīt ar polāro vienādojumu $r = 0.75\cos 2\varphi$ (skat.zīm. 6)



Zīmējums 6

Polārā roze ir simetriska attiecībā pret polāro asi OA un tās četras lapas ir vienādas. Tāpēc ir pietiekami aprēķināt pusi no vienas lapas laukuma. Noteiksim leņķi, ko veido polārā ass un stars, uz kura dotās funkcijas vērtība ir nulle:

$$0.75\cos 2\varphi = 0$$

$$\cos 2\varphi = 0;\ 2\varphi = \frac{\pi}{2};\ \ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Polārās rozes laukuma lielumu var aprēķināt sekojošā veidā

$$S = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (0.75\cos 2\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= 4 \cdot \frac{9}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{9}{8}\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{9}{8}\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) =$$

$$= \frac{9\pi}{32}\ (m^2) \approx 0{,}88\ (m^2)$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Atbilde. Visu lāpstiņu vienas puses kopējais virsmas laukums ir aptuveni 0,88 m^2.

10. piemērs. Noteikt tauvas masas centru intervālā $[0, L]$, ja tās blīvums punktā x ir $\rho(x) = x$.

Atrisinājums

Masas centru $\bar{x}$ var aprēķināt pēc sekojošās formulas

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_0^L x \cdot \rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx}}$$

kur *m* ir tauvas masa un $M_{x=0}$ ir viendimensionāla objekta statiskais moments nulles punktā.

Dotajā piemērā tiek apskatīta tauva, kuras blīvums ir nesimetriski sadalīts – blīvums palielinās, ja aplūkojam tauvu, virzoties no kreisās uz labo pusi.

Tauvas masa ir

$$m = \int_0^L x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{L^2}{2}$$

Moments attiecībā pret centru ir

$$M_{x=0} = \int_0^L x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L = \frac{L^3}{3}$$

Aprēķināsim masas centru

$$\bar{x} = \frac{L^3}{3} : \frac{L^2}{2} = \frac{2}{3}L$$

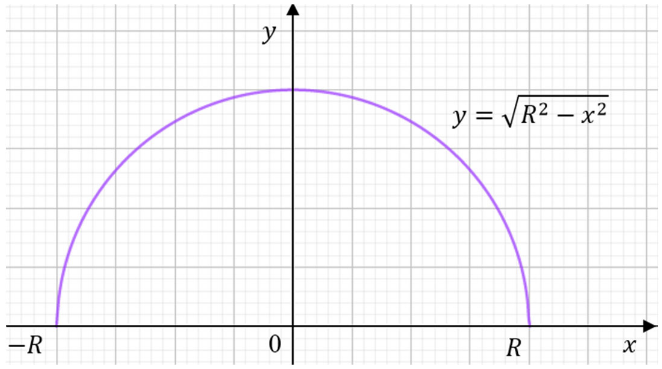
Atbilde. Tauvas masas centrs atrodas attālumā divas trešdaļas no tauvas garuma, skaitot no tās kreisā gala.

11.piemērs. Viens no svarīgākajiem jautājumiem kuģu stabilitātes teorijā ir kuģa metocentriskā augstuma aprēķināšana – tas ir, attāluma starp tā smaguma centru un tilpuma centru. Smaguma centra aprēķināšanai tiek lietotas speciālas formulas.

Uzdevums. Te aplūkosim vienkāršu uzdevumu – aprēķināt pus-diska ar rādiusu R smaguma centru.

Atrisinājums

Ievietosim diskam atbilstošo pusriņķi koordinātu sistēmā (skat.zīm. 7).



Zīmējums 7

Figūras smaguma centra koordinātes ir atrodamas atbilstošajās robežās, kur

$0 \le y \le f(x)$ un $a \le x \le b$, un to var aprēķināt pēc formulām

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{S} = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}}$$

$$\boldsymbol{\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}}$$

Ievērojot simetriju, pusriņķa smaguma centra x-koordināte ir $\bar{x} = 0$. Pusriņķa laukums ir $S = \frac{\pi R^2}{2}$. Aprēķināsim y-koordināti

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx}{\frac{\pi R^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) =$$

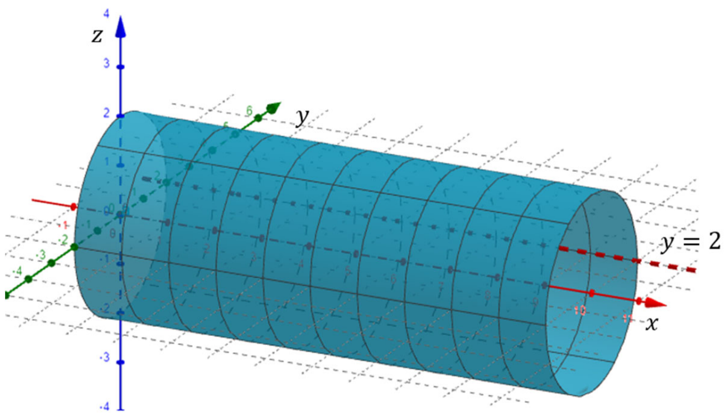
$$= \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

Atbilde. Pusdiska smaguma centra koordinātes ir $\left(0,\ \frac{4R}{3\pi}\right)$.

12. piemērs. Cilindriskas formas tvertne, kuras pamati ir riņķi, ir jānokrāso. Tvertnes garums ir 10 metri, bet pamata rādiuss ir 2 metri. Cik kilogramus krāsas ir jāpatērē,, ja ar vienu kilogramu krāsas var pārklāt 10 kvadrātmetrus?

Atrisinājums

Ievietosim tvertni jeb taisno cilindru koordinātu sistēmā. Pieņemsim, ka tā simetrijas ass ir x-ass (skat.zīm. 8). Var pieņemt, ka cilindra virsma ir veidota, taisnei $y = 2$ rotējot ap x-asi intervālā $[0, 10]$.



Zīmējums 8

Rotācijas virsmas laukuma aprēķināšanas formulas ir

$$\boldsymbol{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Ar šīs formulas palīdzību var aprēķināt cilindra sānu virsmas laukumu

$$S = 2\pi \int_0^{10} 2\sqrt{1 + (2')^2}dx = 4\pi \int_0^{10} dx = 40\pi \ (m^2)$$

Abu pamatu kopējo laukumu var aprēķināt kā vienādu riņķu laukuma summu

$$S_2 = 2 \cdot \pi R^2 = 8\pi \ (m^2)$$

Kopējais krāsas daudzums K, lai noklātu visu tvertni, ir

$$K = (40\pi + 8\pi) : 10 = 4{,}8\pi \approx 15{,}07 \ (kg)$$

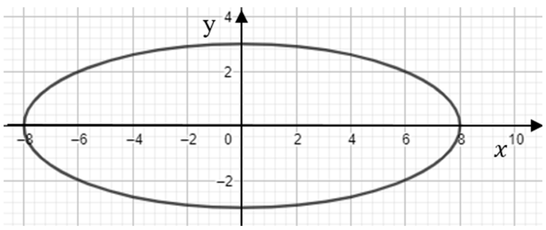
Atbilde. Lai nokrāsotu visu cilindriskās tvertnes virsmu, ir nepieciešami aptuveni 15,07 kg krāsas.

13. piemērs. Ir nepieciešams aprēķināt homogēnas eliptiskas formas metāla detaļas svaru. Detaļas trīs simetrijas asis ir 16, 6 un 6 centimetrus garas.

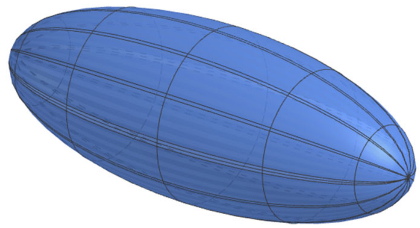
Atrisinājums

Dotā detaļa ir elipsoīds. Ievērojot, ka elipsoīda divas asis ir vienādas, tas ir rotācijas elipsoīds, kādu var iegūt, ja elipse rotā ap savu lielāko asi. Uzrakstīsim elipses kanonisko vienādojumu (skat.zīm. 9)

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$$



Zīmējums 9



Zīmējums 10

Ja rotācijas ķermenis dots intervālā $[a,b]$ un tā blīvums ir $\rho(x)$, tad tā masu var aprēķināt pēc formulas (skat.zīm. 10)

$$\boldsymbol{m=\pi\int_a^b \rho(x)\, y^2 dx}$$

Homogēnas metāla detaļas blīvums ir $\rho = 7{,}2\ g/cm^3$. Tad dotās detaļas masa ir

$$m=\pi\int_{-8}^{8} 7{,}2\cdot 9\left(1-\frac{x^2}{64}\right)dx =$$

$$=2\pi\cdot 64{,}8\int_{0}^{8}\left(1-\frac{x^2}{64}\right)dx =$$

$$=129{,}6\pi\left(x-\frac{x^3}{192}\right)\Bigg|_0^8 =$$

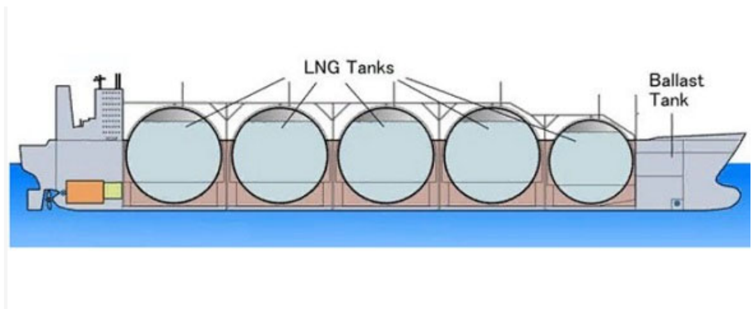
$$=129{,}6\pi\left(8-\frac{8}{3}\right)=$$

$$=691{,}2\pi\approx 2171{,}47\ (g)$$

Atbilde. Dotā metāla detaļa sver 2171,47 gramus.

14. piemērs. Tankkuģis ir specializēts kuģis, kas transportē šķidro kravu un kondensējamās gāzes, kuras jāpārvadā pie ļoti zemām temperatūrām. Ir tankkuģi - gāzvedēji, lai transportētu sašķidrināto gāzi un tankkuģi - ķīmiskās kravas vedēji. Pēc konstrukcijas tie ir vienstāva kuģi, kuros iebūvētas milzīgas tvertnes. Tā, piemēram, sašķidrinātās gāzes pārvadāšanai var būt iebūvētas cilindriskas vai sfēriskas formas tvertnes (skat.zīm. 11, 12).

Zīmējums 11

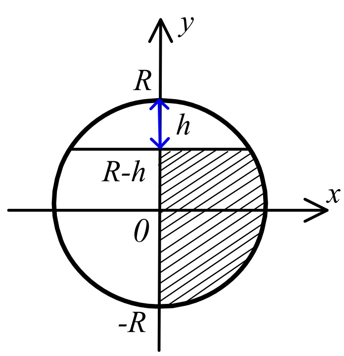


Zīmējums 12

Uzdevums. Sfēriskas tvertnes rādiuss ir R. Tā ir daļēji piepildīta ar sašķidrināto gāzi. Tukšā segmenta augstums ir h. Aprēķināt tvertnes piepildītās daļas tilpumu!

Atrisinājums

Ar sašķidrināto gāzi piepildītās tvertnes daļas tilpumu var aprēķināt kā atbilstoša rotācijas ķermeņa tilpumu. Pieņemsim, ka šo ķermeni veido riņķa līnijas daļa $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=\mathrm{R}^2$ $(x \geq 0)$ robežās no $y=-R$ līdz $y=R-h$, kas rotē ap y-asi (skat.zīm. 13).



Zīmējums 13

Lietosim tilpuma formulu

$$\mathbf{V_y = \pi \int_c^d \left(x(y)\right)^2 dy}$$

No vienādojuma $x^2 + y^2 = R^2$ izteiksim $x^2 = R^2 - y^2$.

Tad

$$V_y = \pi \int_{-R}^{R-h} (R^2 - y^2)dy =$$

$$= \pi \left(R^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R-h} =$$

$$= \pi \left(R^2(R-h) - \frac{(R-h)^3}{3}\right) - \pi \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) =$$

$$= \pi \left(R^3 - R^2 h - \frac{R^3 - 3R^2 h + 3Rh^2 - h^3}{3} + \frac{2R^3}{3}\right) =$$

$$= \pi \left(\frac{4R^3}{3} - Rh^2 + \frac{h^3}{3}\right)$$

Vai

$$V_{gas} = \pi \frac{4R^3}{3} - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$$

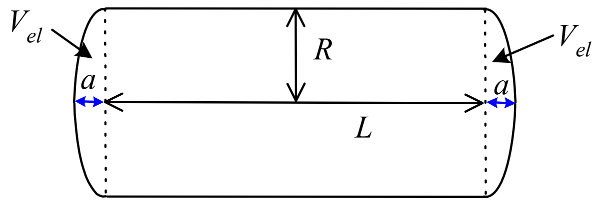
Atbilde. Tvertnes piepildītās daļas tilpums ir $\pi \frac{4R^3}{3} - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$ tilpuma vienības.

15. piemērs. Tādas cisternas tilpumu, kurā pārvadā jēlnaftu un naftas produktus (skat.zīm. 14) uz ostu pa dzelzceļu, var aprēķināt kā rotācijas ķermeņa tilpumu.

Zīmējums 14

Cisternām, kuras tiek ražotas īpašam nolūkam, var būt dažādas formas gali – plakani, pussfēriski, eliptiski, torisfēriski vai cita veida. Bieži cisternas viens gals ir izliekts, bet otrs – ieliekts.

Uzdevums. Cisternas forma ir cilindriska ar eliptiskas formas galiem. Cisternas garums ir $L + 2a$, rādiuss ir R (skat.zīm. 15). Aprēķināt cisternas tilpumu!



Zīmējums 15

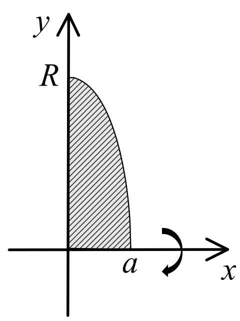
Atrisinājums

Cisternas tilpums ir

$$V = V_{\text{cilindrs}} + 2V_{el}$$

$$V_{\text{cilindrs}} = \pi R^2 L$$

Cisternas tilpuma daļu V_{el}, kas atrodas tās galā, var aprēķinat kā tāda rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido elipses $\frac{x}{a^2}^2 + \frac{y^2}{R^2} = 1$ ceturtā daļa no $x = 0$ līdz $x = a$, rotējot ap x-asi (skat.zīm. 16).



Zīmējums 16

Lietosim tilpuma aprēķināšanas formulu

$$\boldsymbol{V_x = \pi \int_a^b \left(y(x)\right)^2 dx}$$

Izteiksim y^2 no vienādojuma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$

$$y^2 = \mathrm{R}^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Tad

$$\mathrm{V_{el}} = \pi \int_0^a \mathrm{R}^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= \pi R^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= \pi R^2 \left(\mathrm{x} - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \pi R^2 \left(\mathrm{a} - \frac{a^3}{3a^2}\right) =$$

$$= \ \pi R^2 \left(\mathrm{a} - \frac{\mathrm{a}}{3}\right) =$$

$$= \frac{2\pi R^2 a}{3}$$

Aprēķinām cisternas kopējo tilpumu

$$\mathrm{V} = \pi R^2 L + \frac{4\pi R^2 a}{3} = \pi R^2 \left(L + \frac{4a}{3}\right)$$

Atbilde. Cisternas tilpums ir $\pi R^2 \left(L + \frac{4a}{3}\right)$ tilpuma vienības.

16. piemērs Pieņemsim, ka ūdens cisternai ir nošķelta konusa forma un tā ir novietota ar lielāko pamatu uz augšu. Tās augstums ir 8 metri, augšējā pamata rādiuss ir 3 metri, bet apakšējā pamata rādiuss ir 1 metrs. Cik liels darbs ir nepieciešams, ja tvertni ir jāizsūknē caur atveri, kas atrodas augšējā pamatā?

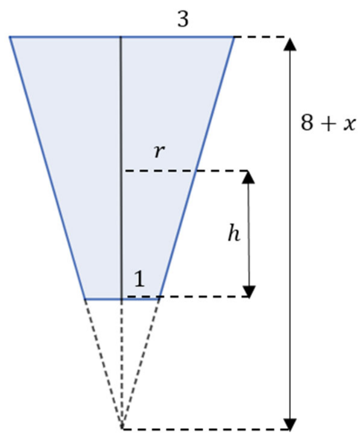
Atrisinājums

Darbu var aprēķināt pēc sekojošās formulas:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b F(x)\, dx}$$

kur nepārtrauktā funkcija $F(x)$ raksturo spēku, kāds ir nepieciešams, lai objektu pārvietotu x-ass virzienā intervālā $[a, b]$.

Konstruēsim cisternas šķērsgriezumu (skat.zīm. 17)



Zīmējums 17

Tāda plāna ūdens diska, kurš atrodas augstumā h virs apakšējā cisternas pamata, rādiuss ir r. Izteiksim rādiusu caur parametru h, izmantojot trijstūru līdzību. Ja būtu dots nenošķelts konuss, tad tā augstums būtu $8+x$ metri (skat.zīm. 16). Tad

$$\frac{x}{1}=\frac{x+h}{r}=\frac{8+x}{3}$$

Ieguvām

$$x=4 \text{ un } r=\frac{4+h}{4}$$

Ūdens diska tilpums ir

$$dV=\pi r^2 dh=\pi\frac{(4+h)^2}{16}dh$$

Gravitācijas spēka iedarbība uz ūdens disku ir

$$dF=\rho g\,\pi\frac{(4+h)^2}{16}dh$$

Te ρ ir ūdens blīvums izteikts kilogramos uz kubikmetru (aptuveni $\rho\approx 1000$) un g ir gravitācijas konstante. Ūdens diska pacelšanas augstums ir $8-h$ metri. Darbs, kas nepieciešams tā pacelšanai, ir

$$dA=\rho g\,\pi\frac{(4+h)^2}{16}(8-h)dh$$

Kopējo darba daudzumu ūdens izsūknēšanai aprēķinām ar integrāļa palīdzību

$$A=\int_0^8 \rho g\,\pi\frac{(4+h)^2}{16}(8-h)dh=$$

$$=\frac{\rho g\,\pi}{16}\int_0^8 (4+h)^2(8-h)\,dh=$$

$$= \frac{\rho g\,\pi}{16}\int_{0}^{8}(128 + 48h - h^3)\,dh =$$

$$= \frac{\rho g\,\pi}{16}\left(128h + 24h^2 - \frac{h^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{8} =$$

$$= \frac{\rho g\,\pi}{16}\cdot 1536 \approx$$

$$\approx \frac{1000\cdot 9{,}8\cdot 3{,}14\cdot 1536}{16} \approx$$

$$\approx 19{,}7\cdot 10^5\ \ (\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})$$

Atbilde. Darbs, kas nepieciešams ūdens izsūknēšanai no cisternas, ir $19{,}7\cdot 10^5$ Ņūton-metri jeb džouli.