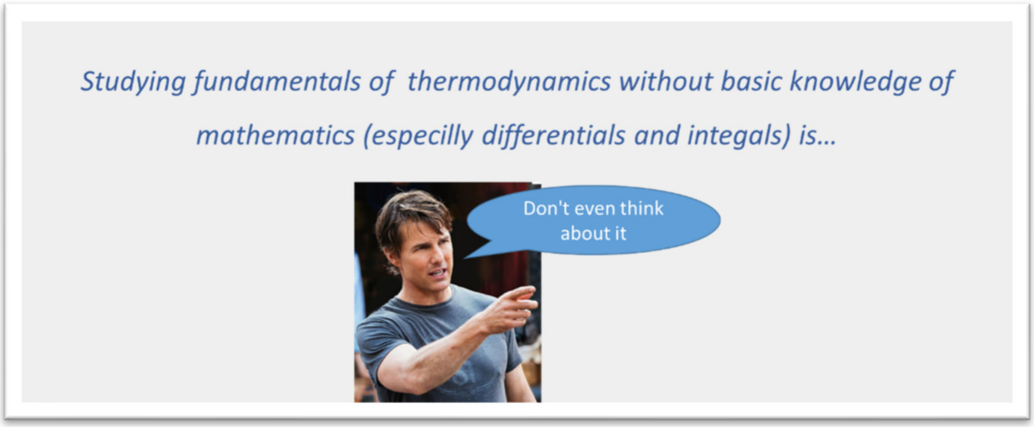
7 CAŁKI



Termodynamika to tylko jedno z wielu zastosowań całek. W rzeczywistości całki są szeroko stosowane w mechanice, elektrotechnice, inżynierii lądowej, materiałoznawstwie, nawigacji morskiej i innych dziedzinach.

W tym rozdziale zostaną przedstawione specyficzne typy całek - całek nieoznaczonych, oznaczonych i niewłaściwych. Obok tematów teoretycznych omawiane są również podstawowe techniki integracji. Przedstawiono metody wyznaczania pola figur płaskich lub długości łuku, objętości i pola powierzchni brył obrotowych. Rozdział zawiera kilka rzeczywistych i morskich problemów, które można rozwiązać za pomocą rachunku całkowego.

Zdobyte umiejętności:

1. Oblicz proste całki funkcji elementarnych
2. Stosować zasady obliczania całek oznaczonych
3. Wykorzystaj warunki początkowe do wyznaczenia całki
4. Oblicz powierzchnię regionów płaskich ujętych krzywymi
5. Zastosuj całkowanie, aby znaleźć objętości ciał stałych
6. Zastosuj integrację do rozwiązywania zadań z różnych aplikacji morskich i biznesowych

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

SPIS TREŚCI

7 CAŁKI 1

7.1 Całka nieoznaczona i oznaczona 1

7.1.1 Całka nieoznaczona 2

7.2 Całkowanie przez podstawienie 6

7.3 Całkowanie przez części 7

7.4 Całkowanie ułamków prostych..11

7.5 Obliczanie całek funkcji wymiernych...14

7.5.1 Typ1: $I = Ax + Bax2 + bx + cdx.$ 14

7.5.2 Typ 2: $L(x)M(x)dx,\ (stopień\ L(x) < stopień\ M(x)).$ 17

7.5.3 Typ 3: $L(x)M(x)dx,\ (stopień\ L(x) \geq stopień\ M(x)).$ 18

7.6 Zadania różne. 19

7.6.1 ZADANIA ROZWIĄZANE 20

7.7 CAŁKA OZNACZONA 23

7.7.1 Całka oznaczona 23

7.7.2 Własności całki oznaczonej 24

7.7.3 Metody całkowania dla całki oznaczonej...28

7.7.4 Ćwiczenia : Obliczanie całek oznaczonych...31

7.8 Całki niewłaściwe 34

7.8.1 Zadania do samodzielnego obliczania 1. 40

7.9 Zastosowania geometryczne całki oznaczonej 42

7.9.1 obliczanie pola figury 42

7.10 Obliczanie długości łuku 47

7.10.1 Objętość bryły obrotowej i pole powierzchni bryły obrotowej..........................47

7.10.2 Zadania do samodzielnego rozwiązania 2. 50

7.10.3 PRZYKŁADOWY EGZAMIN PO ROZDZIALE 53

CAŁKI

7.1 Całka nieoznaczona i oznaczona

OPIS:

Całkowanie jest procesem odwrotnym do różniczkowania. W czasie różniczkowania zaczynamy od danego wyrażenia i postępujemy tak, aby znaleźć jego pochodną. W całkowaniu zaczynamy od pochodnej i chcemy znaleźć funkcję, która została zróżniczkowana. Na przykład $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. Stąd wiemy, ze całka z $3x^2$ względem zmiennej x, to x^3.

Symbol $\int f(x)dx$ oznacza całkę z $f(x)$ względem zmiennej x. Symbol $\int$ został utworzony na podstawie wielkiej litery S, którą używaną w XVII wieku, gdy tworzyły się podstawy analizy matematycznej.

CEL: Zdobycie umiejętności obliczania całek nieoznaczonych i oznaczonych. Zrozumienie faktu, że wartość całki oznaczonej odpowiada polu pod krzywą. Znajomość zastosowań całki oznaczonej

Zdobyte umiejętności:

1. Uznać fakt, że całkowanie jest działaniem odwrotnym do różniczkowania.
2. Obliczać całki nieoznaczone z funkcji elementarnych.
3. Obliczać całki nieoznaczone z wielomianów
4. Obliczać całki nieoznaczone metodą przez podstawienie i przez części.
5. Całkować funkcje wymierne rozkładając je na ułamki proste.
6. Znać zastosowania całki oznaczonej

Wymagania wstępne: znajomość reguł różniczkowania, znajomość pochodnych funkcji, umiejętność rozkładu funkcji na ułamki proste. Znajomość zależności trygonometrycznych.

Zastosowania funkcji w rzeczywistych problemach: całki znajdują swoje zastosowania w wielu dziedzinach. Są to między innymi: obliczanie pola powierzchni ograniczonej wykresami dwóch funkcji- składanie z kawałków; obliczanie długości łuku krzywej, obliczanie objętości i pola powierzchni bryły obrotowej, obliczanie średniej wartość funkcji w przedziale, obliczanie średniego przyśpieszenia w danym przedziale czasu.

Spis treści:

1. Całka nieoznaczona
   1.1. Własności całki nieoznaczonej.
   1.2. Całkowanie przez podstawienie
   1.3. Całkowanie przez części
   1.4. Całkowanie ułamków prostych
   1.5. Obliczanie całek z funkcji wymiernych
   1.6. Zadania różne- przykłady do ćwiczeń.

2. Całka oznaczona
   2.1. Własności całki oznaczonej
   2.2. Metody całkowania całki oznaczonej
   2.3. Ćwiczenia-Obliczanie całek nieoznaczonych
3. Całki niewłaściwe
4. Zastosowania geometryczne całki oznaczonej
   4.1. Obliczanie pola figury.
   4.2. Obliczanie długości łuku.
   4.3. Objętość bryły obrotowej i pole powierzchni bryły obrotowej

7.1.1 Całka nieoznaczona

Niech funkcja $f(x)$ będzie określona na przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Każdą funkcję różniczkowalną $F: (a, b) \to \mathbb{R}$ i spełniającą warunek

$$\forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}): \ \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

nazywamy ***funkcją pierwotną funkcji*** $f(x)$ w przedziale : (a, b).

Przykład

- $F(x) = x^2$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$, ponieważ $(x^2)' = 2x$;
- $F(x) = x^2 + 3$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$, ponieważ $(x^2 + 3)' = 2x$;
- $F(x) = x^2 - 6$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$, ponieważ $(x^2 - 6)' = 2x$;
- $F(x) = x^2 + \pi$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$, ponieważ $(x^2 + \pi)' = 2x$;

- $F(x) = x^2 + C$, gdzie C jest stałą, jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$, ponieważ $(x^2 + C)' = 2x$;

UWAGA: Jeśli funkcja $f(x)$ ma funkcję pierwotną, to ma całą rodzinę funkcji pierwotnych różniących się tylko o stałą C.

Definicja: Jeżeli funkcja $f(x)$ ma funkcję pierwotną, to rodzinę jej wszystkich funkcji pierwotnych nazywamy ***całką nieoznaczoną z funkcji*** $\boldsymbol{f(x)}$ i oznaczamy symbolem $\int f(x)dx$. Zatem

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}.$$

Wyznaczanie funkcji pierwotnej funkcji $f(x)$ nazywamy **całkowaniem tej funkcji**. Funkcję f nazywamy funkcją podcałkową.

Zatem z Przykładu 1. mamy:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C, \text{ ponieważ } (x^2 + C)' = 2x.$$

Widzimy, że operacja całkowania funkcji jest operacją odwrotną do różniczkowania (znajdowania pochodnej).

TABELA 1.

CAŁKI NIEOZNACZONE WAŻNIEJSZYCH FUNKCJI ELEMENTARNYCH	
1. $\int \mathbf{0}\, d\mathbf{x} = \mathbf{C}$	$x \in \mathbb{R}$
2. $\int a\, dx = ax + C$	$x \in \mathbb{R}$
3. $\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\|x\| + C$	$x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0,\infty)$
5. $\int e^{x}\, dx = e^{x} + C$	$x \in \mathbb{R}$
6. $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{lna} + C$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$
7. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
8. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{tg}\, x + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in Z$
11. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\mathrm{ctg}\, x + C$	$x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in Z$
12. $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctg\, x + C$	$x \in \mathbb{R}$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$	$x \in (-1, 1)$
14. $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x + C$	$x \in (-1, 1)$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Własności całki nieoznaczonej

1. $(\int f(x)dx)' = f(x);$
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C;$
3. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx \, , a \in R;$
4. $\int (f(x) \mp g(x))\, dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx.$

Przykład

1. $\int \frac{-3x^2+4x+5}{x}\, dx = \int \left(-3x + 4 + \frac{5}{x}\right) dx = -3\int xdx + 4\int dx + 5\int \frac{1}{x}dx =$
   $= \; -3\frac{x^2}{2} + 4x + 5\ln|x| + C.$
2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \; \int (\sqrt{x} + x^{-\frac{1}{2}})\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} \; +$
   C .
3. $\int (e^x - 2^{2x})\, dx = \; \int e^x\, dx - \int 4^x\, dx = \; e^x - \frac{4^x}{ln4} + C.$
4. $\int (\frac{4}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})\, dx = 4\int \frac{1}{1+x^2} dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 4\,\mathrm{arctg}x - 3\mathrm{arcsinx} + C$
5. $\int (cos\, x + ctg^2x)dx = sinx + \int \frac{cos^2x}{sin^2x} dx = sinx + \int \frac{1-sin^2x}{sin^2x} dx =$

   $$= sinx + \int (\frac{1}{sin^2x} - \frac{sin^2x}{sin^2x})dx = sinx - ctgx - x + C.$$

6. $\int \frac{1}{sin^2x\, cos^2x}\, dx = \int \frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2x\, cos^2x}\, dx = \int \left(\frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x}\right) dx = tgx - ctgx + C.$
7. $\int (x-3)^3\, dx = \int (x^3 - 9x^2 + 27x - 27)\, dx = \frac{x^4}{4} - 9\frac{x^3}{3} + 27\frac{x^2}{2} - 27x + C.$

7.2 Całkowanie przez podstawienie

TWIERDZENIE

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(t)dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C,$$

gdzie f, φ, φ' są ciągłe.

Przykład

1. $\int (3x-7)^5\,dx = \begin{vmatrix} 3x-7=t \\ 3dx = dt \end{vmatrix} = \int t^5 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\frac{t^6}{6} + C = \frac{(3x-7)^6}{18} + C$

2. $\int e^{cos^2 x} sin2xdx = \begin{vmatrix} cos^2 x = t \\ -2sinxcosxdx = dt \\ 2sinxcosx\,dx = sin2x\,dx = -dt \end{vmatrix} = -\int e^t\,dt = -e^t + C =$
$-e^{cos^2 x} + C$

3. $\int \frac{1}{xln^2 x} dx = \begin{vmatrix} lnx = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{lnx} + C$

TABELA 2.

PRZYDATNE WZORY NA CAŁKI NIEOZNACZONE	
1. $\int sinax\,dx = -\frac{1}{a}cosax + C$	$a \in R\backslash\{0\}$
2. $\int cosax\,dx = \frac{1}{a}sinax + C$	$a \in R\backslash\{0\}$
3. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$	$a \in R\backslash\{0\}$
4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$f(x) \neq 0$

Przykład

1. $\int \frac{x}{2x^2+1} dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+1} dx = \frac{1}{4} ln(2x^2+1) + C$
2. $\int tgx\, dx = \int \frac{sinx}{cosx} dx = \int \frac{-(cosx)'}{cosx} dx = -ln|cosx| + C.$

7.3 Całkowanie przez części

Rozpatrzmy iloczyn dwóch funkcji ciągłych $f(x), g(x)$:

$$f(x) \cdot g(x).$$

Obliczmy pochodną tego iloczynu:

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' g(x) + f(x)(g(x)', \tag{1}$$

a następnie scałkujmy obustronnie :

$$\int \left(f(x) \cdot g(x)\right)' dx = \int \left(f(x)\right)' g(x) dx + \int f(x)(g(x)' dx. \tag{2}$$

Wiadomo, że

$$\int \left(f(x) \cdot g(x)\right)' dx = f(x) \cdot g(x) \tag{3}$$

(Własność 1, wykład poprzedni „Całka nieoznaczona”), zatem uwzględniając własność (3) we wzorze (2) dostajemy:

$$f(x) \cdot g(x) = \int \left(f(x)\right)' g(x) dx + \int f(x)(g(x))' dx,$$

a następnie po prostym przekształceniu:

$$\int \boldsymbol{f(x)(g(x))'dx} = \boldsymbol{f(x) \cdot g(x)} - \int \boldsymbol{\left(f(x)\right)' g(x) dx}. \tag{4}$$

Powyższy wzór nosi nazwę wzoru na całkowanie przez części.

Jak widać wzór na całkowanie przez części stosujemy do obliczania całek z iloczynu funkcji. Stosując wzór na całkowanie przez części musimy zdecydować, którą funkcję przyjmiemy za $f(x)$, a którą za $(g(x))'$. Zadanie to polega na tym, aby całka po prawej stronie wzoru (4): $\int \left(f(x)\right)' g(x) dx$ była prostsza niż całka wyjściowa $\int f(x)(g(x))' dx$. Zilustrujemy to na przykładzie.

PRZYKŁAD

$$\int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} f(x)=x & g'(x)=e^{-x} \\ f'(x)=1 & g(x)=-e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} - \int 1\cdot(-e^{-x})dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Popatrzmy na rozwiązanie: podjęliśmy decyzję, że $f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$. Całka $\int e^{-x}dx$ jest znacznie prostsza od całki $\int xe^{-x}dx$. Zatem decyzja wyboru $f(x)$ oraz $g'(x)$ była właściwa. Zobaczmy co byłoby gdybyśmy zdecydowali inaczej:

$$\int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} f(x)=e^{-x} & g'(x)=x \\ f'(x)=-e^{-x} & g(x)=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}e^{-x} - \int \frac{x^2}{2}e^{-x}dx$$

i jak widzimy $\int \frac{x^2}{2}e^{-x}dx$ jest trudniejsza do obliczenia niż całka wyjściowa $\int xe^{-x}dx$.

PRZYKŁAD.

$$\int x^3 lnx dx = \begin{vmatrix} f(x)=lnx & g'(x)=x^3 \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=\frac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{x^4}{4}lnx - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^4}{4}dx = \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}lnx - \frac{x^4}{16} + C.$$

Zauważmy, że w powyższym przykładzie podjęliśmy decyzję, aby $f(x)=lnx$, ponieważ znamy pochodną lnx , a nie znamy całki z lnx.

Przykład.

$$\int \boldsymbol{lnxdx} = \int 1\cdot lnxdx = \begin{vmatrix} f(x)=lnx & g'(x)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=x \end{vmatrix} = xlnx - \int \frac{1}{x}\cdot 1\,dx$$
$$= \boldsymbol{xlnx - lnx + C}$$

Przykład pokazuje sposób na obliczanie $\int lnxdx$.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Przykład.

Czasami będziemy całkować przez części dwukrotnie (lub wielokrotnie):

$$\int x^2 sinxdx = \begin{vmatrix} f(x) = x^2 & g'(x) = sinx \\ f'(x) = 2x & g(x) = -cosx \end{vmatrix} = -x^2cosx - \int -2xcosx\,dx =$$

$$= x^2cosx + \int 2xcosx\,dx = \{jeszcze\ raz\ przez\ części\} = \begin{vmatrix} f(x) = 2x & g'(x) = cosx \\ f'(x) = 2 & g(x) = sinx \end{vmatrix} =$$

$$= x^2cosx + \left[2xsinx - \int 2sinx\,dx\right] = x^2cosx + 2xsinx - 2(-cosx) + C =$$

$$= x^2cosx + 2xsinx + 2cosx + C.$$

Przykład.

$$\int e^x\,cos2xdx = \begin{vmatrix} f(x) = cos2x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = -2sin2x & g(x) = e^x \end{vmatrix} = e^xcos2x + 2\int e^x\,sin2xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} f(x) = sin2x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2cos2x & g(x) = e^x \end{vmatrix} = e^xcos2x + 2\left[e^xsin2x - 2\int e^x\,cos2xdx\right] =$$

$$= e^xcos2x + 2e^xsin2x - 4\int e^x\,cos2xdx.$$

Porównując początek i koniec rozwiązania (zaznaczony kolorem czerwonym), przeniesiemy

$-4\int e^x\,cos2xdx$ na stronę lewą i otrzymamy:

$$\int e^x\,cos2xdx + 4\int e^x\,cos2xdx = e^xcos2x + 2e^xsin2x,$$

czyli $5\int e^x\,cos2xdx = e^xcos2x + 2e^xsin2x + C,$

a zatem

$$\int e^x\,cos2xdx = \frac{1}{5}e^xcos2x + \frac{2}{5}e^xsin2x + C.$$

Zamiast $\frac{1}{5}C$ zapisaliśmy tu $C.$ Jest to dopuszczalne, ponieważ $\frac{1}{5}$ stałej to też jest stała dowolna. Czasami całkę taką jak w PRZYKŁADZIE 5 nazywamy *całką powracającą*.

ĆWICZENIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA.

1. $\int xsin3xdx$
2. $\int \sqrt{x}\ lnx\ dx$
3. $\int x^6\ lnx\ dx$
4. $\int \sqrt[3]{x}\ lnx\ dx$
5. $\int (2x+3)cosx\ dx$
6. $\int arctgx\ dx$ wskazówka: $arctgx = 1 \cdot arctgx$
7. $\int x^2 e^x dx$
8. $\int e^{2x}\ sin3xdx$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.4 Całkowanie ułamków prostych

Ułamkiem prostym I rodzaju nazywamy wyrażenie postaci:

$$\frac{m}{(kx+l)^n}, \text{ gdzie } m,k,l \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Ułamkiem prostym II rodzaju nazywamy wyrażenie postaci:

$$\frac{rx+s}{(ax^2+bx+c)^n}, \text{ gdzie } a,b,c,r\,,s \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ oraz } \; b^2-4ac<0. \tag{6}$$

Całki z ułamków prostych I rodzaju obliczamy przez podstawienie : $\boldsymbol{kx+l=t}$

Przykład

$$\int \frac{5}{(6x-7)}dx = \left|\begin{matrix} 6x-7=t \\ 6dx=dt \\ dx=\frac{1}{6}dt \end{matrix}\right| = 5\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6}dt = \frac{5}{6}\ln\,|t|+C = \frac{5}{6}\ln\,|6x-7|+C$$

WZÓR OGÓLNY:

$$\boldsymbol{\int \frac{m}{(kx+l)}dx} = \left|\begin{matrix} kx+l=t \\ kdx=dt \\ dx=\frac{1}{k}dt \end{matrix}\right| = m\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{k}dt = \frac{m}{k}\ln\,|t|+C = \boldsymbol{\frac{m}{k}\ln\,|kx+l|+C}$$

Przykład

$$\int \frac{5}{(6x-7)^3}dx = \left|\begin{matrix} 6x-7=t \\ 6dx=dt \\ dx=\frac{1}{6}dt \end{matrix}\right| = 5\int \frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{6}dt = \frac{5}{6}\int t^{-3}dt = \frac{5}{6}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C = -\frac{5}{12t^2}+C =$$

$$= -\frac{5}{12(6x-7)^2}+C$$

Rozpatrzymy schemat obliczania całek z ułamków postaci: $\boldsymbol{\int \frac{rx+s}{(ax^2+bx+c)}dx}$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$\int \frac{\boldsymbol{rx+s}}{(\boldsymbol{ax^2+bx+c})}\boldsymbol{dx}$$

mianownik do postaci kanonicznej

$$\int \frac{\boldsymbol{rx+s}}{\boldsymbol{a(x-p)^2+q}}\boldsymbol{dx} \qquad \left(\boldsymbol{p=-\frac{b}{2a},\ \ q=-\frac{b^2-4ac}{4a}}\right)$$

podstawienie $\boldsymbol{x-p=\sqrt{\frac{q}{a}}\ t}$

$$\int \frac{\boldsymbol{ht+g}}{\boldsymbol{t^2+1}}\boldsymbol{dt}$$

$\boldsymbol{h\int \frac{t}{t^2+1}dt}$ + $\boldsymbol{g\int \frac{1}{t^2+1}dt}$

podstawienie $t^2+1=u$

$= \boldsymbol{g\ arctgx+\ C}$

$$=\boldsymbol{\frac{h}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{h}{2}\ln|u|+C}$$

PRZYKŁAD

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+10}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+9}=\left|\begin{array}{c}\text{jest to ułamek prosty II rodzaju, }\Delta<0\\ p=-\frac{2}{2}=-1,\qquad q=-\frac{-36}{4}=9\\ \text{postać kanoniczna: }(x+1)^2+9\end{array}\right|$$

$$=\left|\begin{array}{c}x+1=3t\\ dx=3dt\\ \text{bo }\sqrt{\frac{q}{a}}=\sqrt{\frac{9}{1}}=3\end{array}\right|=\int\frac{3dt}{9t^2+9}=$$

$$=\frac{3}{9}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{3}arctgt+C=\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

Przykład .

W tym przykładzie nieco trudniejszym od przykładu poprzedniego. Postępujemy analogicznie:

$$\int \frac{(3x+2)dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)^2+9} = \begin{vmatrix} x+1=3t \\ dx=3dt \\ x=3t-1 \end{vmatrix} = \int \frac{3(3t-1)3dt}{9t^2+9}$$
$$= \int \frac{9(3t-1)dt}{9t^2+9} = \frac{9}{9}\int \frac{(3t-1)dt}{t^2+1} =$$

$$= 3\int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}\ln(t^2+1) - arctgt + C =$$

$= \frac{3}{2}\ln\left(\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1\right) - arctg\frac{x+1}{3} + C$ (pierwsza całka: $\int \frac{tdt}{t^2+1}$ jest obliczana według wzoru $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$)

7.5 Obliczanie całek funkcji wymiernych

7.5.1 Typ1: $\boldsymbol{I = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx}$.

Przypadek 1 $(\Delta < 0, \quad A = 0)$.

Wyrażenie znajdujące się w mianowniku funkcji podcałkowej sprowadzamy do postaci kanonicznej, stosujemy podstawienie, a następnie obliczamy całkę I stosując wzór

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C.$$

Przykład 1.

Obliczyć całkę
$$I = \int \frac{3}{2x^2+8x+10} dx.$$

Rozwiązanie:

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \left| \begin{array}{l} \Delta = 4^2 - 20 = -4 < 0 \\ mianownik\ wyrazenia\ podcalkowego \\ sprowadzamy\ do\ postaci\ kanonicznej \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$= \left| \begin{array}{l} podstawiamy: \\ x+2 = t, \quad dx = dt \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2} arctgt + C$$

$$= \left| \begin{array}{l} wracamy\ do \\ poprzedniej\ zmiennej \\ biorac\ \ t = x+2 \end{array} \right| = \frac{3}{2} arctg(x+2) + C.$$

Przypadek : $\boldsymbol{\Delta < 0, \quad A \neq 0}$

Najpierw wyrażenie w liczniku przekształcamy tak, aby otrzymać sumę pochodnej wyrażenia znajdującego się w mianowniku $2ax+b$ oraz stałej d. Następnie całkę rozkładamy na sumę dwóch całek

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{d}{ax^2+bx+c} dx,$$

z których jedną obliczmy korzystając ze wzoru na całkę logarytmiczną

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln\left|ax^2+bx+c\right|,$$

natomiast drugą całkę obliczamy sprowadzając mianownik wyrażenia podcałkowego do postaci kanonicznej i stosujemy wzór

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt. + C$$

Przykład

Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{4x+3}{x^2+2x+10}dx.$$

Rozwiązanie:

$$I = \int \frac{4x+3}{x^2+2x+10}dx = \left|\begin{matrix} \varDelta = 2^2 - 40 = -36 \\ z\ licznika \\ wyłączamy\ 2 \end{matrix}\right| = 2\int \frac{2x+\frac{3}{2}}{x^2+2x+10}dx$$

$$= \left|\begin{matrix} w\ liczniku\ \ dodajemy \\ i\ \ odejmujemy\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right| = 2\int \frac{2x+2-\frac{1}{2}}{x^2+2x+10}dx = \left|\begin{matrix} wyrażenie\ podcałkowe \\ rozkładamy\ na\ sumę \\ dwóch\ wyrażeń \end{matrix}\right|$$

$$= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx + 2\int \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+2x+10}dx = 2\ln\left|x^2+2x+10\right| - \int \frac{dx}{x^2+2x+10}$$

$$= \left|\begin{matrix} sprowadzamy\ mianownik \\ wyrażenia\ podcałkowego \\ do\ postaci\ kanonicznej \end{matrix}\right| = 2\ln\left|x^2+2x+10\right| - \int \frac{dx}{(x+1)^2+9}$$

$$= \left|\begin{matrix} wyłączamy\ 9\ z\ mianownika \\ wyrażenia\ podcałkowego \end{matrix}\right| = 2\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}$$

$$= \left|\begin{matrix} podstawiamy: \\ \frac{x+1}{3} = t, \quad \frac{1}{3}dx = dt, \quad dx = 3dt \end{matrix}\right| = 2\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{t^2+1}$$

$$= 2\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{1}{3}arctgt + C = \left|\begin{matrix} wracamy\ do \\ poprzedniej\ zmiennej \\ podstawiając\ \ t = \frac{x+1}{3} \end{matrix}\right|$$

$$= 2\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

Przypadek $\Delta > 0$

Mianownik wyrażenia podcałkowego rozkładamy na czynniki, korzystając ze wzoru

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

Przykład

Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{3x+1}{x^2+2x-3}dx.$$

Rozwiązanie:

$$I=\int\frac{3x+1}{x^2+2x-3}dx = \left|\begin{array}{l}\Delta=2^2+12=16>0\\ x_1=-3,\ x_2=1\end{array}\right| = \int\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}dx$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{rozkład na ułamki proste}\\ \frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)}\\ 3x+1=A(x-1)+B(x+3)\end{array}\right|$$ *(mianowniki ułamków są równe, to liczniki też muszą być równe)*

Uwaga: Aby wyznaczyć parametry A i B możemy skorzystać z jednej z dwóch metod.

Metoda 1: Porównując stronami współczynniki przy tych samych potęgach.
Metoda 2: Podstawiając w miejsce x miejsca zerowe mianownika lub dowolne liczby rzeczywiste.
W obu metodach dochodzimy do układu równań liniowych.

$$=\left|\begin{array}{l}Metoda\ 1\\ 3x+1=A(x-1)+B(x+3)\\ x^1:\ 3=A+B \quad \text{A=2}\\ x^0:\ 1=-A+3B \quad \text{B=1}\end{array}\right| \text{ lub } \left|\begin{array}{l}Metoda\ 2\\ 3x+1=A(x-1)+B(x+3)\\ x=-3 \quad -8=-4A \quad \text{A=2}\\ x=1 \quad 4=4B \quad \text{B=1}\end{array}\right|$$

$$= \int [\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-1}]dx = 2\ln|x+3| + \ln|x-1| + C.$$

Przypadek $\Delta = 0$

Mianownik wyrażenia podcałkowego rozkładamy na czynniki, korzystając ze wzoru

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2,$$

a następnie wyrażenie to rozkładamy na ułamki proste i całkujemy.

Przykład

Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx.$$

Rozwiązanie:

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx = \left| \begin{matrix} \Delta = 2^2 - 4 = 0 \\ x_0 = -1 \end{matrix} \right| = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \left| \begin{matrix} \textit{rozkład na ułamki proste} \\ \frac{2x+1}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2} \\ 2x+1 = A + B(x+1) \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \textit{Metoda 1} & & \\ x^1 & 2 = B & B=2 \\ x^0 & 1 = A + B & A = -1 \end{matrix} \right|$$

$$= \int [\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}]dx = \frac{1}{x+1} + 2\ln|x+1| + C.$$

7.5.2 Typ 2: $\int \frac{L(x)}{M(x)} dx$, $(\textit{stopień } L(x) < \textit{stopień } M(x))$.

Mianownik wyrażenia podcałkowego rozkładamy na czynniki, następnie wyrażenie podcałkowe rozkładamy na ułamki proste i całkujemy korzystając z metod stosowanych przy obliczaniu całek Typu1.

Przykład

Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{x+4}{x^3 - x^2 - 2x} dx.$$

Rozwiązanie:

$$I = \int \frac{x+4}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int \frac{x+4}{x(x^2 - x - 2)} dx = \begin{vmatrix} \Delta = 1^2 + 8 = 9 \\ x_1 = -1,\ x_2 = 2 \end{vmatrix}$$

$$= \int \frac{x+4}{x(x+1)(x-2)} dx = \begin{vmatrix} \dfrac{x+4}{x(x+1)(x-2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-2} \\ = \dfrac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+4 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1) & & \\ x = 0 & 4 = -2A & A = -2 \\ x = -1 & 3 = 3B & B = 1 \\ x = 2 & 6 = 6C & C = 1 \end{vmatrix}$$

$$= \int [\frac{-2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}] dx = -2\ln|x| + \ln|x+1| + \ln|x-2| + C.$$

7.5.3 Typ 3: $\int \frac{L(x)}{M(x)} dx$, $(stopień\ L(x) \geq stopień\ M(x))$.

Dzielimy licznik $L(x)$ wyrażenia podcałkowego przez mianownik $M(x)$, rozkładamy całkę na sumę całki z wielomianu oraz całki Typu 1 lub Typu 2, a następnie całkujemy.

Przykład

Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4}{x^3 + x} dx.$$

Rozwiązanie:

$$I = \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4}{x^3 + x} dx = \begin{vmatrix} dzielimy\ licznik\ wyrażenia \\ podcałkowego\ przez\ jego\ mianownik \end{vmatrix}$$

$$= \int [x + \frac{-3x^2 + 4}{x^3 + x}] dx = \int x dx + \int \frac{-3x^2 + 4}{x^3 + x} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-3x^2 + 4}{x(x^2 + 1)} dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{-3x^2+4}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+x}{x^2+1} \\ = \dfrac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{lll} -3x^2+4 = A(x^2+1)+(Bx+C)x & & \\ x=0 & 4=A & A=4 \\ x=1 & 1=2A+B+C & B=-7 \\ x=-1 & 1=2A+B-C & C=0 \end{array} \right|$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int [\frac{4}{x} + \frac{-7x}{x^2+1}]dx = \frac{x^2}{2} + 4\int \frac{1}{x}dx - \frac{7}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}]dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4\ln|x| - \frac{7}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA:

a. $\int \frac{1}{x(x-1)}dx,$
b. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}dx,$
c. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3},$
d. $\int \frac{x^4}{x-1}dx,$
e. $\int \frac{x}{(x-1)(4x+1)}dx,$
f. $\int \frac{x^3-1}{x^3+x}dx.$

7.6 Zadania różne.

Przykłady do ćwiczeń.

Pomocne wzory:

1. $sin2x = 2sinxcosx$
2. $cos2x = cos^2x - sin^2x$
3. $sin^2x + cos^2x = 1$
4. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
5. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

7.6.1 ZADANIA ROZWIĄZANE

a) $\int (2x-3)^2\,dx = \int (4x^2-12x+9)dx = 4\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 9x + C = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + C$

b) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = 4\sqrt[4]{x} + C$

c) $\int \frac{(2+x)^2}{x^2}dx = \int \frac{4+4x+x^2}{x^2}dx = \int \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)dx = \int \left(4x^{-2} + 4\frac{1}{x} + 1\right)dx = 4\frac{x^{-1}}{-1} + 4\ln|\,x| + x + C = -\frac{4}{x}\;4\ln|\,x| + x + C$

d) $\int \frac{sin2x}{sinx}dx = \int \frac{2sinxcosx}{sinx}dx = 2\int cosx\;dx = 2\;sinx + C.$

e) $\int \frac{cos2x}{cos^2x}dx = \int \frac{cos^2x - sin^2x}{cos^2x}dx = \int \left(\frac{cos^2x}{cos^2x} - \frac{sin^2x}{cos^2x}\right)dx = \int \left(1 - \frac{1-cos^2x}{cos^2x}\right)dx = \int \left(1 - \frac{1}{cos^2x} + 1\right)dx = \int \left(2 - \frac{1}{cos^2x}\right)dx = 2x - tgx + C$

Zadania do rozwiązania

a) $\int \sqrt{x}\;(1-x)^2dx$

b) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}}{x}\;dx$

c) $\int \frac{x^4-16}{x+2}dx$

d) $\int \frac{cos2x}{sin^2x}dx$

e) $\int \frac{cos2x}{sin^2x\,cos^2x}dx$

f) $\int \frac{cos2x}{sinx-cosx}dx$

g) $\int \left(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right)^2\,dx$

METODY CAŁKOWANIA

1. OBLICZ CAŁKI

a) $\int (5x^3 - 6)\, x^2 dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{16-9x^2}} dx$

c) $\int \frac{x}{x^4+1} dx$

d) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

e) $\int \cos^2 x\, dx$

f) $\int \sin^2 x\, dx$

g) $\int x\ \mathrm{arctg}\, x dx$

h) $\int \sin\,(\ln x)\, dx$

i) $\int x^2 \cos^2 x\, dx$

j) $\int x \ln^3 x\, dx$

k) $\int \frac{dx}{2x-1}$

l) $\int \frac{dx}{ax+b}$

m) $\int \frac{5}{(x+3)^4} dx$

n) $\int \frac{1}{(ax+b)^k} dx$

o) $\int \frac{dx}{3-2\sqrt{x}}$

p) $\int x \sqrt[3]{x-2}\ dx$

q) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}$

r) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{sin^2 x}} dx$

s) $\int \frac{dx}{x \sqrt[4]{2\ln x + 5}}$

t) $\int \frac{2}{x^4} \sin \frac{1}{x^3} dx$

u) $\int \frac{cos^3 x}{\sqrt[3]{sinx}} dx$

w) $\int (2x^3 - 6x + 2) \ln x\, dx$

x) $\int (2x-3)\, e^{2x} dx$

y) $\int (x^2 - 2x + 2) \cos x\, dx$

z)* $\int sin^3 x e^{cosx} dx$

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH

a. $\int \frac{1}{x(x-1)} dx,$
b. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10} dx,$
c. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3},$

d. $\int \frac{x^4}{x-1} dx,$ *wskazówka: najpierw podzielić licznik przez mianownik.*

e. $\int \frac{x}{(x-1)(4x+1)} dx,$

f. $\int \frac{x^3-1}{x^3+x} dx$ *wskazówka: patrz przykład d)*

g. $\int \frac{2}{x^2+2x} dx$

h. $\int \frac{2x^5-2x+4}{x^4-1} dx$ *wskazówka: patrz przykład d)*

7.7 CAŁKA OZNACZONA

7.7.1 Całka oznaczona

Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w przedziale $< a,b >$.

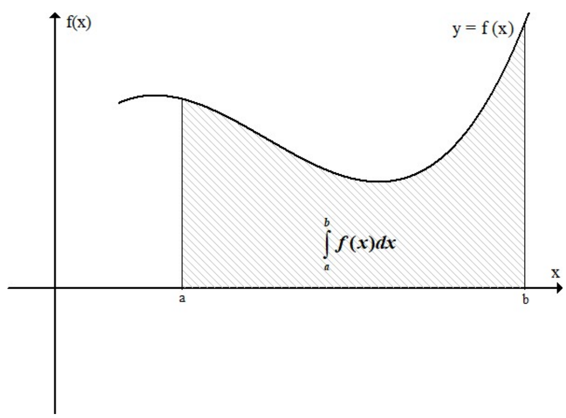
Przedział ten dzielimy punktami $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n$ takimi, że $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$ W każdym przedziale $< x_{k-1}, x_k),\ \ k = 1.2,\ldots,n,$ wybieramy punkt ξ_k obliczamy w nim wartość funkcji $f(\xi_k)$ i tworzymy sumę

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

gdzie

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

jest długością przedziału $< x_{k-1}, x_k)$.
Zatem iloczyn $f(\xi_k)\Delta x_k$ jest polem prostokąta o bokach równych: $f(\xi_k)$ oraz Δx_k.



Rys.2.1. Interpretacja geometryczna definicji całki oznaczonej.

Definicja 1 .
Ciąg podziału przedziału $< a,b >$ punktami $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$ nazywamy normalnym, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

gdzie

$$\delta_n = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k .$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Definicja 2.
Jeśli dla każdego normalnego podziału przedziału $<a,b>$, niezależnie od wyboru punktów ξ_k, istnieje taka sama granica właściwa ciągu sum σ_n, to granicę tę nazywamy całką oznaczoną funkcji $f(x)$ w przedziale $<a,b>$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy wtedy całkowalną w przedziale $<a,b>$.

Mamy zatem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n.$$

Z definicji całki oznaczonej wynikają jej podstawowe własności ujęte w następującym twierdzeniu.

7.7.2 Własności całki oznaczonej

Twierdzenie 1. (własności całki oznaczonej)

Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne w przedziale $<a,b>$, to

1. $\int_a^b 0dx = 0,$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0,$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$
4. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$
5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$
6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a \le c \le b.$

Wniosek 1.

Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna i nieujemna w przedziale $<a,b>$, to

$$\int_a^b f(x)dx = |D|,$$

gdzie $|D|$ jest polem obszaru

$$D = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Wniosek 2.

Jeśli funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są całkowalne w przedziale $<a,b>$ oraz $f_1(x) \le f_2(x)$ dla $x \in <a,b>$, to pole obszaru

$$D = \{(x,y): a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\},$$

określone jest wzorem

$$|D| = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

Twierdzenie 2. (*Newtona-Leibniza*)

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $<a,b>$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \equiv F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $<a,b>$, tzn.

$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in <a,b>.$$

Przykład

Obliczyć całkę $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^2})dx.$

Rozwiązanie:

Mamy tutaj

$$\int_1^2 [x^2 + \frac{1}{x^2}]dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = (\frac{2^3}{3} - \frac{1}{2}) - (\frac{1^3}{3} - \frac{1}{1}) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{17}{6}.$$

Przykład

Obliczyć całkę

$$I=\int_1^4 \frac{dx}{x^4+x^3}.$$

Rozwiązanie:

Obliczmy najpierw całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^4+x^3} = \int \frac{dx}{x^3(x+1)}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x^3(x+1)} = \dfrac{A}{x^3}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x}+\dfrac{D}{x+1} \\ = \dfrac{A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2(x+1)+Dx^3}{x^3(x+1)} \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{lll} A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2(x+1)+Dx^3 & & \\ x^3 & 0=C+D & A=1 \\ x^2 & 0=B+C & B=-1 \\ x^1 & 0=A+B & C=1 \\ x^0 & 1=A & D=-1 \end{array} \right|$$

$$= \int [\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}]dx = -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\ln|x|-\ln|x+1|+C.$$

Zatem

$$I = [-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\ln|x|-\ln|x+1|]_1^4$$

$$= (-\frac{1}{32}+\frac{1}{4}+\ln 4-\ln 5)-(-\frac{1}{2}+1+\ln 1-\ln 2) = -\frac{9}{32}+\ln\frac{8}{5}.$$

Przykład

Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi/4} cos\, 2\, x\, dx.$$

Rozwiązanie:

Mamy tutaj

$$\int_0^{\pi/4}\cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

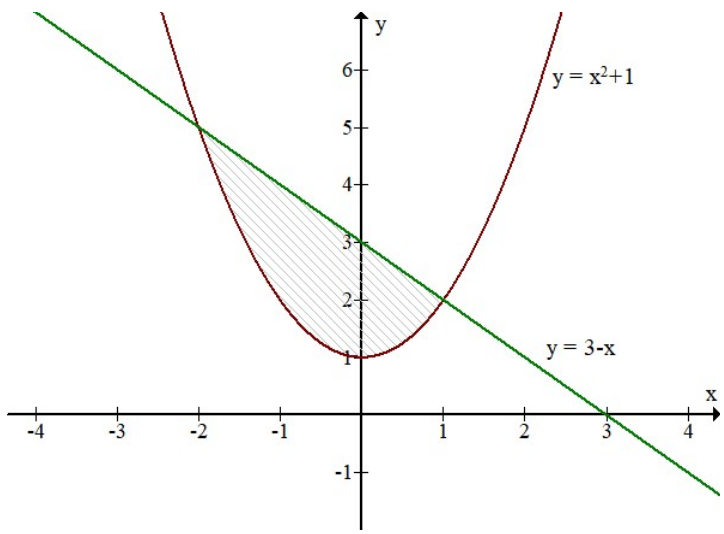
Przykład

Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

$$D: \{y = x^2 + 1,\ y = 3 - x\}.$$

Rozwiązanie:

Znajdujemy punkty przecięcia się krzywych rozwiązując układ równań



Rys. 2.2. Wykres obszaru D

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x^2 + 1 = 3 - x, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x_1 = -2,\ x_2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 5,\ y_2 = 2 \\ x_1 = -2,\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Stąd i z interpretacji geometrycznej mamy

$$D: \begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 \le y \le 3 - x. \end{cases}$$

Zatem

$$|D| = \int_{-2}^{1}[(3-x)-(x^2+1)]dx \;=\; \int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx \;=\; [2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_{-2}^{1}$$

$$= (2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) \text{ - } (-4-2+\frac{8}{3}) \;=\; 5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

7.7.3 Metody całkowania dla całki oznaczonej

Twierdzenie 3. (o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej)

Jeśli funkcja $t = g(x)$ ma ciągłą pochodną $g'(x)$ w przedziale $< a,b >$ i przekształca go na przedział $< \alpha, \beta >$, na którym określona jest ciągła funkcja $f(t)$, a ponadto $g(a) = \alpha$ oraz $g(b) = \beta$, to

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \left| \begin{array}{lll} \textit{stosujemy podstawienie}: & & \\ g(x) = t, & g'(x)dx = dt & \\ x: & a & b \\ t: & \alpha = g(a) & \beta = g(b) \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(t)dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{całkujemy, tzn.} \\ \textit{znajdujemy funkcję } F(t) \\ \textit{taką, że} \\ F'(t) = f(t) \end{array} \right| = [F(t)]_\alpha^\beta \;=\; F(\beta) - F(\alpha).$$

Przykład

Obliczyć całkę

$$I = \int_0^1 xe^{-x^2}dx.$$

Rozwiązanie:

Mamy tutaj :

<u>Metoda I.</u>

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} stosujemy\ podstawienie: \\ -x^2 = t, \quad -2xdx = dt, \quad xdx = -\frac{1}{2}dt \\ x: \qquad 0, \qquad\qquad 1 \\ t: \quad -(0)^2 = 0, \quad -(1)^2 = -1 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^t dt = -\frac{1}{2}e^t\Big|_0^{-1} = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}.$$

Metoda II.

Można inaczej, a mianowicie obliczamy najpierw całkę nieoznaczoną

$$\int xe^{-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} stosujemy\ podstawienie: \\ -x^2 = t, \quad -2xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C,$$

a następnie

$$I = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}.$$

Twierdzenie 4. (*o całkowaniu przez części dla całek oznaczonych*)

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ mają ciągłe pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$ w przedziale $<a,b>$, to

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left| \begin{array}{l} przyjmujemy: \\ \qquad u(x) = f(x), \quad v'(x) = g(x) \\ obliczamy: \\ \qquad u'(x) = f'(x), \quad v(x) = \int g(x)dx \end{array} \right| =$$

$$= u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Przykład

Obliczyć całkę

$$I = \int_1^e x \ln x \, dx.$$

Rozwiązanie:

Mamy tutaj

Metoda I.

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} przyjmujemy: & \\ f(x) = \ln x, & g'(x) = x \\ f'(x) = \frac{1}{x}, & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$= \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 \; - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Metoda II.

Można inaczej, a mianowicie obliczamy najpierw całkę nieoznaczoną

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} przyjmujemy: & \\ f(x) = \ln x, & g'(x) = x \\ f'(x) = \frac{1}{x}, & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \; = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C,$$

a następnie

$$I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

ĆWICZENIA

1. Oblicz całki oznaczone

a. $\int_0^1 \sqrt{1+3x} dx,$

b. $\int_{-1}^0 \frac{1}{(3+2x)^4} dx,$

c. $\int_0^{\ln 2} (e^x - 1) e^x dx,$

d. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x(2+4\ln x)^3}$,

e. $\int\limits_{1}^{2} \frac{2x+1}{x^3-2x^2+3x}dx$,

f. $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin x dx$,

g. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^4 x \sin x dx$,

h. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$,

7.7.4 Ćwiczenia : Obliczanie całek oznaczonych

A.

1. $\int_0^2 \sqrt[3]{4x+1}\ dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} 2x\, dx$
3. $\int_0^8 t\sqrt{t+1}\ dt$
4. $\int_1^2 \frac{x^3}{(x+2)^2}\ dx$
5. $\int_0^{\pi} (1+\cos x)^2 dx$
6. $\int_{\sqrt[5]{-3}}^{\sqrt[5]{-2}} \frac{x^4}{x^{10}+6x^5+10} dx.$

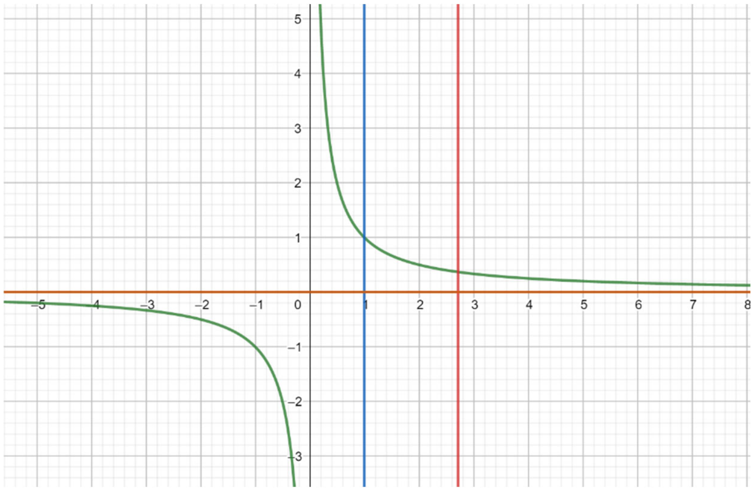
B.

OBLICZ POLA FIGUR OGRANICZONYCH KRZYWYMI

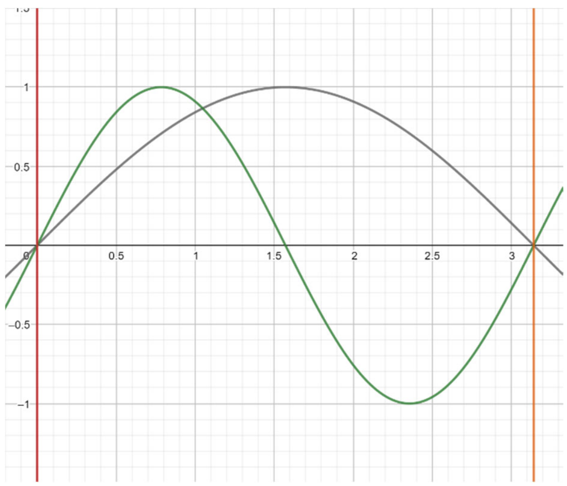
1. $y=\frac{1}{x},\ 1\le x\le e,\ y=0.$
2. $y=\sin 2x\,,\ y=sin\, x\,, 0\le x\le \pi.$
3. $y=\ln x\,,\ y=1-x,\ x=e.$
4. $y=x^2,\ y=8-x^2.$
5. $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1.$

https://www.geogebra.org/graphing

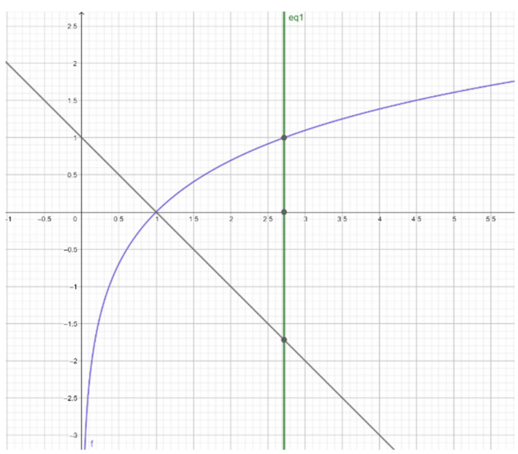
B1.



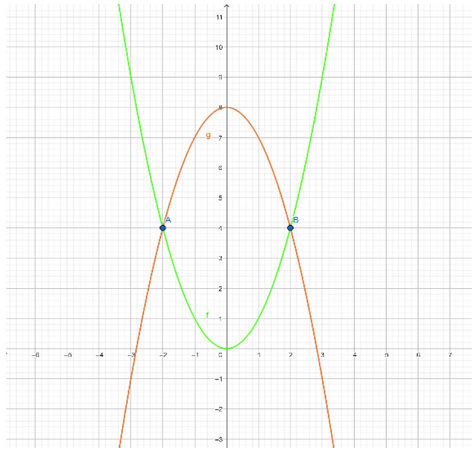
B2.



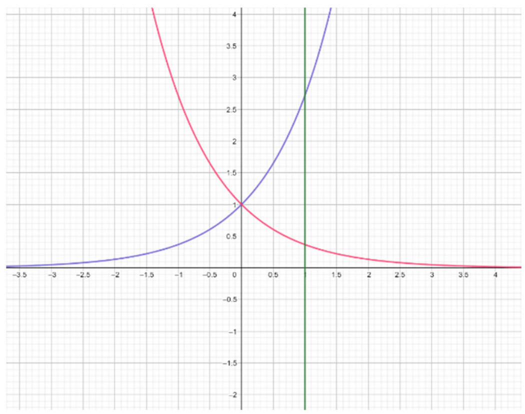
B3.



B4.



B5.

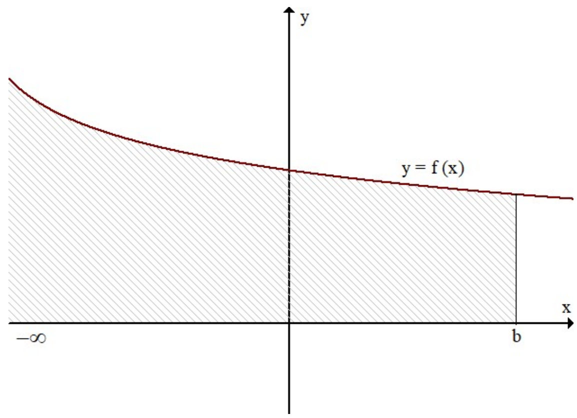


7.8 Całki niewłaściwe

Definicja 1.

Całką niewłaściwą 1-go rodzaju funkcji $f(x)$ w przedziale $(-\infty, b]$ nazywamy

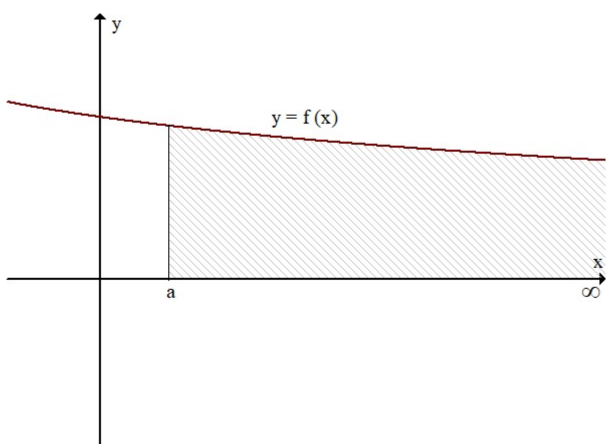
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{b} f(x)dx. \quad (1)$$



Rys.3.1. Interpretacja całki niewłaściwej 1-go rodzaju w przedziale $(-\infty, b]$.

Natomiast *całką niewłaściwą 1-go rodzaju* funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, +\infty)$ nazywamy

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \to +\infty} \int_{a}^{B} f(x)dx. \quad (2)$$

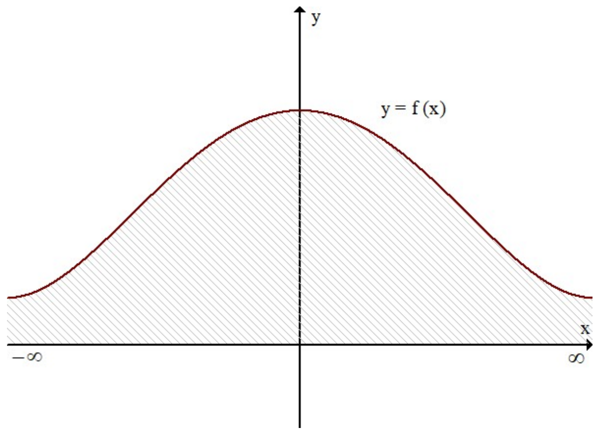


Rys.3.2. Interpretacja całki niewłaściwej 1-go rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$.

Całką niewłaściwą 1-go rodzaju funkcji $f(x)$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$nazywamy

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int_0^B f(x)dx. \qquad (3)$$



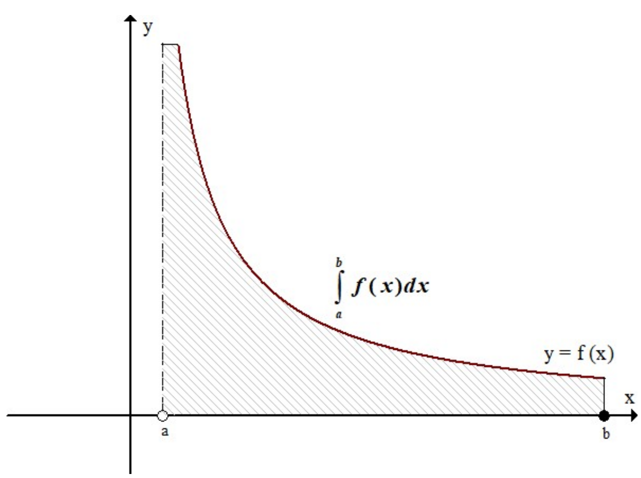
Rys. 3.3. Interpretacja całki niewłaściwej 1-go rodzaju w przedziale $(-\infty,+\infty)$

Całki niewłaściwe 1-go rodzaju nazywamy ***zbieżnymi,*** gdy istnieją granice właściwe występujące w ich określeniach, w przeciwnym przypadku całki te nazywamy ***rozbieżnymi***.

Definicja 2.

Całką niewłaściwą 2-go rodzaju funkcji $f(x)$ w przedziale $[a,b]$, *nieograniczonej w prawostronnym sąsiedztwie punktu* a, nazywamy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (4)$$

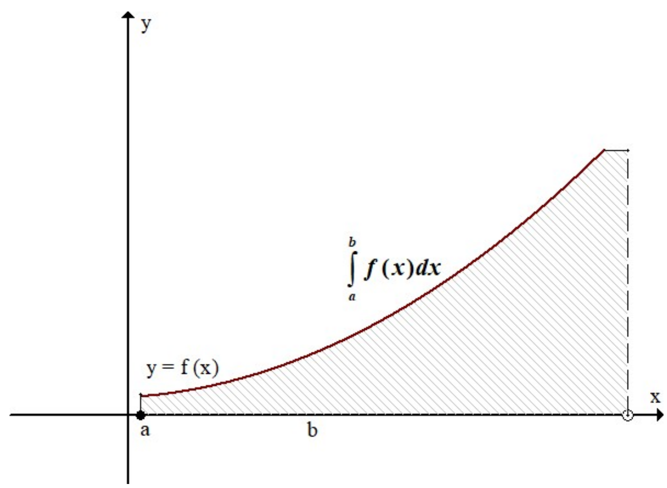


Rys. 3.4. Interpretacja całki niewłaściwej 2-go rodzaju.

Natomiast *całką niewłaściwą 2-go rodzaju* funkcji $f(x)$ w przedziale $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, *nieograniczonej w lewostronnym sąsiedztwie punktu* $\boldsymbol{b}$, nazywamy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{5}$$

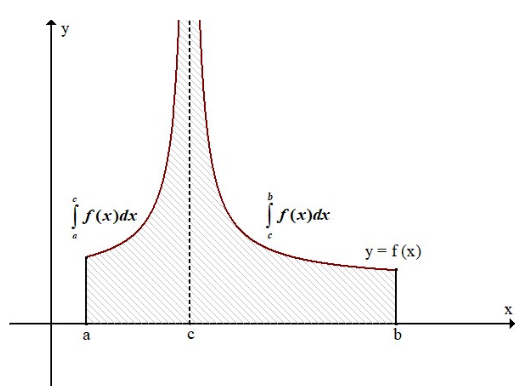
<u>Przypomnienie</u>: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}$ *oznacza granicę prawostronną!*



Rys.3.5. Interpretacja całki niewłaściwej 2-go rodzaju.

Całką niewłaściwą 2-go rodzaju funkcji $f(x)$ w przedziale $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, *nieograniczonej w dokładnie jednym punkcie* $\boldsymbol{c}\in(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, nazywamy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{6}$$



Rys. 3.6. Interpretacja całki niewłaściwej 2-go rodzaju.

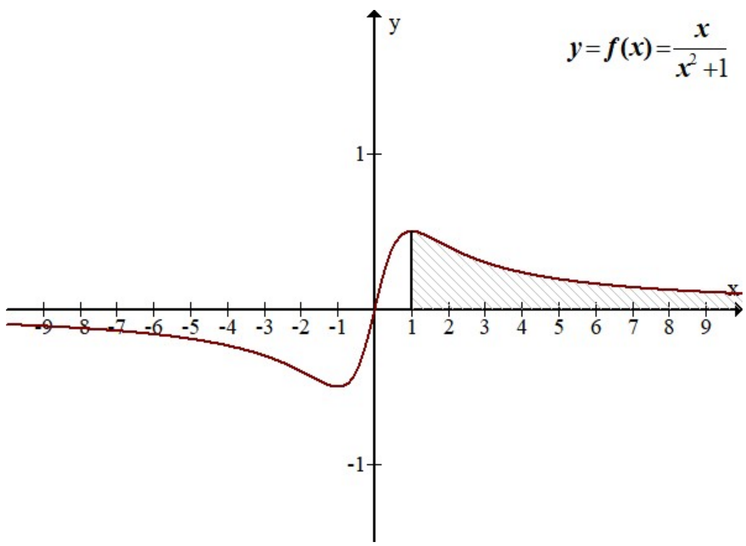
Całki niewłaściwe 2-go rodzaju nazywamy ***zbieżnymi***, gdy istnieją granice właściwe występujące w ich określeniach, w przeciwnym przypadku całki te nazywamy ***rozbieżnymi***.

Przykład

Obliczyć całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

Rozwiązanie:
Zrobimy pomocniczy rysunek ilustrujący zadanie, które mamy rozwiązać:



Rys. 3.7. Interpretacja całki niewłaściwej 1-go rodzaju w przedziale $[1, +\infty)$.

Korzystając ze wzoru (2) mamy

$$I = \lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{1}{2}ln(x^2+1)\right]_1^B =$$

Przypomnienie: najpierw za x podstawiamy granicę górną: B, a następnie dolną: 1 .

$$= \lim_{B\to+\infty}[\frac{1}{2}\ln(B^2+1) - \frac{1}{2}\ln 2] = \lim_{B\to+\infty}[\frac{1}{2}\ln\frac{B^2+1}{2}] = +\infty.$$

Granica nie jest granicą właściwą, a zatem całka ta jest *rozbieżna*.

Przykład

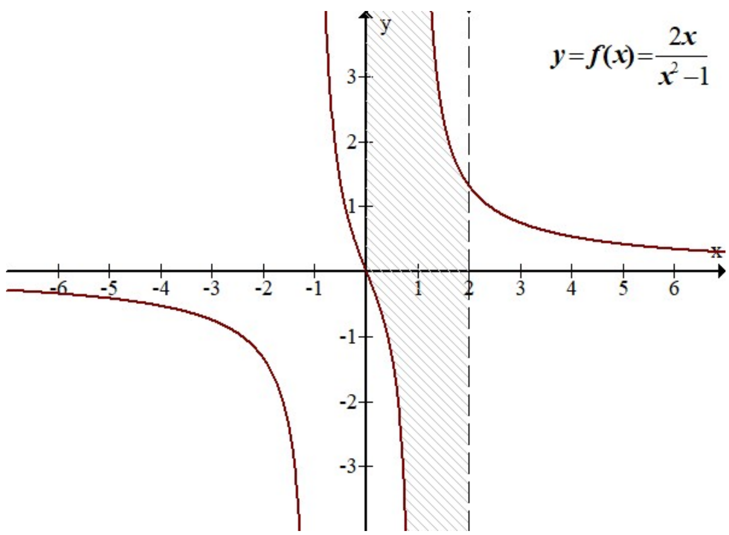
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Obliczyć całkę niewłaściwą 2-go rodzaju

$$I = \int_0^2 \frac{2x}{x^2-1}\,dx.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla x=1 funkcja $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ jest nieokreślona (mianownik jest równy zero!). A zatem niewłaściwość istnieje wewnątrz przedziału całkowania, a mianowicie w punkcie $x = 1$. Wobec tego musimy skorzystać ze wzoru (6).



Rys. 3.8. Interpretacja całki niewłaściwej 2-go rodzaju w przedziale $[0\,,2]$.

Wobec tego rozwiązanie wygląda następująco:

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{2x}{x^2-1}dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{2x}{x^2-1}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} ln|x^2-1|\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} ln|x^2-1|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} ln|(x-1)(x+1)|\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} ln|(x-1)(x+1)|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}$$

=

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(ln\big|\big(1-(1-\varepsilon)\big)(1-\varepsilon+1)\big| - ln\,|(0-1)(0+1)\,| + ln|(2-1)(2+1)| - ln\big|\big((1+\varepsilon)-1\big)(1+\varepsilon+1)\big|\Big) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln|-\varepsilon(2-\varepsilon)| - \ln|-1| + \ln 3 - \ln|\varepsilon(2+\varepsilon)|) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln|-\varepsilon(2-\varepsilon)| - \ln 1 + \ln 3 - \ln|\varepsilon(2+\varepsilon)|) =$$

Przypomnienie: $\mathbf{ln\,1 = 0}$

oraz własność logarytmów:

$$\boldsymbol{lnx - lny = ln\frac{x}{y}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(ln\left|\frac{\varepsilon(-2+\varepsilon)}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\right| + ln\,3\right) = ln\left|\frac{-2}{2}\right| + ln\,3 = ln\,1 + ln\,3 = ln\,3\,.$$

Otrzymany wynik: $ln\,3$ jest granicą właściwą, zatem całka ta jest *zbieżna*.

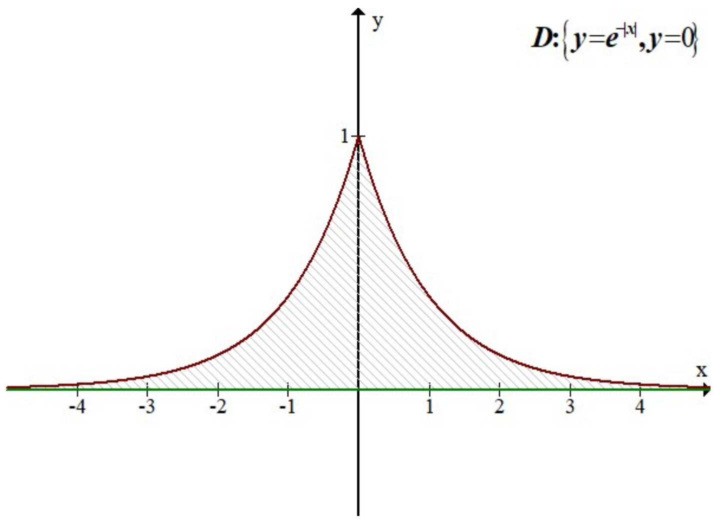
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Przykład

Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami

$$D\colon\{y=e^{-|x|},\quad y=0\}.$$

Rozwiązanie:
Z interpretacji graficznej obszaru D mamy



Rys.3.9. Wykres obszaru . D

$$D\colon\{-\infty<x<+\infty,\quad 0\le y\le e^{-|x|}\}.$$

Zatem

$|D|=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}\,dx=\left|\text{z definicji: } |x|=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}\right|=\int_{-\infty}^{0}e^{x}\,dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\,dx=\ \leftarrow$ *wzory* (1), (2)

$$=\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 e^x dx+\lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^{-x}dx=\lim_{A\to-\infty}[e^x]_A^0+\lim_{B\to+\infty}[-e^{-x}]_0^B=$$

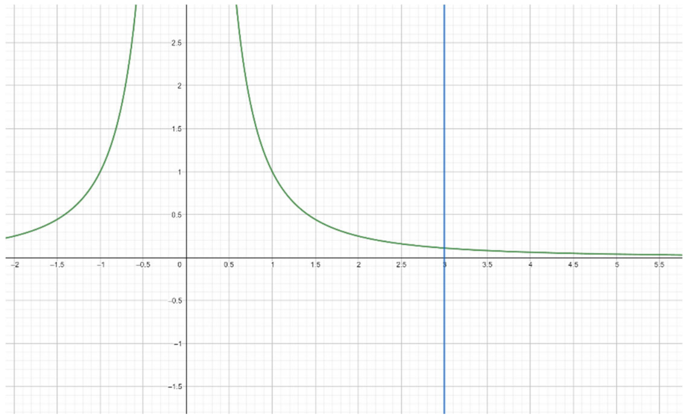
$$=\lim_{A\to-\infty}[1-e^A]+\lim_{B\to+\infty}[-e^{-B}+1]=1-0+0+1=2.$$

$$\left(\lim_{A\to-\infty}e^A=0,\ \lim_{B\to+\infty}(-e^{-B})=0,\ a^{-k}=\frac{1}{a^k}\right).$$

Pole obszaru D wynosi 2.

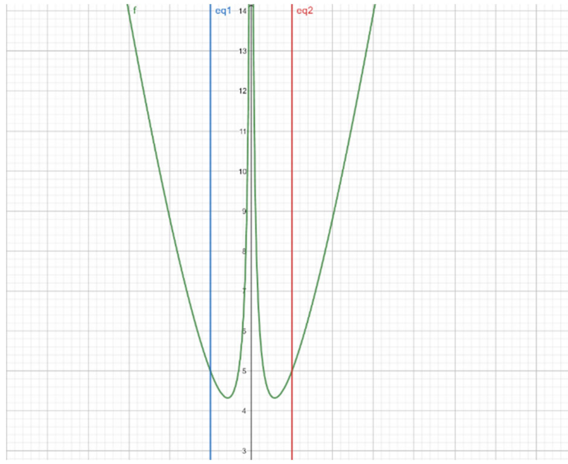
7.8.1 Zadania do samodzielnego obliczania 1.

1. Oblicz całkę $\int_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

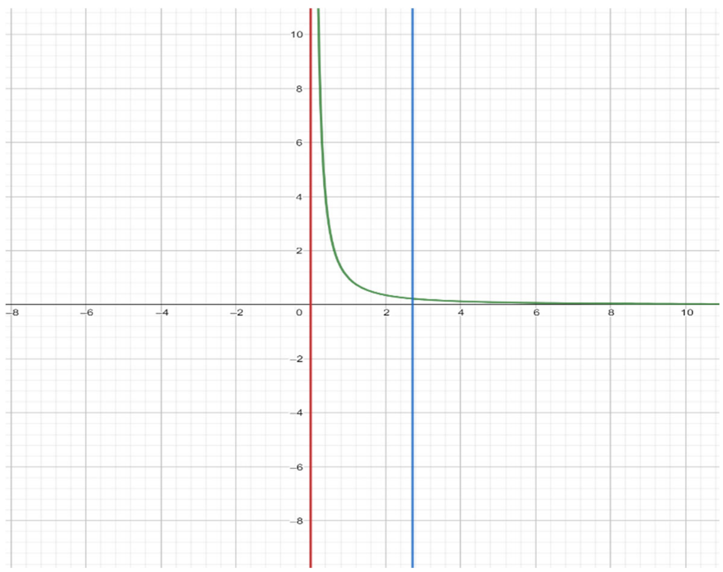


2. Oblicz całkę $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$.

3. Oblicz całkę $\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.



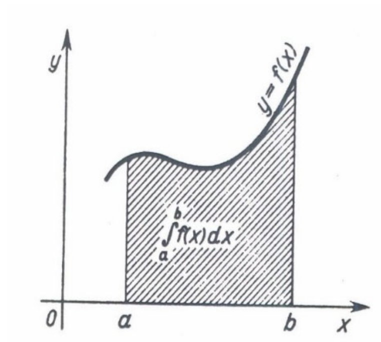
4. Oblicz całkę $\int_0^e \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

7.9 Zastosowania geometryczne całki oznaczonej

7.9.1 obliczanie pola figury



Rys.4.1. Pole obszaru D. [1]

Jeśli funkcja $f(x)$ jest całkowalna i nieujemna w przedziale $< a, b >$, to

$$\int_a^b |f(x)|dx = |D|, \tag{7}$$

gdzie $|D|$ jest polem obszaru $D = \{(x, y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$.

Wniosek.

Jeśli funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są całkowalne w przedziale $< a, b >$ oraz $f_1(x) \le f_2(x)$ dla $x \in < a, b >$, to pole obszaru

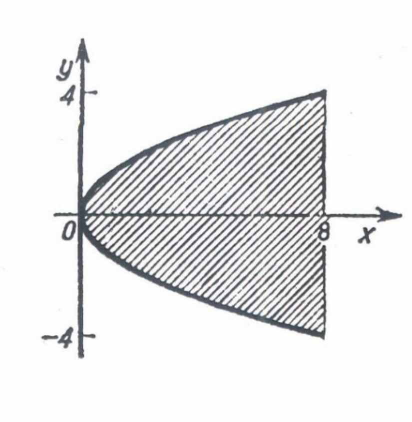
$$D = \{(x, y):\ a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\},$$

określone jest wzorem

$$|D| = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \tag{8}$$

Przykład [1]

Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukiem paraboli $y^2 = 2x$ oraz prostą $x = 8$.



Rys.4.2. Ilustracja przykładu 4. [1]

Rozwiązanie:

Parabola $\boldsymbol{y^2 = 2x}$ jest symetryczna względem osi OX. Zatem wystarczy obliczyć pole obszaru ograniczonego: górną częścią tej paraboli $\boldsymbol{y = \sqrt{2x}}$ osią OX oraz prostą $\boldsymbol{y = 8x}$, a następnie wynik ten pomnożyć przez 2. Zatem obliczamy:

$$|D| = 2\int_0^8 \sqrt{2x}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{2}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[8^{\frac{3}{2}} - 0\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}(\sqrt{8})^3 = \frac{128}{3}.$$

Zatem szukane pole wynosi $\frac{128}{3}$.

[1]. W. Krysicki, L. Włodarski: *„Analiza matematyczna w zadaniach część I”*, wydanie XXV, Warszawa 1999 PWN.

Przykład

Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $D: \{y = x^2 + 1,\ y = 3 - x\}$. *Rysunek do przykładu- jako ćwiczenie dla Studentów.*

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $y = x^2 + 1$ jest parabolą skierowaną ramionami ku górze, a $y = 3 - x$ jest równaniem prostej. Znajdujemy punkty przecięcia się krzywych rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x^2 + 1 = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x_1 = -2,\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5, \quad y_2 = 2 \\ x_1 = -2,\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Stąd i z interpretacji geometrycznej otrzymujemy D: $\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 \le y \le 3 - x. \end{cases}$

$|D| = \int_{-2}^{1} [(3 - x) - (x^2 + 1)] dx$ = $\int_{-2}^{1} (2 - x - x^2) dx$ = $[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{1}$

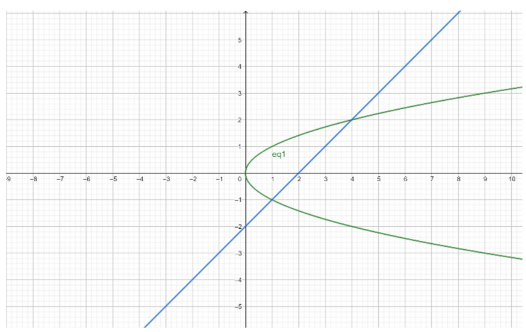
= $(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ - $(-4 - 2 + \frac{8}{3})$ = $5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

Szukane pole wynosi $\frac{9}{2}$.

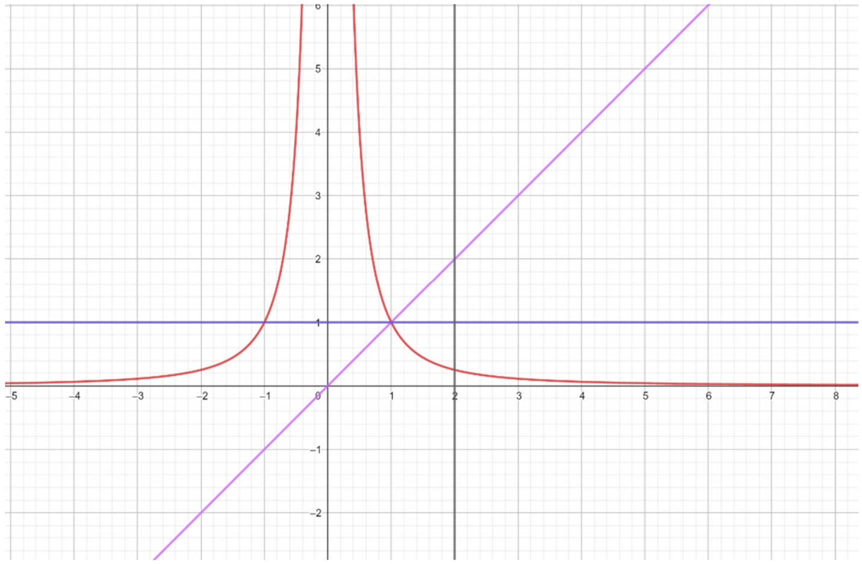
Zadania do samodzielnego obliczania:

1. Oblicz pole obszaru

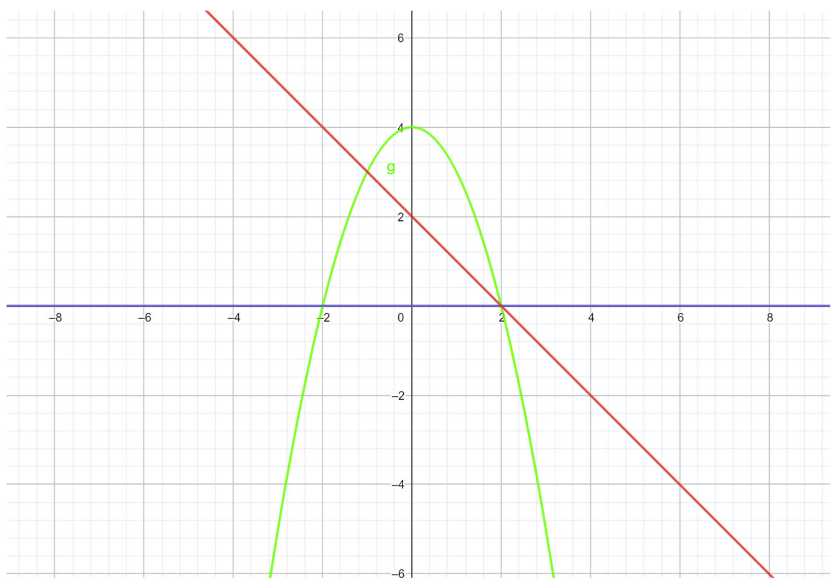
a) $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x = y^2. \end{cases}$



b) D: $\{y = 1/x^2, \quad y = x, \quad y = 1, \quad x = 2\}$.

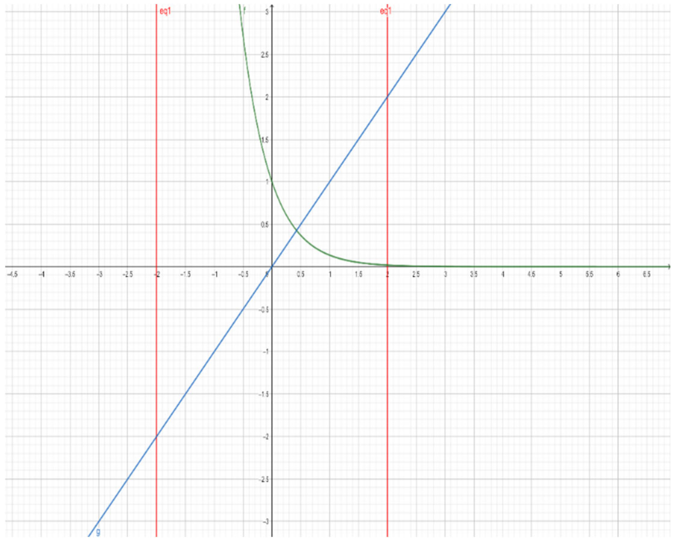


c) $D:\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x + y = 2 \\ y = 0. \end{cases}$



d) $D:\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x^2. \end{cases}$

e) $\boldsymbol{D}: \{\boldsymbol{x^2 = 4},\ \boldsymbol{y = e^{-2x}},\ \boldsymbol{y = x}\}.$


eq1
f
eq1
g

7.10 Obliczanie długości łuku

Jeżeli krzywa opisana jest równaniem $\boldsymbol{y = f(x)}$, przy czym funkcja $\boldsymbol{f(x)}$ ma w przedziale $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$ ciągłą pochodną $\boldsymbol{f'(x)}$, to *długość łuku funkcji* w tym przedziale wyraża się wzorem:

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (9)$$

Przykład.

Oblicz długość łuku o równaniu $9y^2 = 4x^3$, $0 \leq x \leq 3$.

Rozwiązanie:

Wyznaczmy *y* i obliczamy pochodną y':

$9y^2 = 4x^3, y^2 = \frac{4}{9}x^3, y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$

Następnie długość łuku *L* wykorzystując wzór (9):

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x}dx = \int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = [\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

7.10.1 Objętość bryły obrotowej i pole powierzchni bryły obrotowej

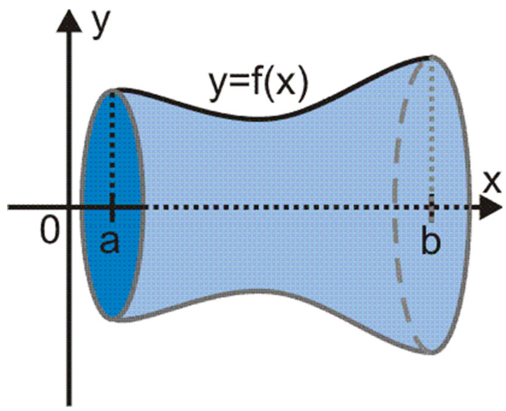
Niech dany będzie łuk krzywej $\boldsymbol{y = f(x)}$, przy czym funkcja $\boldsymbol{f(x)}$ jest ciągłą i nieujemna w przedziale $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$. Wówczas *objętość bryły obrotowej* powstałej z obrotu łuku dookoła osi OX, obliczamy według wzoru

$$|V| = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx \qquad (10)$$

a *pole powierzchni obrotowej* powstałej przez obrót łuku dookoła osi OX obliczamy według wzoru

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2\, dx} \qquad (11)$$

przy założeniu dodatkowym, że funkcja $\boldsymbol{y = f(x)}$ ma w przedziale $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$ ciągłą pochodną.



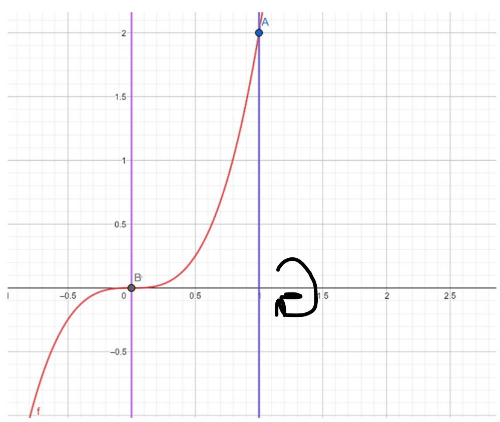
Rys.4.3 Bryła obrotowa powstała przez obrót łuku dookoła osi OX https://www.megamatma.pl/

Przykład

Oblicz pole powierzchni i objętość bryły obrotowej powstałej z obrotu krzywej $y = 2x^3$ dookoła osi OX w granicach $0 \le x \le 1$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy pochodną $f'(x) = 6x^2$.



Obliczamy objętość bryły obrotowej ze wzoru (10):

$$|V| = \pi \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx = \boldsymbol{\pi} \int_0^1 (2x^3)^2 dx = \boldsymbol{\pi} \int_0^1 4x^6 dx = \pi[\frac{4}{7}x^7]_0^1 = \frac{4}{7}\pi,$$

a następnie pole powierzchni obrotowej ze wzoru (11):

$$|S| = 2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi\int_0^1 2x^3\sqrt{1+36x^4}dx = \left|\begin{matrix} 1+36x^4 = t \\ 36\cdot 4x^3dx = dt \\ 2x^3dx = \frac{dt}{72}\end{matrix}\right| =$$

$$\frac{2\pi}{72}\int_1^{37}\sqrt{t}dt = \frac{\pi}{36}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{37} = \frac{\pi}{56}\left[t\sqrt{t}\right]_1^{37} = \frac{\pi}{56}(37\sqrt{37}-1).$$

Objętość bryły obrotowej powstałej z *obrotu dookoła osi OY* krzywej $x = g(y)$ w granicach $c \le y \le d$ obliczamy ze wzoru

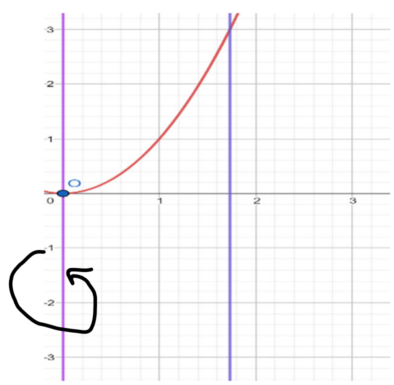
$$|V| = \pi\int_c^d x^2dy = \pi\int_c^d (g(y))^2dy, \tag{12}$$

natomiast *pole powierzchni bryły obrotowej* powstałej z *obrotu dookoła osi OY* krzywej $x = g(y)$ w granicach $c \le y \le d$ obliczamy według wzoru:

$$|S| = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}dy. \tag{13}$$

Przykład

Oblicz pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi OY paraboli $y = \frac{x^2}{2}$ w granicach $0 \le x \le \sqrt{3}$.



Rozwiązanie:

Ze wzoru $y = \frac{x^2}{2}$ wyznaczamy x, mianowicie $x^2 = 2y \Rightarrow x = \sqrt{2y}$,

$x = 0 \Rightarrow y = 0,\ \ x = \sqrt{3} \ \Rightarrow\ y = \frac{3}{2}$. Policzmy jeszcze pochodną $x'(y)$: $x'(y) = \frac{1}{2\sqrt{2y}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2y}}$,

$(x'(y))^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2y}}\right)^2 = \frac{1}{2y}$.

Zatem korzystając ze wzoru (12) obliczymy objętość:

$$|V| = \pi \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dy = \pi \int_0^{\frac{3}{2}} (\sqrt{2y})^2 dy = \pi \int_0^{\frac{3}{2}} 2y\, dy = \pi\, [y^2]_0^{\frac{3}{2}} = \pi \left[\frac{9}{4} - 0\right] = \frac{9\pi}{4},$$

a następnie pole powierzchni (wzór (13)):

$$|S| = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2y} \sqrt{1 + \frac{1}{2y}} dy = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2y+1} dy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \sqrt{2y+1} = t,\ 2y+1 = t^2 \\ 2dy = 2tdt,\ dy = tdt \\ y = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1,\ y = \frac{3}{2} \ \Rightarrow t = \sqrt{2 \cdot \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right|$$

$$= 2\pi \int_1^2 t \cdot t\, dt = 2\pi \left(\frac{t^3}{3}\right)_1^2 = 2\pi \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{14}{3}\pi\,.$$

7.10.2 Zadania do samodzielnego rozwiązania 2.

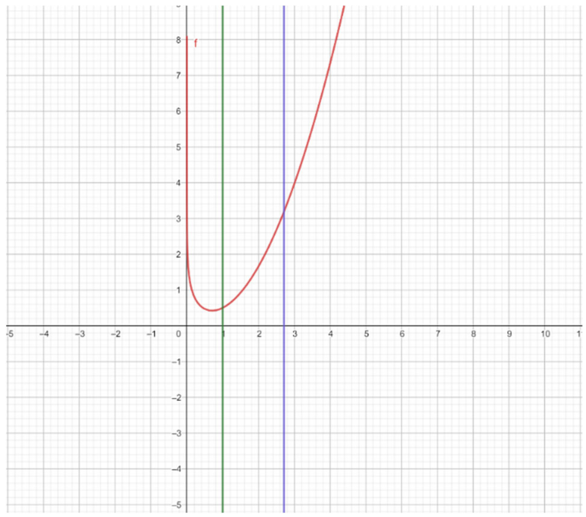
1. Obliczyć długość łuku linii $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} lnx$ dla $x \in \langle 1,\ e\rangle$.
2. Obliczyć długość łuku linii $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + arc\ sinx$.
3. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - 3x + x^2}}$ dookoła osi OX dla $x \in \langle 3, 4\rangle$.
4. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji $f(x) = \ln x$ dookoła osi OX dla $0 < x \leq 1$.

5. Oblicz pole obszarów:

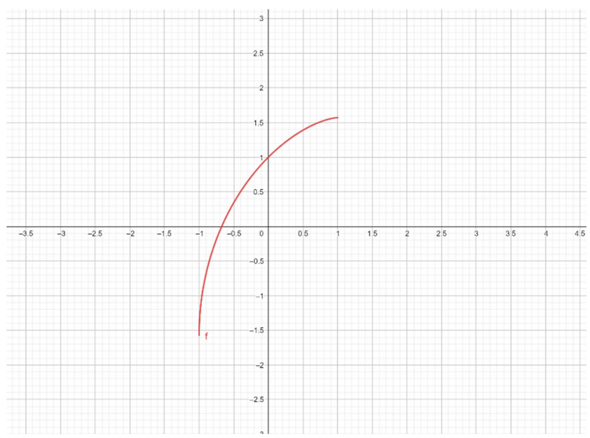
a) $D{:}\{y = x^2,\ y = \sqrt{x}\}$, $b)$ $D{:}\{y = x^2,\ y = 4x^2,\ x - y + 1 = 0\}$.*)

Rysunki ilustrujace zadania

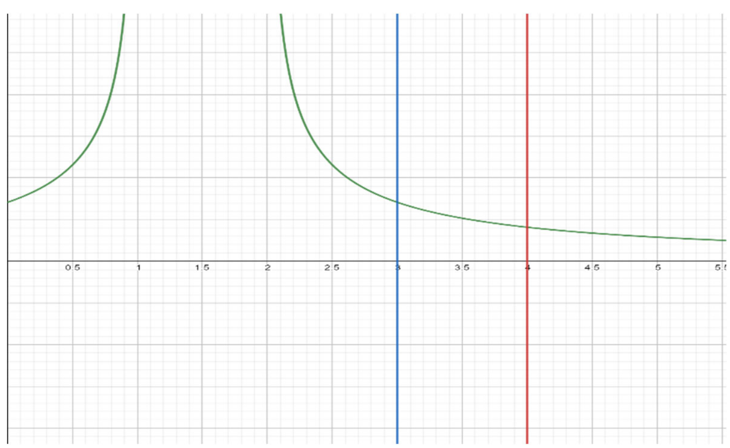
1.



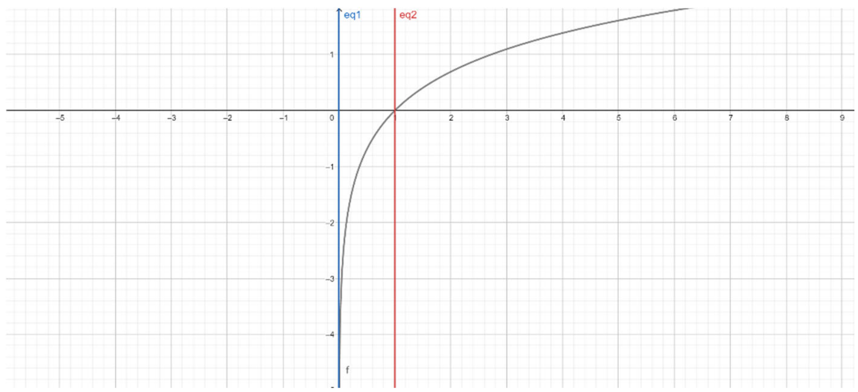
2.



3. Obróć zaznaczony fragment dookoła osi OX

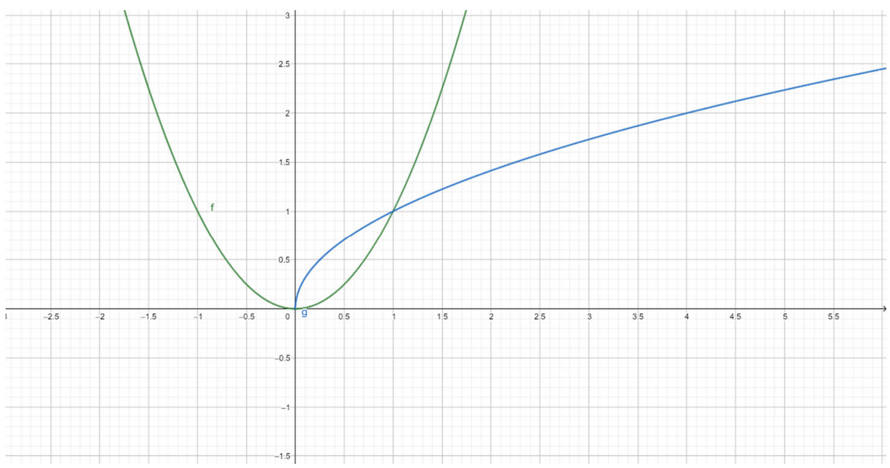


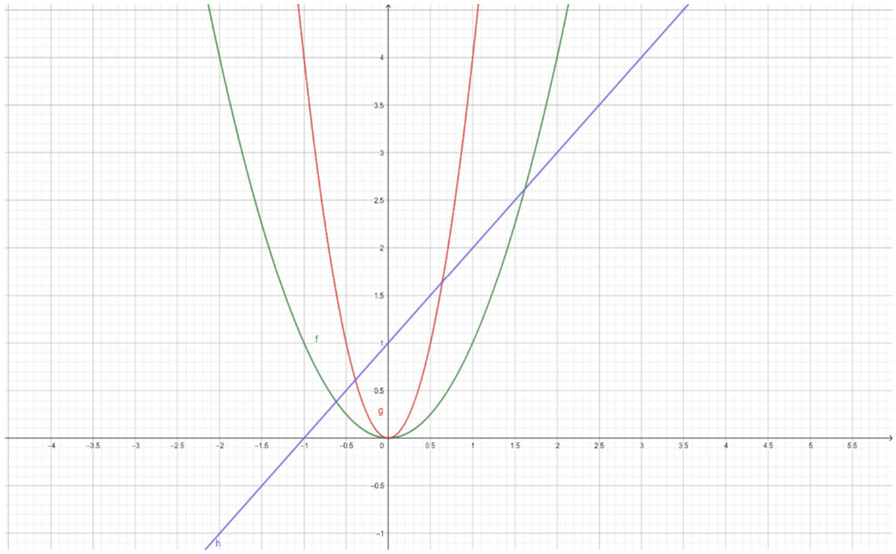
4. Obróć fragment wykresu funkcji $y = lnx$ w podanym przedziale dookoła osi OX



5.

a.



b. 

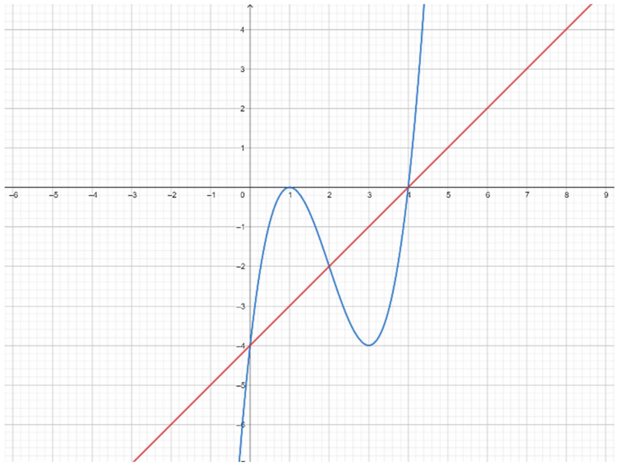
7.10.3 PRZYKŁADOWY EGZAMIN PO ROZDZIALE

1. Oblicz całki nieoznaczone:

   a. $\int \frac{(x^2+1)(1+\sqrt{x})}{x}\,dx$;
   b. $\int (\ln x)^2\,dx$;
   c. $\int (2x-1)\sqrt{x^2-x+10}\,dx$;
   d. $\int \frac{2x^2+3x+4}{x^3+x}\,dx$.

2. Obliczyć całkę oznaczoną: $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

3. Oblicz pole figury ograniczonej liniami $y=(x-1)^2(x-4)$ oraz $y=x-4$. (Rysunek).



4. Oblicz całkę niewłaściwą $\int_0^e \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$.
5. Obliczyć długość łuku linii $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ dla $x \in \langle 1, \ e\rangle$

   Wskazówka: $|\boldsymbol{L}| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union