9.Parastie diferenciālvienādojumi

APRAKSTS:
Šajā sadaļā tiek aplūkoti parastie pirmās un otrās kārtas diferenciālvienādojumi. Sadaļa aptver diferenciālvienādojumu pamatveidus, tas ir, pirmās kārtas diferenciālvienādojumus ar atdalāmiem mainīgiem, lineārus diferenciālvienādojumus un otrās kārtas lineārus vienādojumus ar konstantiem koeficientiem. Tiek aplūkota arī Laplasa transformācija un tās pielietojums diferenciālvienādojumu risināšanai. Sadaļa satur uzdevumu risinājumu paraugus ar detalizētu risinājumu, lai sniegtu norādījumus par to, kā izprast un risināt dažādu veidu diferenciālvienādojumus. Daži diferenciālvienādojumu pielietojumi tiek izskatīti saistībā ar jūrniecības problēmām.

MĒRĶIS: Gūt izpratni par diferenciālvienādojumiem un par diferenciālvienādojumu pielietojumiem; apgūt iemaņas pirmās un otrās kārtas parasto diferenciālvienādojumu risināšanā un izprast risināšanas principus.

Mācību rezultāti:

1. Spēja noteikt diferenciālvienādojuma veidu
2. Spēja risināt pirmās kārtas diferenciālvienādojumus izmantojot atbilstošus risināšanas metodes.
3. Spēja risināt otrās kārtas lineārus diferenciālvienādojumus ar konstantiem koeficientiem.
4. Spēja risināt lineārus diferenciālvienādojumus izmantojot Laplasa transformāciju.

Priekšzināšanas: algebra, logaritmiskas funkcijas un to īpašības, kompleksie skaitļi, vienargumentu funkciju atvasināšana, nenoteiktie integrāļi un integrēšanas metodes, lineāru vienādojumu sistēmas.

Saistība ar jūrniecības problēmām: Diferenciālvienādojumi ir pasaules modelis. Tos plaši izmanto dažādu procesu un parādību matemātiskai modelēšanai dažādās zinātņu un tehnoloģiju jomās: fizikā, ķīmijā, bioloģijā, ekonomikā un arī daudzu jūrniecības problēmu modelēšanā. Piemēram, diferenciālvienādojumi apraksta kuģa kustību un šūpošanu. Diferenciālvienādojumus izmanto, lai aprakstītu dzesēšanas procesus, vibrācijas, siju un plākšņu deformāciju, kas ir svarīgi kuģa projektēšanā, un kravas pārvadājumu slodzes aprēķinos. Kuģu un elektroautomātisko sistēmu elektrisko ķēžu procesus arī apraksta ar diferenciālvienādojumiem. Diferenciālvienādojumus izmanto, lai risinātu problēmas, kas saistītas ar jūras ekoloģiju. Piemēram, diferenciālvienādojumus izmanto, lai aprakstītu daudzas ķīmiskas reakcijas, lai aprakstītu dažādu baktēriju un mikroorganismu izplatīšanu un izmiršanu jūrā, lai aprakstītu zivju populācijas izplatīšanos un izmiršanu, kas ir svarīgi nozvejas kontrolei.

Saturs:

DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

9.1. Diferenciālvienādojumu pamatjēdzieni

Definīcija: Diferenciālvienādojums

Vienādojumu, kas satur nezināmu funkciju un šīs funkcijas atvasinājumus vai diferenciāļus sauc par ***diferenciālvienādojumu***.

Eksistē parastie diferenciālvienādojumi un parciālie diferenciālvienādojumi.

Definīcija: Parastie diferenciālvienādojumi

Ja nezināmā funkcija, ko satur diferenciālvienādojums, ir vienargumenta funkcija, tad diferenciālvienādojumu sauc par ***parciālo diferenciālvienādojumu***.

Vispārīgā veidā prasto diferenciālvienādojumu pieraksta sekojoši:

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

vai

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

kur $y(x)$ ir nezināmā funkcija un $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots,$ $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ ir funkcijas *y(x)* atvasinājumi.

1. Piemērs

Sekojošie divi vienādojumi

$$y' + xy = x^3$$

$$y" - 5y' + 6y = 13\sin(3x)$$

ir parastie diferenciālvienādojumi. Nezināmā funkcija y=y(x) ir viena argumenta funkcija.

Dotie vienādojumi var būt arī pierakstīti sekojošā veidā

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 13\sin(3x)$$

Definīcija: Parciālais diferenciālvienādojums

Diferenciālvienādojumu, kas satur vairāku argumentu funkciju un tas parciālos atvasinājumus, sauc par ***parciālo diferenciālvienādojumu.***

2.Piemērs

Stīgas svārstību vienādojums

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}^2} = \mathrm{a}^2 \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2}$$

ir divu argumentu funkcijas *U=U(x,t)* parciālais diferenciālvienādojums.

Šajā sadaļā mēs aplūkosim tikai pirmās un otrās kārtas parastos diferenciālvienādojumus.

Definīcija: Diferenciālvienādojuma kārta

Par ***diferenciālvienādojuma kārtu*** sauc nezināmās funkcijas atvasinājuma augstāko kārtu, ko tas satur.

3. Piemērs

1. kārtas parastais diferenciālvienādojums: $y' + xy = x^3$

2. kārtas parastais diferenciālvienādojums*:* $y'' - 5y' + 6y = 13sin(3x)$

3. kārtas parastais diferenciālvienādojums: $y''' - x\,ln(x) = 0$

Definīcija: Diferenciālvienādojuma atrisinājums

Par ***diferenciālvienādojuma atrisinājumu*** sauc jebkuru tādu funkciju y=y(x), kura apmierina doto vienādojumu, tas ir, funkciju, kuru, ievietojot vienādojumā, iegūst identitāti.

Definīcija: Diferenciālvienādojuma vispārīgais un partikulārais atrisinājumi

Parasta ***n***-tās kārtas diferenciālvienādojuma atrisinājumu, kas satur tieši ***n*** (maksimālais skaits) patvaļīgu konstanšu, sauc par diferenciālvienādojuma ***vispārīgo atrisinājumu***. Diferenciālvienādojuma atrisinājumu, kas ir iegūts, aizstājot patvaļīgas konstantes vispārīgā atrisinājumā ar noteiktām skaitliskām vērtībām, sauc par ***partikulāro atrisinājumu***.

Definīcija: Diferenciālvienādojuma singulārais atrisinājums

Diferenciālvienādojuma atrisinājumu, kas nesatur patvaļīgas konstantes un kuru nevar iegūt no diferenciālvienādojuma vispārīga atrisinājuma, sauc par ***singulāro atrisinājumu***.

9.2. Pirmās kārtas diferenciālvienādojumi

Pirmās kārtas diferenciālvienādojumu pamatjēdzieni tiks aplūkoti šajā nodaļā. Detalizēti tiks aplūkoti diferenciālvienādojumi ar atdalāmiem mainīgiem un pirmās kārtas lineārie diferenciālvienādojumi. Lineāriem diferenciālvienādojumiem tiks prezentētas divas risināšanas metodes, tas ir, konstanšu variācijas metode un Bernulli metode.

9.2.1. Pirmās kārtas diferenciālvienādojumi: Pamatjēdzieni

Parasto pirmās kārtas diferenciālvienādojumu var uzdot sekojošos veidos:

a) Vispārīgā veidā

$$F(x, y, y') = 0,$$

b) Normālformā

$$y' = f(x, y)$$

c) Diferenciālā formā (ņemot vērā, ka $y' = dy/dx$)

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

kur $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ vispārīgā gadījumā ir divu argumentu funkcijas.

Atzīmēsim arī, ka $f(x, y) = -P(x, y)/Q(x, y)$.

4. Piemērs

Aplūkosim vispārīgā veidā dotu diferenciālvienādojumu:

$$(\mathrm{x}^2 + 1)\mathrm{y}' - 2\mathrm{xy} - 3\mathrm{x} = 0$$

Šo vienādojumu var pierakstīt arī normālformā formā, izsākot no vienādojuma y'

$$y' = \frac{2xy + 3x}{x^2 + 1}$$

Doto vienādojumu var arī pierakstīt diferenciālā formā, pirmajā vienādojumā y' aizvietojot ar dy/dx un sareizinot vienādojuma abas puses ar *dx*

$$(2xy + 3x)dx - (x^2 + 1)dy = 0$$

Pirmās kārtas diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums satur vienu patvaļīgu konstanti C un var būt pierakstīts normālformā formā $y' = \varphi(x, C)$ vai vispārīgā formā $\Phi(x, y, C) = 0$.

Definīcija: Vispārīgais integrālis

Diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu, kas dots vispārīgā formā $\Phi(x, y, C) = 0$, sauc par ***vispārīgo integrāli***.

Ievietojot konstantes C vietā kādu patvaļīgo skaitli, mēs iegūstam kādu konkrētu atrisinājumu, tā saukto diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu.

5.Piemērs

Aplūkosim vienu no vienkāršākajiem pirmās kārtas diferenciālvienādojumiem

$$y' = 2x.$$

Lai atrastu nezināmo funkciju *y(x),* izmantosim integrēšanu pēc argumenta x, ņemot vērā, ka $y = \int y' dx$. Rezultātā

$$y = \int 2x dx = x^2 + C$$

kur C ir integrācijas konstante.

Funkcija $y = x^2 + C$ ir dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums, jo funkcija satur patvaļīgu konstanti C un $y' = (x^2 + C)' = 2x$ (tas nozīmē, ka šī funkcija apmierina doto diferenciālvienādojumu).

Aizstājot konstanti C vienādojuma vispārīgajā atrisinājumā ar konkrētu vērtību, mēs iegūstam tā saukto, partikulāro atrisinājumu. Piemēram,

$y = x^2 - 2$ ir partikulārais atrisināju, kas atbilst $C = -2$,

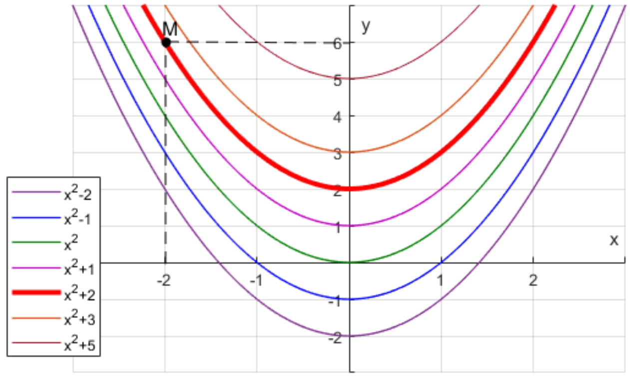
$y = x^2 - 1$ ir partikulārais atrisinājums, kas atbilst $C = -1$,

$y = x^2$ ir partikulārais atrisinājums, kas atbilst $C = 0$,

$y = x^2 + 1$ ir partikulārais atrisinājums, kas atbilst $C = 1$,

$y = x^2 + 2$ ir partikulārais atrisinājums, kas atbilst $C = 2$.

Iegūto atrisinājumu grafiki attēlo parabolu kopu, kur katra parabola atbilst noteiktai konstantes C vērtībai (skat. zīmējumu 1)



1. zīmējums

Tādējādi diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir funkciju kopa un katrai noteiktai konstantes C vērtībai atbilst viens noteiktais atrisinājums , kuru sauc par partikulāro atrisinājumu.

Te izriet divi ļoti svarīgi jautājumi:

1) Vai vienmēr vienādojumam **eksistē** atrisinājums?
2) Kādam nosacījumam ir jābūt spēkā, lai iegūtu **noteiktu** atrisinājumu?

Atbildes uz šiem jautājumiem dod **Košī teorēma**:

Košī teorēma: Diferenciālvienādojuma atrisinājuma eksistences un unitātes teorēma

Ja vienādojuma $y' = f(x, y)$ labās puses funkcija $f(x, y)$un tās parciālais atvasinājums pēc y $\frac{\partial f}{\partial y}$ ir nepārtrauktas funkcijas kādā plaknes xOy apgabalā D, tad, lai kāds būtu šī apgabala punkts (x_0, y_0), eksistē viens vienīgs atrisinājums $y = \varphi(x)$, kas apmierina nosacījumu $y_0 = \varphi(x_0)$.

Šo nosacījumu sauc par sākuma nosacījumu

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{jeb} \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

Košī teorēma ģeometriski nozīmē, ka caur katru apgabala D punktu (x_0, y_0) iet viena vienīga integrāllīnija. Ja Košī teorēmas nosacījumi nav izpildīti, tad to garantēt nevar.

Bieži no atrisinājumu kopas ir jāizvēlas tikai viens konkrēts atrisinājums, kas apmierina kādu konkrētu nosacījumu. Šajā gadījumā diferenciālvienādojums tiek dots kopā ar nosacījumu $y(x_0) = y_0$, kas nozīmē, ka nezināmās funkcijas vērtība ir vienāda ar y_0 ja argumenta vērtiba irn x_0. Šo papildus nosacījumu sauc par ***sākuma nosacījumu***.

Definīcija: Pirmās kārtas diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums

Funkciju $y = \varphi(x, C)$ sauc par diferenciālvienādojuma $y' = f(x, y)$ vispārīgo atrisinājumu apgabalā D, kurā ir spēkā Košī teorēmas nosacījumi, ja šī funkcija apmierina divus nosacījumus:

1) katrai konstantes C vērtībai funkcija $y = \varphi(x, C)$ ir dotā diferenciālvienādojuma atrisinājums;

2) lai arī kāds būtu apgabala D punkts (x_0, y_0), eksistē viena noteikta konstantes C vērtība C_0, ar kuru atrisinājums $y = \varphi(x, C_0)$ apmierina sākuma nosacījumus $y(x_0) = y_0$.

Definīcija: Sākumvērtības problēma

Sākumvērtības problēma jeb ***Košī problēma***, jeb ***Košī uzdevums*** ir uzdevums, kas ietver parasto diferenciālvienādojumu $F(x, y, y') = 0$ kopā ar sākumnosacījumu $y(x_0) = y_0$, kas nosaka nezināmas funkcijas vērtību dotajā punktā x_0. Atrisināt Košī uzdevum, nozīmē atrast konkrētu diferenciālvienādojuma atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumu $y(x_0) = y_0$.

Tādējādi , diferenciālvienādojuma vispārīgam atrisinājumam ģeometriski atbilst līniju kopa xOy plaknē. Turklāt sākotnējais nosacījums $y(x_0) = y_0$, no ģeometriskā viedokļa, ir punkts, caur kuru iet līnija, kas atbilst Košī problēmas atrisinājumam.

Košī uzdevums tiek risināts sekojoši:

1) Tiek atrasts diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums, kas satur patvaļīgu konstanti C.

2) Diferenciālvienādojuma vispārīgā atrisinājumā x un y vietā ievieto sākuma nosacījuma vērtības x_0 un y_0.

3) Atrisina iegūto vienādojumu attiecībā pret C.

4) Iegūto C vērtību ievieto vispārīgajā atrisinājumā.

6. Piemērs

Aplūkosim diferenciālvienādojumu no 5.piemēra kopā ar sākumnosacījumu $y(-2) = 6$, tas ir, aplūkosim sekojošo Košī uzdevumu:

$$y' = 2x \text{ un } \quad y(-2) = 6.$$

<u>Atrisinājums</u>

Mums jāatrod uzdotā diferenciālvienādojuma atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumu $y(-2) = 6$. Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = x^2 + C$$

(skat. 5.piemēru).

Lai atrastu atbilstošo C vērtību, vajag ievietot $x = -2$ un $y = 6$ diferenciālvienādojuma vispārīgajā atrisinājumā x un y vietā:

$$6 = (-2)^2 + C$$

$$6 = 4 + C$$

$$C = 2$$

Košī uzdevuma atrisinājumu iegūstam, ievietojot iegūto konstantes C vērtību diferenciālvienādojuma vispārīgajā atrisinājumā. Rezultātā partikulārais atrisinājums, kas apmierina doto sākumnosacījumu ir:

$$y = x^2 + 2$$

Grafiska interpretācija (skat. 1.zīmējumu) ir sekojoša: no līkņu kopas ir jāizvēlas tikai viena līkne, kas iet caur punktu M(-2,6). Šīs līknes vienādojums ir .$y = x^2 + 2$.

Ir dažādi pirmās kārtas diferenciālvienādojumu veidi, kuri tiek risināti ar dažādām metodēm. Tālāk ir apskatīti diferenciālvienādojumi ar atdalāmiem mainīgajiem un lineārie vienādojumi, kā arī to risināšanas metodes.

9.2.2. Pirmās kārtas diferenciālvienādojumi: Diferenciālvienādojumi ar atdalāmiem mainīgiem

Aplūkosim pirmās kārtas diferenciālvienādojumu, kas ir uzdots normālformā $y' = f(x, y)$.

Definīcija:

Pirmās kārtas diferenciālvienādojumu $y' = f(x, y)$ sauc par ***diferenciālvienādojumu ar atdalāmiem mainīgiem***, ja labās puses funkciju $f\,(x, y)$ var sadalīt divu nepārtrauktu vienargumentu funkciju reizinājumā, kur vienas funkcijas arguments ir x, bet otras funkcijas arguments ir y

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Diferenciālvienādojuma risināšanas metode:

1) Funkcijas atvasinājumu y' izsaka diferenciālā formā $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

2) Atdala mainīgos, tas ir, pārnes visus reizinātājus, kas satur y (ieskaitot dy), uz vienu vienādojuma pusi un reizinātājus, kas satur x (ieskaitot dx), uz otru pusi. Šim nolūkam abas vienādojuma puses reizina ar *dx* un dala ar $f_2(y)$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

Tiek pieņemts, ka $f_2(y) \neq 0$.

3) Abas vienādojuma puses integrē pēc atbilstošiem mainīgiem $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$

4) No iegūtās izteiksmes funkciju y izsaka atklātā veidā, ja tas ir iespējams.

Ja y(x) nav iespējams izteikt normālformā, tad atrisinājumu pieraksta vispārīgā formā un saka, ka ir iegūts *diferenciālvienādojuma vispārējais integrālis*:

$$\psi(x, y) = C$$

5) Dalot abas vienādojuma puses ar $f_2(y)$, tika pieņemts, ka $f_2(y) \neq 0$. Tādējādi var pazaudēt vienādojuma iespējamo atrisinājumu $f_2(y) = 0$. Ja ir tādas y vērtības, kurām $f_2(y) = 0$ un šīs vērtības apmierina doto diferenciālvienādojumu, tad šīs vērtības arī ir diferenciālvienādojuma atrisinājumi. Tāpēc ir jāpārbauda, vai $f_2(y) = 0$ ir diferenciālvienādojuma atrisinājums, un, ja tas ir atrisinājums, tad jāpārbauda, vai tas ir singulārais atrisinājums.

Tagad aplūkosim diferenciālformā dotu vienādojumu

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Definīcija:

Diferenciālvienādojumu $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ sauc par diferenciālvienādojumu ar atdalāmiem mainīgiem, ja katru funkciju $P(x,y)$ un $Q(x,y)dy$ var sadalīt reizinātājos, tā, lai katrs reizinātājs būtu funkcija, kas atkarīga tikai no viena mainīgā

$$P_1(x) \cdot P_2(y)dx + Q_1(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$$

Diferenciālvienādojuma risināšanas metode:

1) Atdala mainīgos

$$Q_1(x) \cdot Q_2(y)dy = -P_1(x) \cdot P_2(y)dx$$

$$\frac{Q_2(y)dy}{P_2(y)} = -\frac{P_1(x)dx}{Q_1(x)}$$

2) Integrē abas iegūtās izteiksmes puses

$$\int \frac{Q_2(y)dy}{P_2(y)} = -\int \frac{P_1(x)dx}{Q_1(x)}$$

3) Iegūst atrisinājumu normālformā vai vispārīgā formā.

4) Pārbauda, vai $P_2(y) = 0$ un $Q_1(y) = 0$ ir diferenciālvienādojuma singulārie atrisinājumi.

7. Piemērs

Atrisināt diferenciālvienādojumu $y' - (x+2) \cdot e^{-y} = 0$.

Atrisinājums

Doto vienādojumu var pierakstīt formā

$$y' = (x+2) \cdot e^{-y}$$

Šis vienādojums ir vienādojums ar atdalāmiem mainīgiem, tāpēc ka funkcija vienādojuma labajā pusē ir divu funkciju reizinājums. Viena no šīm funkcijām satur tikai mainīgo lielumu x un otra funkcija satur tikai mainīgo lielumu y.

Risinām vienādojumu, veicot sekojošas darbības:

1) Aizvietojam y' ar $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = (x+2) \cdot e^{-y}$$

2) Atdalām mainīgos, reizinot vienādojuma abas puses ar *dx* un dalot ar e^{-y}.

$$\frac{dy}{e^{-y}} = (x+2)dx$$

Tā ka $e^{-y} \neq 0$, mēs nepazaudējām nevienu atrisinājumu, vienādojumu dalot ar e^{-y} .

3) Rezultātā mums ir izteiksme, kurai kreisajā pusē ir izteiksme, kas satur tikai argumentu y un labajā pusē tikai argumentu x. Tas nozīmē, ka mēs varam integrēt abas izteiksmes puses:

$$\int \frac{dy}{e^{-y}} = \int (x+2)dx$$

Aprēķināsim atsevišķi abus integrāļus

$$\int \frac{dy}{e^{-y}} = \int e^{y}dy = e^{y} + C_1$$

$$\int (x+2)dx = \int (x+2)d(x+2) = \frac{(x+2)^2}{2} + C_2$$

4) Rezultātā mums ir

$$e^{y} + C_1 = \frac{(x+2)^2}{2} + C_2$$

$$e^{y} = \frac{(x+2)^2}{2} + C_2 - C_1$$

Tā kā C_1 un C_2 ir konstantes, $C_2 - C_1 = C$ arī ir konstante. Tāpēc pēc integrēšanas, tikai viena integrēšanas konstante C parasti tiek pieskaitīta tikai vienā izteiksmes pusē.

$$e^{y} = \frac{(x+2)^2}{2} + C$$

Atrisinājumu normālformā var iegūt, logaritmējot abas vienadojuma puses

$$y = \ln\left(\frac{(x+2)^2}{2} + C\right)$$

Tas ir dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums.

8. Piemērs

Atrisināt diferenciālvienādojumu $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.

Atrisinājums

Doto diferenciālvienādojumu var pārveidot formā

$$y \cdot (1+x)dx + x \cdot (1-y)dy = 0$$

Šis vienādojums ir vienādojums ar atdalāmiem mainīgiem, tāpēc ka te doti vienargumentu funkciju reizinājumi, kur katra no šīm funkcijām satur argumentu x vai argumentu y.

Risinām vienādojumu, veicot sekojošas darbības:

1) Pārnesam saskaitāmo ar reizinātāju *dx* vienādojuma labajā pusē

$$x \cdot (1-y)dy = -y \cdot (1+x)dx$$

2) Atdalām mainīgos, dalot abas vienādojuma puses ar $x \cdot y$, kur $x \neq 0$ un $y \neq 0$.

$$\frac{x \cdot (1-y)dy}{x \cdot y} = -\frac{y \cdot (1+x)}{x \cdot y}dx$$

$$\frac{(1-y)dy}{y} = -\frac{(1+x)}{x}dx$$

3) Integrējam iegūtā vienādojuma abas puses:

$$\int \frac{(1-y)dy}{y} = -\int \frac{(1+x)}{x}dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = -\int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx$$

$$\ln|y| - y = -\ln|x| - x + C$$

$$\ln|y| + \ln|x| - y + x = C$$

Rezultātā, mēs ieguvām diferenciālvienādojuma vispārīgo integrāli:

$$\ln|y \cdot x| + x - y = C$$

kur $x \neq 0$ un $y \neq 0$.

4) Pārbaudām, vai ir pazaudēti diferenciālvienādojuma atrisinājumi augstāk minēto nosacījumu dēļ.

Abas funkcijas $x = 0$ un $y = 0$ apmierina doto diferenciālvienādojumu, bet viņus nav iespējams iegūt no vispārīga atrisinājuma, tādējādi $x = 0$ un $y = 0$ ir diferenciālvienādojuma singulāri atrisinājumi.

Vēlreiz precizēsim uzdevuma risināšanas shēmu:

Diferenciālvienādojumu ar atdalāmiem mainīgiem risināšanas metode ir:

1) Atdala mainīgos, tas ir, pārraksta vienādojumu tā, lai izteiksme, kas atkarīga no argumenta x, un izteiksme, kas atkarīgi no argumenta y, būtu vienādojuma dažādās pusēs.

2) Integrē vienu vienādojuma pusi pēc argumenta y un otro pēc argumenta x.

3) Vienkāršo iegūto vienādojumu.

4) Pārbauda, vai iespējams, ka ir izlaisti atrisinājumi, tas ir, pārbauda diferenciālvienādojuma singulāro atrisinājumu esamību.

Uzdevumi

9.1. Uzdevums

Atrast dotā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, kurš apmierina norādīto sākuma nosacījumu (jeb atrisināt Koši uzdevumu).

$$y' = y \cdot \mathrm{ctg}x\,, \qquad \mathrm{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

Atrisinājums:

Šis vienādojums ir diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgiem, jo funkcija vienādojuma labajā pusē ir divu tādu funkciju reizinājums, kur viena no funkcijām ir atkarīga tikai no mainīgā x, bet otra ir atkarīga tikai no mainīgā y.

Lai atrisinātu doto vienādojumu:

1) Aizstājam y' ar diferenciāļiem $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, tad

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \mathrm{ctg}x$$

2) Atdalām mainīgos, reizinot abas vienādojuma puses ar diferenciāli *dx* un dalot ar mainīgo y

$$\frac{dy}{y} = \mathrm{ctg}x \cdot dx$$

Pieņemam, ka $y \neq 0$.

3) integrējam abas vienādojuma puses:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \mathrm{ctg}x dx$$

Aprēķināsim integrāli vienādojuma labajā pusē:

$$\int \mathrm{ctg}x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

Kreisās puses integrālis

$$\int \frac{dy}{y} = ln|y|$$

4) Rezultātā

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + C$$

kur C ir patvaļīga konstante.

Lai vienkāršotu iegūto atrisinājumu, mēs konstanti C varam izteikt kā logaritmu $C = ln|C_1|$, kur C_1 arī ir kāda patvaļīga konstante, kura nav vienāda ar nulli ($\mathrm{C}_1 \neq 0$). Tātad

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|\mathrm{C}_1|$$

Saskaņā ar logaritmisko funkciju īpašībām saskaitām logaritmus labajā vienādības pusē

$$\ln|y| = \ln|C_1 \cdot \sin x|$$

un pielīdzinām logaritmu argumentus.

Rezultātā iegūstam dotā diferenciālvienādojuma **vispārīgo atrisinājumu**:

$$y = C_1 \cdot \sin x\,, \qquad (C_1 \neq 0\,).$$

4) Pārbaudām, vai ir izlaisti kādi atrisinājumi dalīšanas ar y dēļ:

$y = 0$ apmierina doto diferenciālvienādojumu, bet tas nav diferenciālvienādojuma singulārais atrisinājums, jo tas ir diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums, kas atbilst gadījumam $C_1 = 0$.

Diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu varam uzrakstīt veidā

$$y = C \cdot \sin x$$

5) Lai atrisinātu Košī uzdevumu, mums vajag noteikt tikai vienu diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumu $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Lai atrastu partikulāro atrisinājumu, mēs ievietojam $y = 3$ un x= $\frac{\pi}{2}$ diferenciālvienādojuma vispārīgajā attricinājumā y un x vietā.

$$3 = C \cdot \sin\frac{\pi}{2}$$

$$3 = C \cdot 1$$

$$C = 3\,.$$

Iegūto konstantes C vērtību ievietojam vispārīgajā atrisinājumā un iegūstam Košī uzdevuma atrisinājumu:

$$y = 3 \cdot \sin x$$

9.2.Uzdevums

Atrast dotā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, kurš apmierina norādīto sākuma nosacījumu (jeb atrisināt Košī uzdevumu).

$$2(x^2y + y)y' + \sqrt{1 + y^2} = 0\,, \qquad y(0) = 2.$$

Atrisinājums:

Doto vienādojumu var pārrakstīt veidā

$$2y(x^2 + 1)y' = -\sqrt{1 + y^2}$$

Šis vienādojums ir vienādojums ar atdalāmiem mainīgiem, jo vienādojuma kreisajā pusē ir divu funkciju reizinājums, kur vienas funkcijas arguments ir x, bet otras – mainīgais y. Funkcija vienādojuma labajā pusē ir atkarīga tikai no mainīgā lieluma y.

Risinām vienādojumu sekojoši:

1) No sākuma mēs aizvietojam y' ar $\frac{dy}{dx}$:

$$2y(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1 + y^2}$$

2) Atdalām mainīgos, reizinot vienādojuma abas puses ar *dx* un dalot ar (x^2+1) un ar $\sqrt{1+y^2}$:

$$\frac{2ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{dx}{(x^2+1)}$$

Atzīmēsim, ka abi dalītāji ir stingri pozitīvi $\sqrt{1+y^2} > 0$ un $(x^2+1) > 0$.

3) integrējam abas vienādojuma puses:

$$\int \frac{2ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

Aprēķināsim integrāli izteiksmes kreisajā pusē

$$\int \frac{2ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{d(y^2+1)}{\sqrt{1+y^2}} = \int (1+y^2)^{-\frac{1}{2}} d(1+y^2) = 2(1+y^2)^{\frac{1}{2}} + C_1$$

Aprēķināsim integrāli izteiksmes labajā pusē

$$-\int \frac{dx}{(x^2+1)} = -arctgx + C_2$$

4) Rezultātā iegūstam

$$2\sqrt{1+y^2} = -\mathrm{arctg}x + C$$

vai

$$2\sqrt{1+y^2} + \mathrm{arctg}x = C$$

kur C ir patvaļīga konstante.

Iegūtā izteiksme ir dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais integrālis.

5) Lai atrisinātu Košī uzdevumu ar sākumnosacījumu $y(0) = 2$, iegūtajā izteiksmē ievietosim vērtības $y = 2$ un $x = 0$

$$2\sqrt{1+2^2} + \mathrm{arctg}\ 0 = C$$

$$2\sqrt{5} + 0 = C \ \Rightarrow\ C = 2\sqrt{5}$$

Tad Košī problēmas partikulārais atrisinājums ir

$$2\sqrt{1+y^2} + \mathrm{arctg}x = 2\sqrt{5}$$

9.3.Uzdevums

Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$(e^{2x}+3)dy + y\cdot e^{2x}dx = 0.$$

Atrisinājums:

Šis vienādojums ir diferenciālvienādojums atdalāmiem mainīgiem, jo funkcija, kas pareizināta ar *dy,* ir atkarīga tikai no mainīgā x, bet otrs saskaitāmais ir divu funkciju no x un no y reizinājums, kas ir pareizināts ar dx.

Lai atrisinātu doto vienādojumu:

1) Pārnesam otro saskaitāmo uz vienādojuma labo pusi

$$(e^{2x}+3)dy = -y \cdot e^{2x}dx$$

2) Atdalām mainīgos, dalot vienādojuma abas puses ar y un ar $e^{2x}+3$ ($y \neq 0$).

$$\frac{dy}{y} = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$$

3) Integrējam iegūtās izteiksmes abas puses:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+3)}{e^{2x}+3}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|e^{2x}+3| + \ln|C|$$

Vienkāršojam iegūto atrisinājumu, izmantojot logaritmiskas funkcijas īpašības:

$$\ln|y| = \ln(e^{2x}+3)^{-\frac{1}{2}} + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln\left|C \cdot (e^{2x}+3)^{-\frac{1}{2}}\right|$$

$$y = C \cdot (e^{2x}+3)^{-\frac{1}{2}}$$

Rezultātā iegūstam dotā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu:

$$y = \frac{C}{\sqrt{e^{2x}+3}}$$

4) Pārbaudām, vai ir pazaudēts kāds atrisinājums, tas ir, pārbaudām, vai $y = 0$ ir diferenciālvienādojuma singulārais atrisinājums. Redzam, ka $y = 0$ apmierina doto diferenciālvienādojumu. Tas nozīmē, ka tas ir diferenciālvienādojuma atrisinājums, bet šo atrisinājumu var iegūt no diferenciālvienādojuma vispārīgā atrisinājuma, kad $C = 0$. Tādejādi, tas nav singulārais atrisinājums, bet gan vienādojuma partikulārais atrisinājums.

9.2.3. Pirmās kārtas Lineārie Diferenciālvienādojumi

Definīcija: Lineāri diferenciālvienādojumi

Pirmās kārtas diferenciālvienādojumu sauc par lineāro diferenciālvienādojumu, ja to var pierakstīt formā:

$$\mathrm{y}' + \mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

kur $p(x)$ un $f(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas.

Definīcija: Homogēni un Nehomogēni lineāri diferenciālvienādojumi

1) Ja funkcija $f(x)$ diferenciālvienādojuma labajā pusē ir vienāda ar nulli, tad diferenciālvienādojumu sauc par ***homogēnu lineāro diferenciālvienādojumu***:

$$\mathrm{y}' + \mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{y} = 0, \quad (f(x) = 0)$$

2) Ja funkcija $f(x)$ diferenciālvienādojuma labajā pusē NAV vienāda ar nulli, tad diferenciālvienādojumu sauc par ***nehomogēnu lineāro diferenciālvienādojumu***:

$$\mathrm{y}' + \mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}), \quad (f(x) \neq 0)$$

Diferenciālvienādojuma risināšanas metode:

Aplūkosim divas lineārā diferenciālvienādojumam atrisināšanas metodes – konstantes variācijas metodi un Bernulli metodi.

1. Konstantes variācijas metode

Metode sastāv no sekojošiem posmiem:

1) Atrisina atbilstošo lineāro homogēno diferenciālvienādojumu, kas pēc savas būtības ir diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgiem

$$\mathrm{Y}' + \mathrm{p}(\mathrm{x})\mathrm{Y} = 0$$

Homogēna diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums satur patvaļīgu konstanti C

$$Y(x) = g(x, C)$$

3) Konstanti C aizstāj ar nezināmu funkciju C (x), pieņemot, ka sekojošā funkcija ir dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma atrisinājums

$$y = g\big(x, C(x)\big)$$

4) Funkciju *y(x)* kopā ar tās atvasinājumu ievieto dotajā diferenciālvienādojumā, lai aprēķinātu funkciju *C(x).*
5) Aprēķināto funkciju *C(x)* ievieto uzdevuma vispārīgajā atrisinājumā nezināmo izteiksmi C(x) aizvieto ar aprēķināto funkciju.

9. Piemērs

Atrisināt diferenciālvienādojumu $xy' + y = sinx$, izmantojot *Konstanšu Variācijas Metodi*.

<u>*Atrisinājums*</u>

Dotais vienādojums ir pirmās kārtas lineārs diferenciālvienādojums, jo to var pierakstīt formā

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{sinx}{x}$$

1) Risinām atbilstošo pirmās kārtas homogēno lineāro diferenciālvienādojumu:

$$Y' + \frac{Y}{x} = 0$$

Tas ir diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgiem. Tāpēc, mēs aizvietojām Y' ar $\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dx}}$, un pārnesam saskaitāmo $\frac{Y}{x}$ no vienādojuma kreisās puses uz labo pusi:

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{Y}{x}$$

Tad atdalām mainīgos, pieņemot ka $Y \neq 0$

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{dx}{x}$$

un integrējām vienādojuma abas puses:

$$\int \frac{\mathrm{dY}}{Y} = -\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

$$\ln|\mathrm{Y}| = -\ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C}$$

Tā kā C ir patvaļīga konstante, C var aizstāt ar $\ln|\mathrm{C}|$:

$$\ln|\mathrm{Y}| = -\ln|\mathrm{x}| + \ln|\mathrm{C}|$$

Piezīme: Logaritmiskā funkcijas pieņem visas reālās vērtības, tās vērtību apgabals ir

$$E_{\ln x} = (-\infty;\ \infty)$$

Tad, izmantojot logaritmu īpašības, iegūstam

$$\ln|\mathrm{Y}| = \ln\left|\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x}}\right|$$

Rezultātā, pielīdzinot logaritmu argumentus, mēs iegūstam atbilstošā homogēna diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x}}$$

2) Lai atrastu nehomogēnā vienādojuma vispārīgo atrisinājumu, konstanti C aizstājam ar nezināmu funkciju C (x):

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}}$$

3) Lai aprēķinātu nezināmo funkciju C(x), ievietosim funkciju $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}}$ un tā atvasinājumu y' sākotnējā nehomogēnajā diferenciālvienādojumā.

$$\mathrm{y}' = \left(\frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}}\right)' = \frac{\mathrm{x} \cdot \mathrm{C}'(\mathrm{x}) - \mathrm{x}' \cdot \mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}^2} = \frac{\mathrm{x} \cdot \mathrm{C}'(\mathrm{x}) - \mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}^2} = \frac{\mathrm{C}'(\mathrm{x})}{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}^2}$$

Pēc funkcijas y un tās atvasinājums y’ ievietošanas sākotnējā vienādojumā mums ir

$$\left(\frac{\mathrm{C}'(\mathrm{x})}{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{C(x)}}{\mathrm{x}^2}\right) + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{sinx}{x}$$

Šo vienādojumu var vienkāršot sekojoši:

$$\mathrm{C}'(\mathrm{x}) = sinx$$

Lai noteiktu nezināmu funkciju C(x), mēs integrēsim iegūtā vienādojuma abas puses pēc argumenta x:

$$\mathrm{C(x)} = \int \mathrm{C}'(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int sinx\, dx = -cosx + C$$

4) Iegūstam lineāra nehomogēna diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu, nezināmo funkciju aizvietojot ar funkciju $C(x) = -cosx + C$

$$\mathrm{y} = \frac{-\cos(\mathrm{x}) + \mathrm{C}}{\mathrm{x}}$$

2. Bernulli metode (Risinājums izmantojot substitūciju $\boldsymbol{y = U \cdot V}$)

Galvenā ideja ir sekojoša: lineāra diferenciālvienādojuma $\mathrm{y}' + \mathrm{p(x)y} = \mathrm{f(x)}$ atrisinājums y tiek meklēts kā divu funkciju $\underline{\mathrm{y} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}}$ reizinājums, kur $U = U(x)$ un $V = V(x)$ ir nezināmas funkcijas. Vienu no šīm funkcijām var izvēlēties patvaļīgi, bet otra funkcija ir jāizvēlas tā, lai reizinājums U(x)·V(x) apmierinātu doto diferenciālvienādojumu.

Metode sastāv no sekojošiem posmiem:

1) Substitūciju $y = U \cdot V$ un tās atvasinājumu $y' = U' \cdot V + U \cdot V'$ ievieto dotajā lineārā diferenciālvienādojumā $y' + p(x)y = f(x)$.

Rezultātā vienādojums iegūst formu:

$$U'V + UV' + p(x)UV = f(x)$$

Sagrupēsim saskaitāmos, funkciju U iznesot pirms iekavām

$$U'V + U \cdot (V' + p(x)V) = f(x) \qquad (*)$$

2) Izvēlas tādu noteiktu funkciju V, lai izteiksme iekavās būtu vienāda ar nulli:

$$V' + p(x)V = 0$$

Tad vienādojuma (*) izteiksme kļūst vienkārša:

$$U'V + U \cdot 0 = f(x) \quad \text{vai} \quad U'V = f(x).$$

Rezultātā ir jāatrisina divu vienādojumu sistēma:

$$\begin{cases} V' + p(x)V = 0 \\ U'V = f(x) \end{cases}$$

3) Vienādojums $V' + p(x)V = 0$ ir diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgiem:

$$\frac{dV}{dx} = -p(x)V$$

$$\frac{dV}{dx} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dV}{dx} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|V| = -\int p(x)dx$$

$$V = e^{-\int p(x)dx} + C_1$$

Šeit tiek pieņemts, ka konstante $C_1 = 0$, jo pietiek noteikt tikai vienu konkrētu diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu.

4) Aprēķināto funkciju V ievieto sistēmas otrajā vienādojumā

$$U'V = f(x)$$

$$U' \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

5) Jāatrisina pēdējo vienādojumu, lai noteiktu funkciju U.

6) Dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums y ir divu iegūto funkciju reizinājums *y = UV*.

10. Piemērs

Atrisināt diferenciālvienādojumu $xy' + y = sinx$, izmantojot Bernulli metodi.

Atrisinājums

Doto vienādojumu pārveidojam, abas tā puses dalot ar argumentu $x \neq 0$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{sinx}{x}$$

1) Ievietosim $y = U \cdot V$ un $y' = U' \cdot V + U \cdot V'$ dotajā diferenciālvienādojumā

$$U'V + UV' + \frac{UV}{x} = \frac{sinx}{x}$$

$$U'V + U\left(V' + \frac{V}{x}\right) = \frac{sinx}{x} \qquad (**)$$

2) Saskaņā ar metodi iekavās doto izteiksmi mēs pielīdzinām nullei

$$V' + \frac{V}{x} = 0$$

Tad vienādojumu (**) var uzrakstīt kā divu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} V' + \frac{V}{x} = 0 \\ U'V = \frac{sinx}{x} \end{cases}$$

3) No pirmā sistēmas vienādojumu aprēķinām funkciju V. Šis diferenciālvienādojums ir ar atdalāmiem mainīgiem

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x}$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dV}{dx} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|V| = -\ln|x| + C_1$$

Mēs pieņemam, ka $C_1 = 0$. Tad pielietojam logaritmu īpašības

$$\ln|V| = -\ln|x| \quad \Rightarrow \quad \ln|V| = \ln|x^{-1}|$$

$$V = \frac{1}{x}$$

4) Mēs ievietojam iegūto funkciju V sistēmas otrajā vienādojumā

$$U'V = \frac{\sin x}{x}$$

$$U' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

Vienkāršojam izteiksmi un atrisinām iegūto vienādojumu

$$U' = \sin x$$

$$U = \int U' dx = \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

5) Ievietojot abas funkcijas U un V izteiksmē y = UV, iegūstam vispārīgo atrisinājumu dotajam lineārajam diferenciālvienādojumam

$$y = UV = (-\cos x + C) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{C - \cos x}{x}$$

Atbilde

$$y = \frac{C - \cos x}{x}$$

Uzdevumi

9.4.Uzdevums

Atrast dotā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, kurš apmierina norādīto sākuma nosacījumu (jeb atrisināt Košī uzdevumu).

$$y' + y \cdot tgx = \frac{1}{\cos x}, \qquad y(\pi) = 0.$$

Atrisinājums

Tas ir pirmās kārtās lineārs diferenciālvienādojums. Risināsim šo vienādojumu, izmantojot Bernulli metodi, tas ir, izmantojot substitūciju y=UV.

1) Ievietojam substitūciju $\mathrm{y} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$ un tās atvasinājumu $\mathrm{y}' = \mathrm{U}' \cdot \mathrm{V} + \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}'$ dotajā diferenciālvienādojumā:

$$\mathrm{U}'\mathrm{V} + \mathrm{U}\mathrm{V}' + \mathrm{U}\mathrm{V} \cdot tgx = \frac{1}{\cos x}$$

$$\mathrm{U}'\mathrm{V} + \mathrm{U}(\mathrm{V}' + \mathrm{V} \cdot tgx) = \frac{1}{\cos x}$$

2) Funkciju *V* aprēķinām pamatojoties uz nosacījumu, ka izteiksme iekāvās ir vienāda ar nulli:

$$V' + \mathrm{V} \cdot tgx = 0$$

Līdz ar to varam sastādīt divu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} V' + \mathrm{V} \cdot tgx = 0 \\ \mathrm{U}'\mathrm{V} = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

3) Risinām sistēmas pirmo vienādojumu, atdalot mainīgos:

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = -\mathrm{V} \cdot \mathrm{tg}x$$

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = -\mathrm{tg}x\, dx$$

$$\int \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = -\int \mathrm{tg}x\, dx$$

Aprēķināsim integrāli izteiksmes labajā pusē:

$$-\int \mathrm{tg}x\, dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\, d(cosx) = \ln|\cos x| + C_1$$

tādējādi,

$$\ln|\mathrm{V}| = \ln|\cos x| + \mathrm{C}_1$$

Funkciju V izvēlamies konkrētu, tāpēc $\mathrm{C}_1 = 0$, iegūstam

$$\ln|\mathrm{V}| = \ln|\cos x|$$

$$\mathrm{V} = \cos x$$

4) Ievietojam iegūto V funkciju sistēmas otrajā vienādojumā

$$U'V = \frac{1}{\cos x}$$

Tad

$$U'\cos x = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad U' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Lai noteiktu nezināmo funkciju U, integrēsim iegūto izteiksmi pēc argumenta x

$$\mathrm{U} = \int \mathrm{U}'\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \mathrm{tg}x + \mathrm{C}$$

5) Ievietojot iegūtās funkcijas U un V izteiksmē y = UV, mēs iegūstam lineārā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$\mathrm{y} = \mathrm{UV} = (\mathrm{tg}x + \mathrm{C}) \cdot \cos x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \mathrm{C}\right) \cdot \cos x = \sin x + \mathrm{C} \cdot \cos x$$

Rezultātā, diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\mathrm{y} = \sin x + \mathrm{C} \cdot \cos x$$

6) Atrisināt Koši uzdevumu nozīmē atrast diferenciālvienādojuma vienu vienīgu partikulāro atrisinājumu, kas apmierina doto sākumnosacījumu $\mathrm{y}(\pi) = 0$. Lai atrastu šo partikulāro atrisinājumu, mēs ievietosim $\mathrm{y} = 0$ un x= π vienādojuma vispārīgaja atrisinājumā y un x vietā

$$0 = \sin\pi + \mathrm{C} \cdot \cos\pi$$

$$0 = 0 + \mathrm{C} \cdot (-1) \ \Rightarrow \ -\mathrm{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = 0.$$

Iegūto C vērtību ievietosim vispārīgajā atrisinājumā konstantes C vietā, lai iegūtu partikulāro atrisinājumu dotajam Koši uzdevumam

$$\mathrm{y} = \sin x$$

9.5.Uzdevums

Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$\mathrm{y}' - 3\mathrm{x}^2\mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}.$$

Atrisinājums

Tas ir pirmās kārtas lineārs diferenciālvienādojums. Izmantosim Bernulli metodi, tas ir, veiksim substitūciju y=UV, funkciju V izvēloties kā noteiktu funkciju.

1) Funkciju $\mathrm{y} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$ un tas atvasinājumu $\mathrm{y}' = \mathrm{U}' \cdot \mathrm{V} + \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}'$ ievietosim dotajā diferenciālvienādojumā y un y′ vietā

$$\mathrm{U}'\mathrm{V} + \mathrm{U}\mathrm{V}' - 3\mathrm{x}^2 \cdot \mathrm{U}\mathrm{V} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}^3}$$

$$\mathrm{U'V + U(V' - V \cdot 3x^2) = x \cdot e^{x^3}}$$

2) Izteiksmi iekavās pielīdzināsim nullei

$$V' - \mathrm{V \cdot 3x^2} = 0$$

Diferenciālvienādojumu var pārrakstīt kā divu diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} V' - \mathrm{V \cdot 3x^2} = 0 \\ \mathrm{U'V = x \cdot e^{x^3}} \end{cases}$$

3) Sistēmas pirmais vienādojums ir vienādojums ar atdalāmiem mainīgiem

$$\frac{dV}{\mathrm{dx}} = \mathrm{V \cdot 3x^2}$$

$$\frac{dV}{\mathrm{V}} = \mathrm{3x^2}\, dx$$

$$\int \frac{dV}{\mathrm{V}} = \int \mathrm{3x^2}\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln|\mathrm{V}| = \mathrm{x^3}$$

Tad funkcija V ir

$$\mathrm{V = e^{x^3}}$$

4) Iegūto funkciju *V* ievietojam sistēmas otrajā vienādojumā

$$U'V = \mathrm{x \cdot e^{x^3}} \quad \Rightarrow \quad U'\mathrm{e^{x^3} = x \cdot e^{x^3}}$$

Vienkāršojam iegūto izteiksmi un aprēķinām funkciju *U*

$$U' = \mathrm{x}$$

$$\mathrm{U} = \int \mathrm{U'dx} = \int \mathrm{x\,dx} = \frac{\mathrm{x^2}}{2} + \mathrm{C}$$

5) Atgriežoties pie izvēlētās substitūcijas, mēs iegūstam dotā lineārā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$\mathrm{y = UV} = \left(\frac{\mathrm{x^2}}{2} + \mathrm{C}\right) \cdot \mathrm{e^{x^3}}$$

9.6.Uzdevums

Atrast dotā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, kurš apmierina norādīto sākuma nosacījumu (jeb atrisināt Košī uzdevumu).

$$(1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2\,, \qquad \mathrm{y}(1) = 4.$$

Atrisinājums

No sākuma, doto diferenciālvienādojumu pārrakstām veidā

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

Dalām vienādojuma abas puses ar $(1+x^2)$:

$$y' - \frac{2xy}{(1+x^2)} = (1+x^2)$$

Tagad ir saprotams, ka šis diferenciālvienādojums ir pirmās kārtas lineārs diferenciālvienādojums, ko var atrisināt ar substitūciju y=UV (izmantojot Bernulli metodi).

1) Ievietojam $\mathrm{y} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$ un $\mathrm{y}' = \mathrm{U}' \cdot \mathrm{V} + \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}'$ diferenciālvienādojumā

$$U'V + UV' - \frac{2x \cdot UV}{(1+x^2)} = (1+x^2)$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{2x \cdot V}{(1+x^2)}\right) = (1+x^2)$$

2) Izteiksmi iekavās pielīdzamām nullei

$$V' - \frac{2x \cdot V}{(1+x^2)} = 0$$

Izveidojam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} V' - \dfrac{2x \cdot V}{(1+x^2)} = 0 \\ \mathrm{U}'\mathrm{V} = (1+x^2) \end{cases}$$

3) Risinām pirmo sistēmas diferenciālvienādojumu, atdalot mainīgos

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2x \cdot V}{(1+x^2)}$$

$$\int \frac{dV}{dx} = \int \frac{2x}{(1+x^2)}\, dx$$

Lai aprēķinātu labās puses integrāli, pārveidosim diferenciāli $2xdx = d(x^2) = d(1+x^2)$,

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)}\, dx = \int \frac{1}{(1+x^2)}\, d(x^2+1) = \ln|x^2+1|$$

Tad

$$\ln|\mathrm{V}| = \ln|x^2+1| \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V} = x^2+1$$

4) Iegūto funkciju V ievietojam sistēmas otrajā vienādojumā

$$U'V = x^2 + 1$$

$$U'(x^2 + 1) = x^2 + 1$$

Vienkāršojam izteiksmi un aprēķinām funkciui U

$$U' = 1$$

$$\mathrm{U} = \int \mathrm{U}'\mathrm{dx} = \int 1\,\mathrm{dx} = x + \mathrm{C}$$

5) Ievietojot iegūtās funkcijas U un V izteiksmē y = UV, mēs iegūstam lineārā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$\mathrm{y} = \mathrm{UV} = (\mathrm{x} + \mathrm{C}) \cdot (x^2 + 1)$$

jeb

$$\mathrm{y} = (\mathrm{x} + \mathrm{C}) \cdot (x^2 + 1)$$

Lai atrastu partikulāro atrisinājumu, ievietojam vērtības $\mathrm{y} = 4$ un x$= 1$ iegūtā diferenciālvienādojuma vispārīgajā atrisinājumā

$$4 = (1 + \mathrm{C}) \cdot (1^2 + 1)$$

$$4 = (1 + C) \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = 1$$

Aizstājam konstanti C vispārīgajā atrisinājumā ar $\mathrm{C} = 1$, lai iegūtu dotā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu

$$\mathrm{y} = (\mathrm{x} + 1) \cdot (x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$$

9.3. Otrās kārtas lineāri diferenciālvienādojumi.

Šī sadaļa ir veltīta otrās kārtas diferenciālvienādojumiem. Sākumā īsumā tiks apskatīti otrās kārtas diferenciālvienādojumu pamatjēdzieni. Detalizēti tiks izskatīti otrās kārtas lineāri diferenciālvienādojumi ar konstantiem koeficientiem un divas šo vienādojumu risināšanas metodes - konstanšu variācijas metode un nenoteikto koeficientu metode.

9.3.1. Otrās kārtas diferenciālvienādojumi: Pamatjēdzieni.

Otrās kārtas diferenciālvienādojumu var pierakstīt *vispārīgā veidā*

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

vai *normālformā*

$$y'' = f(x, y, y')$$

kur *y=y(x)* ir nezināma funkcija.

Otrās kārtas diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums satur divas patvaļīgas konstantes C_1 un C_2. Vispārīgais atrisinājums var būt pierakstīts vai nu normālformā – atklātā veidā $y = \phi(x, C_1, C_2)$, vai apslēpta veidā $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

11.Piemērs

Aplūkosim vienu no vienkāršākiem otrās kārtas diferenciālvienādojumiem

$$y'' = 6x$$

Nezināmo funkciju *y(x)* aprēķinām, divas reizes integrējot vienādojuma abas puses pēc argumenta x

$$y' = \int 6x dx = 3x^2 + C_1$$

$$y = \int (3x^2 + C_1) dx = x^3 + C_1 x + C_2,$$

kur C_1, C_2 ir patvaļīgas konstantes.

Dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = x^3 + C_1 x + C_2$$

Lai atrastu otrās kārtas diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, ir nepieciešams uzdot divus papildus nosacījumus. Šos papildnosacījumus var uzdot divos veidos:

1) Uzdodot s*ākuma nosacījumus*, uzdodot funkciju y(x) un y'(x) vērtības punktā x= x_0

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{un} \quad y'(x_0) = y_1$$

2) Uzdodot r*obežnosacījumus*, uzdodot funkcijas y(x) vērtības pie dažādām argumentu x_1 un x_2 vērtībām

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{un} \quad y(x_2) = y_2$$

12.Piemērs

Aplūkosim diferenciālvienādojumu no 11. piemēra kopā ar sākumnosacījumiem:

$$y'' = 6x \text{ un } y(0) = 1\,, y'(0) = 2$$

Dota diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = x^3 + C_1x + C_2.$$

Lai atrastu partikulāro atrisinājumu un atrastu atbilstošas C_1 un C_2 vērtības:

1) Ievietojām $x = 0$ un $y = 1$ (tas ir, sākumnosācijumus funkcijai *y*) vispārīgajā atrisinājumā x un y vietā:

$$1 = 0^3 + C_1 0 + C_2$$

2) Aprēķinām vispārīgā atrisinājuma *y(x)* atvasinājumu *y'(x)* un ievietojam $x = 0$ un $y' = 2$ iegūtajā izteiksmē

$$y' = 3x^2 + C_1$$

$$2 = 3 \cdot 0^2 + C_1$$

Rezultātā, mēs aprēķinām konstantes, kas atbilst dotajiem sākuma nosacījumiem

$$C_1 = 2 \quad \text{un} \quad C_2 = 1$$

Diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu iegūstam, ievietojot C_1 un C_2 vērtības vispārīgajā atrisinājumā. Diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums, kas apmierina dotas sākumnosacījumus, ir

$$y = x^3 + 2x + 1$$

Definīcija: Otrās kārtās lineāri diferenciālvienādojumi

Otrās kārtas diferenciālvienādojumu sauc par ***lineāro diferenciālvienādojumu***, ja to var uzrakstīt formā

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x)$$

kur $a_1(x)$, $a_2(x)$ un $a_3(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas un $a_1(x) \neq 0$.

Definīcija: Homogēni un Nehomogēni lineāri diferenciālvienādojumi

1) Ja funkcija $f(x)$ lineāra diferenciālvienādojuma labajā pusē nav vienāda ar nulli $(f(x) \neq 0)$, tad diferenciālvienādojumu sauc par ***lineāru nehomogēnu diferenciālvienādojumu***

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x)$$

2) Ja funkcija $f(x)$ lineāra diferenciālvienādojuma labajā pusē ir vienāda ar nulli $(f(x) = 0)$, tad diferenciālvienādojumu sauc par ***lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu***

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0$$

Definīcija: Otrās kārtas lineāri diferenciālvienādojumi ar konstantiem koeficientiem

Otrās kārtas lineāru diferenciālvienādojumu sauc par lineāru diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem, ja koeficienti pie y'', y' un y ir konstantes

$$a_1y'' + a_2y' + a_3y = f(x)$$

kur a_1 , a_2 un a_3 ir konstanti skaitļi un $a_1 \neq 0$.

Nākamajā sadaļā aplūkosim otrās kārtas lineārus diferenciālvienādojumus ar konstantiem koeficientiem un to risināšanas metodes.

9.3.2. Otrās kārtas Lineāri Homogēni Diferenciālvienādojumi ar konstantiem koeficientiem

Aplūkosim otrās kārtas **lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem**

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

kur a_1 , a_2 un a_3 ir reāli skaitļi un $a_1 \neq 0$.

Homogēnajam diferenciālvienādojumam vienmēr eksistē triviālais atrisinājums *y* = 0.

Apskatīsim sekojošās lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājuma īpašības:

Īpašības: lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājuma īpašības

1) ja funkcija y ir lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājums, tad funkcija Cy, kur C ir konstante, arī ir šī vienādojuma atrisinājums;

2) ja y_1 un y_2 ir divi dažādi lineārā homogēnā vienādojuma atrisinājumi, tad $y_1 + y_2$ arī ir šī vienādojuma atrisinājums.

<u>Seko</u>: ja y_1 un y_2 ir lineārā homogēnā diferenciālvienādojuma divi dažādi partikulārie atrisinājumi, tad vienādojuma atrisinājums ir arī funkcija

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Tomēr jāpiebilst, ka ne vienmēr šī summa ir diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums!

Definīcija: Lineāri atkarīgas funkcijas

Funkcijas $y_1 \text{ un } y_2$ ir ***lineāri atkarīgas*** intervālā [a, b], ja šajā intervālā $\frac{y_1}{y_2} = \text{const}$, pretējā gadījumā tās ir *lineāri neatkarīgas*.

Lietojot īpašu funkcionāldeterminantu, var noskaidrot, vai funkcijas $y_1 \text{ un } y_2$ ir lineāri neatkarīgas. Determinantu sauc par Wronska determinantu

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

Ja $W \neq 0$, tad funkcijas ir lineāri neatkarīgas. Ja $W = 0$, tad lineāri atkarīgas.

Teorēma:

Lineārā homogēnā diferenciālvienādojuma atrisinājumi $y_1 \text{ un } y_2$ ir lineāri atkarīgas funkcijas tad un tikai tad, ja Wronska determinants ir nulle $W(y_1, y_2) = 0$.

Teorēma:

Ja funkcijas y_1 un y_2 *lineāri neatkarīgas* un apmierina lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu (ir lineāra homogēna diferenciālvienādojuma kādi partikulāri atrisinājumi), tad šī vienādojuma ***vispārīgais atrisinājums*** ir funkciju y_1 un y_2 lineāra kombinācija

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Lai atrisinātu lineāru homogēnu otrās kārtas diferenciālvienādojumu, jāatrod divi *lineāri neatkarīgi* partikulārie atrisinājumi. Tos meklēsim formā $y = e^{kx}$ (pēc Eilera metodes).

Lai atrastu koeficienta k vērtības, funkciju $y = e^{kx}$ un tās atvasinājumus

$$y' = \left(e^{kx}\right)' = ke^{\lambda x} \qquad , \qquad y'' = \left(ke^{kx}\right)' = k^2 e^{kx} .$$

ievietosim vienādojumā

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

Rezultātā iegūstam

$$a_1 k^2 e^{kx} + a_2 k e^{kx} + a_3 e^{kx} = 0.$$

Ievērojot, ka eksponentfunkcija ir visur pozitīva, un dalot vienādojuma abas puses ar e^{kx}, iegūstam vienādojumu

$$a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0$$

Šo vienādojumu sauc par diferenciālvienādojuma ***harakteristisko jeb raksturīgo vienādojumu.***

Koeficienta *k* vērtības aprēķinām risinot iegūto raksturīgo vienādojumu. Ir iespējami trīs gadījumi:

1. Raksturīga vienādojuma determinants ir pozitīvs $\underline{\mathbf{D > 0}}$.

   Šajā gadījumā raksturīgajam vienādojumam ir divas dažādas reālas saknes $\mathbf{k_1 \neq k_2}$.
   Tad lineāra homogēna diferenciālvienādojuma partikulāri atrisinājumi ir $y_1 = e^{k_1 x}$ un $y_2 = e^{k_2 x}$.

   Pārbaudīsim Wronska determinantu

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} \cdot k_2 e^{k_2 x} - e^{k_2 x} \cdot k_1 e^{k_1 x} =$$

$$= e^{k_1 x} e^{k_2 x} (k_2 - k_1) \neq 0$$

   Wronska determinants nav nulle, jo eksponentfunkcijas ir pozitīvas un $k_1 \neq k_2$. Tas nozīme, ka funkcijas $y_1 = e^{k_1 x}$ un $y_2 = e^{k_2 x}$ ir lineāri neatkarīgas.

   Secinām, ka, lineāra homogēna diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums šajā gadījumā ir:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

   kur C_1 un C_2 ir patvaļīgi reālie skaitļi.

2. Raksturīga vienādojuma determinants ir vienāds ar nulli $\underline{\mathbf{D = 0}}$.

   Šajā gadījumā raksturīgajam vienādojumam ir divas vienādas reālas saknes $\mathbf{k_1 = k_2} = \boldsymbol{k}$.

   Viens no lineāra homogēna diferenciālvienādojuma partikulāriem atrisinājums ir $y_1 = e^{kx}$, tad otru var izvēlēties $y_2 = xe^{kx}$. Nav grūti pieradīt, ka funkcija $y_2 = xe^{kx}$ apmierina doto lineāro homogēnu diferenciālvienādojumu. Pārbaudām, vai šie atrisinājumi ir lineāri neatkarīgi:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + xke^{kx} \end{vmatrix} = e^{kx}\left(e^{kx} + xke^{kx}\right) - xe^{kx} \cdot ke^{kx} =$$

$$= \left(e^{kx}\right)^2 + xk\left(e^{kx}\right)^2 - xk\left(e^{kx}\right)^2 = e^{2kx} > 0$$

   Wronska determinants nav nulle, tad funkcijas y_1 un y_2 ir lineāri neatkarīgas.

   Tātad lineāra homogēna diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums šajā gadījumā ir:

$$\mathrm{y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}} \quad \text{vai} \quad \mathrm{y = (C_1 + C_2x)e^{kx}}$$

3. Raksturīga vienādojuma determinants ir negatīvs $\underline{\mathbf{D} < 0}$.

   Šajā gadījumā raksturīga vienādojuma saknes ir **kompleksi saistīti skaitļi** $\mathbf{k_{1,2} = \boldsymbol{\alpha} \pm i\boldsymbol{\beta}}$ ($kur \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}$) .

   Lineāra homogēna diferenciālvienādojuma partikulāri atrisinājumi ir

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} \quad \text{un} \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$$

Saskaņā ar Eilera formulu var rakstīt

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(cos\beta x - isin\beta x)$$

Ja lineāro homogēnu diferenciālvienādojumu apmierina funkcija $u(x) + iv(x)$, tad var pierādīt, ka šo vienādojumu apmierina arī funkcijas $u(x)$ un $v(x)$.

No tā seko, ka lineāri neatkarīgās funkcijas

$$y_1 = e^{\alpha x}cos\beta x \quad \text{un} \quad y_2 = e^{\alpha x}sin\beta x$$

arī ir lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājumi.

Tad vispārīgais lineārā homogēnā diferenciālvienādojuma atrisinājums ir

$$y = C_1e^{\alpha x}cos\beta x + C_2e^{\alpha x}sin\beta x$$

vai

$$y = e^{\alpha x}(C_1cos\beta x + C_2sin\beta x)$$

Kopsavilkums: Lineāra homogēna diferenciālvienādojuma risināšanas algoritms:

Dots vienādojums

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

1)Sastāda atbilstošo raksturīgo vienādojumu

$$a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0$$

2) Atrisina šo vienādojumu;

3) Lineāra homogēna diferenciālvienādojuma iespējamie atrisinājumi ir doti tabulā 1.

Raksturīga vienādojuma saknes	Vispārīgais atrisinājums
$k_1 \neq k_2$ reālas dažādas	$y = C_1\, e^{k_1 x} + C_2\, e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2 = k$ reālas vienādas	$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ kompleksas	$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$

Tabula 1

13. Piemērs

Apskatīsim sekojošo lineāro diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem

$$y'' + 3y' - 10y = 0$$

Atbilstošais raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 + 3k - 10 = 0$$

Šī vienādojuma diskriminants $D = 49 > 0$; tādējādi saknes ir reāli un dažādi skaitļi

$$\mathrm{k}_1 = 2 \quad \mathrm{un} \quad \mathrm{k}_2 = -5$$

Tad dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\mathrm{y} = \mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} + \mathrm{C}_2 \mathrm{e}^{-5\mathrm{x}}.$$

14.Piemērs

Aplūkosim diferenciālvienādojumu

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Vienādojuma raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

Diskriminants $D = 0$ un vienādojuma saknes ir vienādi, reāli skaitļi

$$\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2 = 2$$

Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums būs

$$\mathrm{y} = \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{2\mathrm{x}} + \mathrm{C}_2\mathrm{x}\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$$

15. Piemērs

Atrisināsim diferenciālvienādojumu

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

Diferenciālvienādojuma raksturīgais vienādojums ir:

$$k^2 + 2k + 10 = 0$$

Raksturīgā vienādojuma diskriminants $D = -36 < 0$, un vienādojumam saknes ir kompleksi saistīti skaitļi

$$\mathrm{k}_1 = -1 + 3\mathrm{i} \quad \mathrm{un} \quad \mathrm{k}_2 = -1 - 3\mathrm{i}$$

Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\mathrm{y} = \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\cos 3\mathrm{x} + \mathrm{C}_2\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\sin 3\mathrm{x}$$

Uzdevumi

9.7.Uzdevums

Atrast dotā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu un partikulāro atrisinājumu, kas apmierina dotos sākumnosacījumus

$$y'' - 4y' + 13\mathrm{y} = 0\,, \quad \mathrm{y}(0) = 6, \quad \mathrm{y}'(0) = 1$$

Atrisinājums

Dotais vienādojums ir otrās kārtas lineārs homogēns diferenciālvienādojums. Vienādojuma raksturīgais vienādojums ir

$$\mathrm{k}^2 - 4\mathrm{k} + 13 = 0$$

Šī kvadrātvienādojuma determinants ir $D = -36 < 0$ tāpēc saknes ir kompleksi saistīti skaitļi

$$k_1 = \frac{4+\sqrt{-36}}{2} = 2 + 3 \cdot i \quad \text{un} \quad k_2 = \frac{4-\sqrt{-36}}{2} = 2 - 3 \cdot i$$

Tas nozīmē, ka dotā diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums ir

$$y = C_1 e^{2 \cdot x} \cos(3x) + C_2 e^{2 \cdot x} \sin(3x)$$

Lai atrastu partikulāro atrisinājumu, kad apmierina dotos sākumnosacījumus,

1) Mēs ievietojam sākuma nosacījuma vērtības $x = 0$ un $y = 6$ vispārīgajā atrisinājumā

$$6 = C_1 e^{2 \cdot 0} \cos(0) + C_2 e^{2 \cdot 0} \sin(0)$$

$$6 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$$

$$C_1 = 6$$

2) Aprēķinām vispārīgā atrisinājuma y (x) atvasinājumu y'(x):

$$y' = \left(e^{2 \cdot x} \cdot (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)\right)' = (e^{2 \cdot x})'(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \; e^{2 \cdot x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)' =$$

$$= 2e^{2 \cdot x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \; e^{2 \cdot x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) \; =$$

$$= e^{2 \cdot x}(2C_1 \cos 3x + 2C_2 \sin 3x - 3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)$$

Tātad

$$y' = e^{2 \cdot x}(2C_1 \cos 3x + 2C_2 \sin 3x - 3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)$$

Ievietojam sākumnosacījuma vērtības $x = 0$ un $y' = 1$ iegūtajā izteiksmē

$$1 = e^{2 \cdot 0}(2C_1 \cos 0 + 2C_2 \sin 0 - 3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0) = 2C_1 + 0 - \; 0 + 3C_2$$

$$1 = 2C_1 + 3C_2$$

Ievietojot $C_1 = 6$, iegūstam

$$1 = 12 + 3C_2$$

$$C_2 = -\frac{11}{3}$$

Ievietojam iegūtās konstantes diferenciālvienādojuma vispārīgajā atrisinājumā. Rezultātā iegūstam diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu

$$y = 6e^{2x} \cos(3x) - \frac{11}{3} e^{2x} \sin(3x)$$

9.3.3. Otrās kārtas Lineāri Nehomogēni Diferenciālvienādojumi ar konstantiem koeficientiem

Lineārs **nehomogēns** diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem ir dots sekojoši

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

kur a_1 , a_2 un a_3 patvaļīgas konstantes un $a_1 \neq 0$.

Katram nehomogēnam lineāram diferenciālvienādojumam var uzrakstīt atbilstošo homogēno diferenciālvienādojumu:

$$a_1 Y'' + a_2 Y' + a_3 Y = 0$$

Teorēma:

Lineāra nehomogēna diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir vienāds ar atbilstošā homogēnā vienādojuma vispārīgā atrisinājuma Y un lineārā nehomogēnā vienādojuma kaut kāda partikulārā atrisinājuma $\tilde{y}$ summu

$$y = Y + \tilde{y}.$$

Apskatīsim divas metodes, lai atrastu nehomogēnā diferenciālvienādojuma partikuläro atrisinājumu $\tilde{y}$. Tās ir *nenoteikto koeficientu metode* un *konstanšu variācijas metode* (jeb Lagranža metode).

1. Konstanšu variācijas metode

Lagranža konstanšu variācijas metodi var izmantot jebkura veida funkcijai f(x) lineāra nehomogēna diferenciālvienādojuma labajā pusē.

Metode sastāv no sekojošiem posmiem:

1) Risina atbilstošo homogēno diferenciālvienādojumu

$$a_1 Y'' + a_2 Y' + a_3 Y = 0$$

Šī vienādojuma vispārīgais atrisinājums $Y(x)$ satur divas patvaļīgas konstantes un izskatās sekojoši

$$Y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

kur C_1 , C_2 ir patvaļīgas konstantes un funkcijas $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ ir atkarīgas no raksturīgā vienādojuma saknēm.

2) Dotā nehomogenā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu meklē formā, kura ir līdzīga atbilstošā homogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgā atrisinājuma formai, bet konstantes C_1 un C_2 aizvieto ar kādam nezināmām funkcijām $C_1(x)$ un $C_2(x)$, tas ir, nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu meklē formā

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$$

3) Ņemot vērā, ka funkcija $\mathrm{y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2}$ apmierina doto nehomogēno diferenciālvienādojumu, var pierādīt, ka nezināmās funkcijas $\mathrm{C_1(x)}$ un $\mathrm{C_2(x)}$ var noteikt, risinot vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \mathrm{C'_1(x) \cdot y_1 + C'_2(x) \cdot y_2 = 0} \\ \mathrm{C'_1(x) \cdot y'_1 + C'_2(x) \cdot y'_2 = \dfrac{f(x)}{a_1}} \end{cases}$$

4) No sistēmas atrod $\mathrm{C_1{}'(x)}$ un $\mathrm{C_2{}'(x)}$.

5) Integrējot aprēķina $\mathrm{C_1(x) = \int C_1{}'(x)dx}$ un $\mathrm{C_2(x) = \int C_2{}'(x)dx}$

6) Iegūtās funkcijas $\mathrm{C_1(x)}$ un $\mathrm{C_2(x)}$ ievieto vispārīgā atrisinājuma izteiksmē

$$\mathrm{y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2}.$$

16. Piemērs

Atrisināt diferenciālvienādojumu:

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$$

Atrisinājums:

1) Atrisinām atbilstošo homogēno diferenciālvienādojumu

$$Y'' + 9Y = 0$$

Raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 + 9 = 0 \qquad => \qquad k^2 = -9$$

Raksturīgā vienādojuma saknes ir kompleksi saistītie skaitļi:

$$\mathrm{k_1 = \sqrt{-9} = 3i = 0 + 3i \quad un \quad k_2 = -\sqrt{-9} = -3i = 0 - 3i}$$

Atbilstošā *homogēnā diferenciālvienādojuma* vispārīgais atrisinājums ir

$$\mathrm{Y = C_1 e^{0 \cdot x} cos3x + C_2 e^{0 \cdot x} sin3x}$$

jeb
$$Y = \mathrm{C_1 cos3x + C_2 sin3x}$$

kur $\mathrm{C_1}$ un $\mathrm{C_2}$ ir patvaļīgas konstantes.

2) Aizstājam konstantes $\mathrm{C_1}$ un $\mathrm{C_2}$ ar patvaļīgām nezināmām funkcijām $\mathrm{C_1(x)}$ un $\mathrm{C_2(x)}$ un meklējam dotā *nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu* formā:

$$\mathrm{y = C_1(x) cos3x + C_2(x) sin3x}$$

3) Funkcijas $\mathrm{C}_1(\mathrm{x})$ un $\mathrm{C}_2(\mathrm{x})$ atrodam no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \mathrm{C'}_1(\mathrm{x}) \cdot \cos 3x + \mathrm{C'}_2(\mathrm{x}) \cdot \sin 3x = 0 \\ \mathrm{C'}_1(\mathrm{x}) \cdot (\cos 3x)' + \mathrm{C'}_2(\mathrm{x}) \cdot (\sin 3x)' = \dfrac{1}{\cos 3x} \end{cases}$$

Aprēķinot atvasinājumus, iegūstam

$$\begin{cases} \mathrm{C'}_1(\mathrm{x}) \cdot \cos 3x + \mathrm{C'}_2(\mathrm{x}) \cdot \sin 3x = 0 \\ \mathrm{C'}_1(\mathrm{x}) \cdot (-3\sin 3x) + \mathrm{C'}_2(\mathrm{x}) \cdot 3\cos 3x = \dfrac{1}{\cos 3x} \end{cases}$$

4) Risinām sistēmu, izmantojot Krāmera formulas

a) aprēķinām sistēmas koeficientu matricas determinantu

$$\mathrm{D}= \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3\cos^2 3x + 3\sin^2 3x = 3$$

un determinantus

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \dfrac{1}{\cos 3x} & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 0 - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = -\mathrm{tg} 3x$$

$$\mathrm{D}_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & \dfrac{1}{\cos 3x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 3x}{\cos 3x} - 0 = 1$$

Tad

$$C'_1(x) = \frac{D_1}{D} = -\frac{\mathrm{tg} 3x}{3} \qquad \text{un} \qquad C'_2(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{3}$$

5) Integrējot funkcijas $C'_1(x)$ un $C'_2(x)$, aprēķinām nezināmās funkcijas $\mathrm{C}_1(\mathrm{x})$ un $\mathrm{C}_2(\mathrm{x})$

$$C_1(x) = \int C'_1(x)\, dx \quad \text{un} \quad C_2(x) = \int C'_2(x)\, dx \; .$$

$$C_1(x) = \int \left(-\frac{\mathrm{tg} 3x}{3}\right) \mathrm{dx} = -\frac{1}{3} \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\, \mathrm{dx} = \frac{1}{9} \int \frac{\mathrm{d}(\cos 3x)}{\cos 3x} = \frac{1}{9} \ln|\cos 3x| + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = \int C'_2(x)\, dx = \int \frac{1}{3}\, \mathrm{dx} = \frac{1}{3} \int 1\, \mathrm{dx} = \frac{1}{3}\mathrm{x} + \tilde{C}_2$$

Tātad,

$$C_1(x) = \frac{1}{9} \ln|\cos 3x| + \tilde{\mathrm{C}}_1 \quad \text{un} \quad C_2(x) = \frac{1}{3}\mathrm{x} + \tilde{\mathrm{C}}_2$$

kur $\tilde{\mathrm{C}}_1$ un $\tilde{\mathrm{C}}_2$ ir patvaļīgas konstantes.

6) Ievietojam iegūtās funkcijas $C_1(x)$ un $C_2(x)$ nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgā atrisinājuma formā

$$y = \left(\frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + \tilde{C}_1\right)\cos 3x + \left(\frac{1}{3}x + \tilde{C}_2\right)\sin 3x$$

Rezultātā iegūstam dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$y = \tilde{C}_1\cos 3x + \tilde{C}_2\sin 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| \cdot \cos 3x + \frac{1}{3}x \cdot \sin 3x$$

vai

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| \cdot \cos 3x + \frac{1}{3}x \cdot \sin 3x$$

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

Atzīmēsim, ka iegūtajā atrisinājumā divu pirmo saskaitāmo summa ir atbilstošā homogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums Y, bet pēdējo divu saskaitāmo summa ir dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums $\tilde{y}$.

2. Nenoteikto koeficientu metode

Aplūkosim speciālgadījumus – tādus otrās kārtas nehomogēnus diferenciālvienādojumus ar konstantiem koeficientiem, kuriem labajā pusē ir funkcijas, kuru atvasinājums būtiski neatšķiras no dotās funkcijas veida. Tādas funkcijas ir polinomi $P_n(x)$, eksponentfunkcijas $a^{\lambda x}$, trigonometriskās funkcijas $\sin\beta x$ un $\cos\beta x$, kā arī šo funkciju summa, starpība un reizinājums. Šajā gadījumā mēs varam paredzēt diferenciālvienādojuma atrisinājuma formu, ņemot vērā diferenciālvienādojuma labās puses funkcijas formu. Lai atrisinātu tāda veida diferenciālvienādojumus, izmanto nenoteikto koeficientu metodi.

Nenoteikto koeficientu metodes galvenā ideja ir konstruēt dotā nehomogēnā vienādojuma partikulāro atrisinājumu $\tilde{y}$ kā funkciju ar nenoteiktiem koeficientiem tādā formā, kas atbilst funkcijai $f(x)$ vienādojuma labajā pusē. Pēc tam, ievietojot $\tilde{y}$ vienādojumā, tiek atrasti nezināmie koeficienti.

Aplūkosim trīs gadījumus funkcijai diferenciālvienādojuma labajā pusē:

1) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, kur $P_n(x)$ ir n-tās kārtas polinoms

Šajā gadījumā diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums $\tilde{y}$ ir tāda paša veida izteiksme, ka funkcija *f(x),* tikai polinoma $P_n(x)$ vietā jāraksta polinoms ar nenoteiktiem koeficientiem. Turklāt, ja koeficients α eksponentfunkcijas argumentā sakrīt ar raksturīgā vienādojuma sakni, tad partikulārais atrisinājums satur papildreizinātāju x^s , kur *s ir raksturīgā vienādojuma saknes kārta*. Tas nozīmē, ka partikulārajam atrisinājumam šajā gadījumā ir veids

$$\tilde{y} = \widetilde{P_n}(x)e^{\alpha x} \cdot x^s$$

kur $\widetilde{P_n}(x)$ ir n-tās kārtas polinoms ar nenoteiktiem koeficientiem, tas ir

$\widetilde{P_0}(x) = A$, ja n=0;

$\widetilde{P_1}(x) = Ax + B$, ja n=1;

$\widetilde{P_2}(x) = Ax^2 + Bx + C$, ja n=2 un tā tālāk.

Lai atrastu reizinātāja x^s kāpinātāju s, eksponentfunkcijas kāpinātāja koeficientu α vajag salīdzināt ar raksturīga vienādojuma saknēm k_1 un k_2 :

ja $\alpha \neq k_1$ un $\alpha \neq k_2$, tad $\underline{s = 0}$;

ja $\alpha = k_1$, $\alpha \neq k_2$ VAI $\alpha \neq k_1$, $\alpha = k_2$, tad $\underline{s = 1}$;

ja $\alpha = k_1 = k_2$, tad $\underline{s = 2}$;

2) $f(x) = e^{\alpha x}(N\cos(\beta x) + M\sin(\beta x))$, kur *N, M* ir konstantas

vai

$f(x) = e^{\alpha x} N \cos(\beta x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = e^{\alpha x}(N\cos(\beta x) + \mathbf{0} \cdot \sin(\beta x)) \qquad (M = 0)$

$f(x) = e^{\alpha x} M \sin(\beta x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = e^{\alpha x}(\mathbf{0} \cdot \cos(\beta x) + M \cdot \sin(\beta x)) \qquad (N = 0)$

Šajos gadījumos nehomogēnā vienādojuma partikulāro atrisinājumu $\tilde{y}$ pieraksta formā

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)) \cdot x^s$$

kur *A* un *B* ir nenoteiktie koeficienti.

Lai noteiktu reizinātāja x^s kāpinātāju, skaitļi $\alpha + \beta i$ jāsalīdzina ar raksturīgā vienādojuma saknēm:

ja $\alpha + i\beta \neq k_1$ un $\alpha + i\beta \neq k_2$ (neviena sakne nesakrīt ar $\alpha + \beta i$), tad $\underline{s = 0}$;

ja $\alpha + i\beta = k_1$ vai $\alpha + i\beta = k_2$ (viena sakne sakrīt ar $\alpha + \beta i$) tad $\underline{s = 1}$.

3) $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$

$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos(\beta x) \qquad (Q_m(x) = 0)$

$f(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) \sin(\beta x) \qquad (P_n(x) = 0)$

kur $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ n-tās un m-tās pakāpes polinomi.

Šajos gadījumos lineāra nehomogēnā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu meklē formā

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}\left(\widetilde{P_k}(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q_k}(x)\sin(\beta x)\right) \cdot x^s$$

kur $\widetilde{P_k}(x)$ un $\widetilde{Q_k}(x)$ ir k-tās pakāpes polinomi ar nenoteiktiem koeficientiem un $k = \max(n, m)$.

ja $\alpha + i\beta \neq k_1$ un $\alpha + i\beta \neq k_2$ tad $\underline{s = 0}$;

ja $\alpha + i\beta = k_1$ vai $\alpha + i\beta = k_2$ tad $\underline{s = 1}$.

Kopsavilkums:

Ja labās puses funkcija ir polinoms, eksponentfunkcija vai funkcijas *sinβx*, *cosβx*, vai arī minēto funkciju lineāra kombinācija, funkciju $\tilde{y}$ izvēlas, saskaņojot rezultātu ar labās puses funkciju *f(x)* un homogēnā diferenciālvienādojuma raksturīga vienādojuma atrisinājumu (skat. tabulu 1). Jāseko, lai uzdevuma vispārīgajā atrisinājumā visi saskaitāmie ir lineāri neatkarīgi. Lai novērstu lineāro atkarību, partikulāro atrisinājumu piereizina ar x vai x^2 . (skat. tabulu2).

Nr	Labās puses funkcija *f(x)*	Homogēnā vienādojuma saknes $\boldsymbol{k}$	Nehomogēnā vienādojuma partikulārais atrisinājums $\tilde{\boldsymbol{y}}$
1.	$P_n(x)$	$k_1 \neq 0;\ k_2 \neq 0$	$\widetilde{P_n}(x)$
		$k_1 = 0;\ k_2 \neq 0$	$x \cdot \widetilde{P_n}(x)$
		$k_1 = k_2 = 0$	$\mathrm{x}^2 \cdot \widetilde{P_n}(x)$
2.	$ae^{\alpha x}$	$k_1 \neq \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\mathrm{Ae}^{\alpha \mathrm{x}}$
		$k_1 = \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\mathrm{x} \cdot \mathrm{Ae}^{\alpha \mathrm{x}}$
		$k_1 = k_2 = \alpha$	$\mathrm{x}^2 \cdot \mathrm{Ae}^{\alpha \mathrm{x}}$
3.	$P_n(x)e^{\alpha x}$	$k_1 \neq \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\widetilde{P_n}(x)\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}}$
		$k_1 = \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$x \cdot \widetilde{P_n}(x)e^{\alpha x}$
		$k_1 = k_2 = \alpha$	$\mathrm{x}^2 \cdot \widetilde{P_n}(x)\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}}$
4.	$N\cos(\beta x)$ vai $M\sin(\beta x)$, vai $N\cos(\beta x) + M\sin(\beta x)$	$k_{1,2} \neq \pm\beta i$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$
		$k_{1,2} = \pm\beta i$	$x \cdot (A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$
5.	$e^{\alpha x}N\cos(\beta x)$ vai $e^{\alpha x}M\sin(\beta x)$ vai $e^{\alpha x}(N\cos(\beta x) + M\sin(\beta x))$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$
		$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$xe^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$

Tabula 2

Polinomu $\widetilde{P_k}(x)$ un $\widetilde{Q_k}(x)$ nenoteiktos koeficientus aprēķina, ievietojot partikulārā atrisinājuma izteiksmi $\tilde{y}$ dotajā nehomogēnajā diferenciālvienādojumā.

Nehomogēna diferenciālvienādojuma risināšanas algoritms, izmantojot nenoteikto koeficientu metodi

1) Atrisina atbilstošo lineāro homogēno diferenciālvienādojumu $\mathrm{a_1 Y'' + a_2 Y' + a_3 Y = 0}$,

2) Sastāda nehomogēnā vienādojuma partikulāro atrisinājumu $\tilde{y}$, kas satur nenoteiktus koeficientus un atbilst dotā vienādojuma labās puses funkcijai f(x) (skat. tabulu 2),

3) Aprēķina $\tilde{y}'\,un\;\tilde{y}''$,

4) Aprēķina nenoteiktos koeficientus, ievietojot partikulāro atrisinājumu $\tilde{y}$ un tā atvasinājumus dotajā diferenciālvienādojumā,

5) Ievieto iegūtos koeficientus partikulārā atrisinājuma $\tilde{y}$ izteiksmē,

6) Pieraksta dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu, saskaitot atbilstošā homogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu un dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu

$$\mathrm{y} = Y(\mathrm{x}) + \tilde{y}(x)$$

kur $Y(\mathrm{x})$ ir atbilstošā homogēna diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums un $\tilde{y}(x)$ ir dotā nehomogēnā vienādojuma partikulārais atrisinājums.

17. Piemērs

Atrisināsim vienādojumu

$$\mathrm{y'' - 2y' = x^2 + 5x - 1}$$

Sākumā atrisinām atbilstošo homogēno diferenciālvienādojumu

$$\mathrm{Y'' - 2Y' = 0}$$

Šī vienādojuma raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 - 2k = 0 \quad => \quad k \cdot (k-2) = 0$$

Raksturīgā vienādojuma saknes ir reāli, dažādi skaitļi

$$\mathrm{k_1 = 0 \quad un \quad k_2 = 2}$$

Tādējādi, atbilstošā *homogēnā diferenciālvienādojuma* vispārīgais atrisinājums ir

$$\mathrm{Y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{2 \cdot x}}$$

jeb

$$\mathrm{Y} = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 e^{2x}$$

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

Pierakstām nehomogēnā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu $\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{x})$, ņemot vērā, ka labās puses funkcija ir otrās kārtas polinoms

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 1$$

Šī funkcija var būt pārrakstīta formā

$$f(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 1) \cdot \mathrm{e}^{0 \cdot \mathrm{x}}.$$

Šajā gadījumā partikulāro atrisinājumu $\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{x})$ pieraksta formā:

$$\tilde{\mathrm{y}} = \widetilde{\mathrm{P}_\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}} \cdot \mathrm{x}^\mathrm{s},$$

kur $\widetilde{\mathrm{P}_\mathrm{n}}(\mathrm{x})$ ir n-tās pakāpes polinoms ar nenoteiktiem koeficientiem.

Arī polinomam $\widetilde{\mathrm{P}_\mathrm{n}}(\mathrm{x})$ jābūt otrās kārtas polinomam, bet ar nenoteiktiem koeficientiem

$$\widetilde{\mathrm{P}_2}(\mathrm{x}) = \mathrm{Ax}^2 + \mathrm{Bx} + \mathrm{C}$$

Funkcijas $f(x)$ eksponentfunkcijas kāpinātājs ir *α=0* un tas sakrīt ar raksturīgā vienādojuma vienu sakni: $\alpha = k_1 = 0$, tāpēc $s = 1$ un diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums satur reizinātāju x^1.

Tātad dotā diferenciālvienādojuma partikulārajam atrisinājumam ir sekojošais veids

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{\mathbf{0} \cdot x} \cdot x^1 = (Ax^2 + Bx + C) \cdot \mathrm{x}$$

jeb

$$\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

3) Aprēķinām pirmās un otrās kārtas funkcijas $\tilde{y}$ atvasinājumus

$$\tilde{y}\,' = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\tilde{y}\,'' = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$$

4) Ievietojam funkcijas $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ un $\tilde{y}''$ dotajā nehomogēnajā diferenciālvienādojumā

$$y'' - 2y' = x^2 + 5x - 1,$$

iegūstot

$$6Ax + 2B - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 5x - 1$$

Vienkāršojam iegūtās izteiksmes kreiso pusi:

$$-6Ax^2 + 6Ax - 4Bx + 2B - 2C = x^2 + 5x - 1$$

Grupējam koeficientus pie vienādām argumenta x pakāpēm izteiksmes kreisajā pusē:

$$-6Ax^2 + (6A - 4B)x + 2B - 2C = 1 \cdot x^2 + 5x + (-1)$$

Divi polinomi ir vienādi tad un tikai tad, ja koeficienti pie abu polinomu vienādajām x pakāpēm ir vienādi. Vienādojuma labā un kreisā puses ir vienādas katrai reālai $x \in R$ vērtībai. Pielīdzināsim koeficientus pie vienādajām argumentu pakāpēm:

Koeficienti pie x^2: $-6A = 1$;

Koeficienti pie x: $6A - 4B = 5$;

Koeficienti pie x^0: $2B - 2C = -1$.

Risinām sistēmu

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ 6A - 4B = 5 \\ 2B - 2C = -1 \end{cases}$$

No sistēmas pirmā vienādojuma iegūstam $A = -\frac{1}{6}$.

No sistēmas otrā vienādojuma iegūstam

$$6A - 4B = 5 \Rightarrow 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - 4B = 5 \Rightarrow -4B = 6$$

$$B = -\frac{3}{2}$$

No sistēmas trešā vienādojuma iegūstam

$$2B - 2C = -1 \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2C = -1 \Rightarrow -2C = 2$$

$$C = -1$$

Iegūtos koeficientus ievietojam nehomogēnā vienādojuma vispārīgajā atrisinājumā $\tilde{y}$ nenoteikto koeficientu vietā :

$$\tilde{y} = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x$$

Rezultātā, nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

18. Piemērs

Atrisināsim lineāro nehomogēno diferenciālvienādojumu:

$$y'' + y' - 2y = xe^{2x}$$

1) Atbilstošais homogēnais diferenciālvienādojums ir

$$\mathrm{Y}'' + \mathrm{Y}' - 2\mathrm{Y} = 0$$

Šī vienādojuma raksturīgais vienādojums

$$k^2 + k - 2 = 0$$

Raksturīgā vienādojuma saknes ir

$$\mathrm{k}_1 = 1 \quad \mathrm{un} \quad \mathrm{k}_2 = -2$$

Atbilstošā *homogēnā diferenciālvienādojuma* vispārīgais atrisinājums ir

$$\mathrm{Y} = \mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{1 \cdot \mathrm{x}} + \mathrm{C}_2 \mathrm{e}^{-2 \cdot \mathrm{x}}$$

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

2) Konstruēsim nehomogēnā diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu $\tilde{y}$, ņemot vērā diferenciālvienādojuma labās puses funkcijas veidu

$$f(x) = xe^{2x}$$

Šajā gadījumā partikulārā atrisinājuma $\tilde{y}$ forma ir: $\tilde{y} = \widetilde{P_n}(x)e^{\alpha x} \cdot x^s$.

Funkcija $f(x)$ satur pirmās kārtas polinomu, līdz ar to, polinomam $\widetilde{P_n}(x)$ ar nenoteiktiem koeficientiem arī ir jābūt pirmās kārtas polinomam

$$\widetilde{P_1}(x) = Ax + B$$

Funkcijas $f(x)$ reizinātāja e^{2x} kāpinātāja koeficients ir $\alpha = 2$, kas **nesakrīt** ar raksturīgā vienādojuma saknēm : $\alpha \neq k_1$ un $\alpha \neq k_2$, tāpēc $s = 0$ un dotā diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums $\tilde{y}$ jāpieraksta formā

$$\tilde{y} = (Ax + B) \cdot e^{2 \cdot x} \cdot x^0 = (Ax + B) \cdot e^{2 \cdot x}$$

3) Aprēķinām funkcijas $\tilde{y}$ pirmās un otrās kārtas atvasinājumus

$$\tilde{y}' = \left((Ax + B)e^{2 \cdot x}\right)' = (Ax + B)' \cdot e^{2x} + (Ax + B) \cdot (e^{2 \cdot x})' =$$

$$= Ae^{2x} + (Ax + B) \cdot 2e^{2 \cdot x}$$

Sagrupējot

$$\tilde{y}\,' = (2Ax + 2B + A)e^{2x}$$

$$\tilde{y}\,'' = \left((2Ax + 2B + A)e^{2x}\right)' = (2Ax + 2B + A)' \cdot e^{2x} + (2Ax + 2B + A) \cdot (e^{2x})' =$$

$$= 2\mathrm{A}e^{2x} + (2Ax + 2B + A) \cdot 2e^{2x} = (4Ax + 4B + 4A) \cdot e^{2x}$$

Tātad,

$$\tilde{y}\,'' = (4Ax + 4B + 4A) \cdot e^{2x}.$$

4) Ievietojam iegūtos atvasinājumus $\tilde{y}''$, $\tilde{y}'$ un funkciju $\tilde{y}$ dotajā nehomogēnajā diferenciālvienādojumā

$$y'' + y' - 2y = xe^{2x}.$$

Rezultātā

$$(4Ax + 4B + 4A) \cdot e^{2x} + (2Ax + 2B + A)e^{2x} - 2(Ax + B) \cdot e^{2 \cdot x} = xe^{2x}$$

Vienkāršosim iegūto izteiksmi

$$(4Ax + 4B + 4A + 2Ax + 2B + A - 2Ax - 2B) \cdot e^{2x} = xe^{2x}$$

Dalīsim vienādojuma abas puses ar e^{2x}, tad

$$4Ax + 4B + 5A = x$$

Jeb

$$4Ax + 4B + 5A = 1x + 0.$$

Vienādojuma labā un kreisā puses ir vienādas katrai $x \in R$ vērtībai. Tas ir iespējams tikai tad, ja koeficienti pie vienādām argumenta x pakāpēm vienādojuma labajā un kreisajā pusē ir vienādi.

Koeficienti pie x: $4A = 1$;

Koeficienti pie x^0: $4B + 5A = 0$.

Tas noved pie sekojošas sistēmas risināšanas

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B + 5A = 0 \end{cases}.$$

No sistēmas pirmā vienādojuma seko: $A = \frac{1}{4}$.

No sistēmas otrā vienādojuma

$$4B + 5 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4B = -\frac{5}{4} \Rightarrow B = -\frac{5}{16} .$$

Ievietojam iegūtās konstantes nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgajā atrisinājumā:

$$\tilde{y} = (Ax + B) \cdot e^{2x} = \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{16}\right) \cdot e^{2x}$$

Rezultātā, dotā nehomogēna diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{16}\right) \cdot e^{2x}$$

19 . Piemērs

Atrisināsim diferenciālvienādojumu

$$y'' + y = 3\cos x + 2\sin x$$

1) Atbilstošais homogēnais diferenciālvienādojums ir

$$Y'' + Y = 0$$

Šī vienādojuma raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = -1$$

Raksturīgā vienādojuma saknes ir kompleksi saistītie skaitļi

$$k_1 = i = 0 + 1 \cdot i \quad \text{un} \quad k_2 = -i = 0 - 1 \cdot i$$

Tādējādi, atbilstošā *homogēnā diferenciālvienādojuma* vispārīgais atrisinājums ir

$$Y = C_1 e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x) + C_2 e^{0 \cdot x} \sin(1 \cdot x)$$

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Dotā nehomogēna diferenciālvienādojuma labās puses funkcija satur trigonometriskas funkcijas

$$f(x) = 3\cos x + 2\sin x = e^{ox}(3\cos x + 2\sin x) .$$

Tad saskaņā ar tabulu 2 partikulārā atrisinājuma $\tilde{y}$ forma ir

$$\tilde{y} = x(A\cos x + B\sin x),$$

jo raksturīgā vienādojuma saknes imaginārā daļa sakrīt ar funkcijas f(x) sinusa un kosinusa funkciju argumenta koeficientiem (skaitlis $\alpha+\beta i=0+1\cdot i$ sakrīt ar raksturīga vienādojuma sakni k_1)– ir jānovērš vispārīgajā atrisinājumā iekļauto funkciju lineārā atkarība.

3) Lai aprēķinātu nenoteiktos koeficientus A un B, aprēķinām funkcijas $\tilde{y}$ pirmās un otrās kārtas atvasinājumus

$$\tilde{y}\,'=\left((\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x)\cdot \mathrm{x}\right)'=(\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x)'\cdot \mathrm{x}+(\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x)\cdot(\mathrm{x})'=$$

$$=(-A\sin x+B\cos x)\cdot \mathrm{x}+(\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x)$$

$$\tilde{y}\,''=\left((-A\sin x+B\cos x)\cdot \mathrm{x}+(\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x)\right)'=$$

$$=(-A\sin x+B\cos x)'\cdot \mathrm{x}+(-A\sin x+B\cos x)\cdot \mathrm{x}'+(\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x)'=$$

$$=(-A\cos x-B\sin x)\cdot \mathrm{x}+(-A\sin x+B\cos x)-A\sin x+B\cos x=$$

$$=(-A\cos x-B\sin x)\cdot \mathrm{x}-2A\sin x+2B\cos x$$

4) $\tilde{y}''$ un $\tilde{y}$ ievietojam dotajā nehomogēnajā diferenciālvienādojumā

Rezultātā:

$$(-A\cos x-B\sin x)\cdot \mathrm{x}-2A\sin x+2B\cos x+(\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x)\cdot \mathrm{x}=3\cos x+2\sin x$$

Vienkāršojot iegūto izteiksmi, iegūst

$$-2A\sin x+2B\cos x=3\cos x+2\sin x$$

Vienādojuma labā un kreisā puses ir vienādas katrai $x\in R$ vērtībai. Tas būtu iespējams tikai tad, ja vienādojuma labajā un kreisajā puse $\Rightarrow$ koeficienti pie $\sin x$ un $\cos x$ ir vienādi

Koeficienti pie $\cos x$: $2B=3$ $\Rightarrow B=\frac{3}{2}$

Koeficienti pie $\sin x$: $-2A=2$ $A=-1$

Ievietojam iegūtās konstantes nehomogēna diferenciālvienādojuma partikulārajā atrisinājumā

$$\tilde{y}=\left(-1\cdot\cos x+\frac{3}{2}\cdot\sin x\right)\cdot \mathrm{x}$$

Dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\mathrm{y}=\mathrm{Y}+\tilde{y}=\mathrm{C}_1\cos x+\mathrm{C}_2\sin x+\left(-\cos x+\frac{3}{2}\sin x\right)\cdot \mathrm{x}$$

Superpozīcijas princips

Ja nehomogēna diferenciālvienādojuma labajā pusē ir vairāku speciāla veida funkciju summa, tad diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums arī ir vienāds ar partikulāro atrisinājumu summu, kur katrs partikulārais atrisinājums atbilst katrai atsevišķai speciāla veida funkcijai vienādojuma labajā pusē.

Proti, diferenciālvienādojuma $a_1y'' + a_2y' + a_3y = f_1(x) + f_2(x)$

partikulārais atrisinājums ir divu funkciju summa $\tilde{y}\,(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$.,

kur $\tilde{y}_1$ ir diferenciālvienādojuma $a_1y'' + a_2y' + a_3y = f_1(x)$ partikulārais atrisinājums un $\tilde{y}_2$ ir diferenciālvienādojuma $a_1y'' + a_2y' + a_3y = f_2(x)$ partikulārais atrisinājums.

20. Piemērs

Atrast vispārīgo atrisinājumu diferenciālvienādojumam

$$y'' - 2y' + y = e^x + 5\cos 3x$$

1) Atbilstošais homogēnais diferenciālvienādojums:

$$Y'' - 2Y' + Y = 0$$

Raksturīgais vienādojums ir $k^2 - 2k + 1 = 0$

Tā saknes ir vienādi reāli skaitļi $k_1 = k_2 = 1$

Tādējādi, atbilstošā *homogēnā diferenciālvienādojuma* vispārīgais atrisinājums ir

$$Y = C_1e^x + C_2xe^x$$

2) Diferenciālvienādojuma labās puses funkcija ir divu funkciju $f_1(x) = e^x$ un $f_2(x) = 5\cos 3x$ summa. Atbilstoši superpozīcijas principam, diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums ir vienāds ar divu funkciju summu

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$$

kur $\tilde{y}_1$ ir diferenciālvienādojuma $y'' - 2y' + y = e^x$ partikulārais atrisinājums

un $\tilde{y}_2$ ir diferenciālvienādojuma $y'' - 2y' + y = 5\cos 3x$ partikulārais atrisinājums.

a) Noteiksim funkciju $\tilde{y}_1$ kas ir pirmā vienādojuma partikulārais atrisinājums.

Vienādojuma labajā pusē ir funkcija $f_1(x) = e^{\mathbf{1}x}$. Eksponentfunkcijas argumenta koeficients ir $\boldsymbol{\alpha} = 1$ un tas sakrīt ar raksturīga vienādojuma saknēm: $\boldsymbol{\alpha} = k_1 = k_2 = 1$.

Saskaņā ar tabulu 2 funkciju $\tilde{y}_1$ meklēsim formā

$$\tilde{y}_1 = \mathrm{x}^2 \cdot \mathrm{A}e^x$$

Noteiksim funkcijas $\tilde{y}_1$ pirmās un otrās kārtas atvasinājumu

$$\tilde{y}_1{}' = (\mathrm{A}x^2 e^x)' = (\mathrm{A}x^2)' \cdot e^x + (\mathrm{A}x^2) \cdot (e^x)' = 2Ax \cdot e^x + (\mathrm{A}x^2) \cdot e^x = (2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x$$

$$\tilde{y}_1" = \left((2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x\right)' = (2Ax + \mathrm{A}x^2)' \cdot e^x + (2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot (e^x)' =$$

$$= (2A + 2\mathrm{Ax}) \cdot e^x + (2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x = (2A + 4\mathrm{Ax} + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x$$

Ievietojam $\tilde{y}_1{}'$, $\tilde{y}_1{}''$ un $\tilde{y}_1$ atbilstošajā nehomogēnā diferenciālvienādojumā y', y" un y vietā:

$$y'' - 2y' + y = e^x,$$

iegūstam

$$(2A + 4\mathrm{Ax} + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x - 2(2Ax + \mathrm{A}x^2) \cdot e^x + Ax^2 e^x = e^x$$

Vienkāršosim iegūto izteiksmi un aprēķināsim koeficientu A:

$$(2A + 4\mathrm{Ax} + \mathrm{A}x^2 - 4Ax - 2\mathrm{A}x^2 + Ax^2)e^x = e^x$$

$$2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1/2.$$

Tātad

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

b) Noteiksim otrā vienādojuma partikulāro atrisinājumu $\tilde{y}_2$.

Tā kā funkcija otra vienādojuma labajā pusē ir $f_2(x) = 5\cos 3x = e^{\mathbf{0}x}(5 \cdot \cos 3x + 0 \cdot \sin 3x)$, mēs meklēsim vienādojuma partikulāro atrisinājumu formā

$$\tilde{y}_2 = e^{ox}(C \cdot \cos 3x + D \cdot \sin 3x) \cdot x^s$$

Eksponentfunkcijas kāpinātājs $\alpha = 0$. Sinusa un kosinusa funkciju argumenta koeficienti ir $\boldsymbol{\beta = 3}$. Skaitlis $\alpha + i\beta = 0 + 3i = 3i$ **nesakrīt ar raksturīga vienādojuma saknēm** tādejādi $s = 0$. Šajā gadījumā diferenciālvienādojuma partikulāram atrisinājumam ir veids

$$\tilde{y}_2 = C \cdot \cos 3x + D \cdot \sin 3x$$

Funkcijai $\tilde{y}_2$ noteiksim pirmās un otrās kārtas atvasinājumus

$$\tilde{y}_2{}' = (\mathrm{C}\cos 3x + \mathrm{D}\sin 3x)' = -3\mathrm{C}\sin 3x + 3\mathrm{D}\cos 3x$$

$$\tilde{y}_2" = (-3\mathrm{C}\sin 3x + 3\mathrm{D}\cos 3x)' = -9\mathrm{C}\cos 3x - 9\mathrm{D}\sin 3x.$$

Ievietojot $\tilde{y}_2{}'$, $\tilde{y}_2{}''$ un $\tilde{y}_2$ atbilstošajā nehomogēnajā diferenciālvienādojumā

$$y'' - 2y' + y = 5\cos 3x,$$

iegūstam:

$$-9C\cos 3x - 9D\sin 3x - 2(-3C\sin 3x + 3D\cos 3x) + C\cos 3x + D\sin 3x = 5\cos 3x$$

$$(-8C - 6D)\cos 3x + (-8D + 6C)\sin 3x = 5\cos 3x$$

Koeficienti pie $cos3x$: $-8C - 6D = 5$

Koeficienti pie $sin3x$: $-8D + 6C = 0$ $\Longrightarrow$ $C = \frac{4D}{3}$

No pirmā vienādojuma seko: $-8 \cdot \left(\frac{4D}{3}\right) - 6D = 5 \;\Rightarrow\; \frac{-50D}{3} = 5 \;\Rightarrow D = -\frac{3}{10}$

un $C = \frac{4D}{3} = -\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 10} = -\frac{2}{5}$

Rezultātā

$$\tilde{y}_2 = -\frac{2}{5} \cdot \cos 3x - \frac{3}{10} \cdot \sin 3x$$

Dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir:

$$y = Y + \tilde{y} = Y + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$$

jeb

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{2}{5} \cos 3x - \frac{3}{10} \cdot \sin 3x$$

Uzdevumi

9.8.Uzdevums

Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$$

Atrisinājums

Izmantosim konstanšu variācijas metodi (Lagranža metodi)

1) Atrisināsim atbilstošo homogēno diferenciālvienādojumu

$$Y'' + 2Y' + Y = 0$$

Šī vienādojuma raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

$$(k+1)^2 = 0$$

Šim vienādojumam ir divas vienādas reālas saknes

$$k_1 = k_2 = -1$$

Tātad homogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

2) Aizstājam konstantes C_1 un C_2 ar nezināmām funkcijām $C_1(x)$ un $C_2(x)$ un dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu meklēsim formā

$$y = C_1(x) \cdot e^{-x} + C_2(x) \cdot x e^{-x}$$

3) Nezināmās funkcijas $C_1(x)$ un $C_2(x)$ atrodam no sekojošas vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} C'_1(x) \cdot e^{-x} + C'_2(x) \cdot x e^{-x} = 0 \\ C'_1(x) \cdot (e^{-x})' + C'_2(x) \cdot (x e^{-x})' = 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Aprēķinot atvasinājumus sistēmas otrajā vienādojumā, iegūstam

$$\begin{cases} C'_1(x) \cdot e^{-x} + C'_2(x) \cdot x e^{-x} = 0 \\ C'_1(x) \cdot (-e^{-x}) + C'_2(x) \cdot \left(1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x})\right) = 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Sistēmu var pārrakstīt formā

$$\begin{cases} (C'_1(x) + C'_2(x) \cdot x) e^{-x} = 0 \\ \left(-C'_1(x) + C'_2(x) \cdot (1-x)\right) \cdot e^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases}$$

jeb

$$\begin{cases} C'_1(x) + C'_2(x) \cdot x = 0 \\ -C'_1(x) + C'_2(x) \cdot (1-x) = 3\sqrt{x+1} \end{cases}$$

No sistēmas pirmā vienādojuma seko

$$C'_1(x) = -C'_2(x) \cdot x$$

Ievietojot iegūto $C'_1(x)$ otrajā sistēmas vienādojumā iegūstam

$$C'_2(x) \cdot x + C'_2(x) \cdot (1-x) = 3\sqrt{x+1}$$

Rezultātā

$$C'_2(x) = 3\sqrt{x+1}$$

Tātad

$$C'_1(x) = -C'_2(x) \cdot x = -3x\sqrt{x+1}$$

4) Aprēķinām $C_1(x)$ un $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int C'_1(x)\,dx = \int -3x\sqrt{x+1}\,dx$$

Lai aprēķinātu šo integrāli, izmantosim substitūciju $x + 1 = t^2$.

Tad $x = t^2 - 1$ un $dx = (t^2 - 1)'dt = 2tdt$

$$\int -3x\sqrt{x+1}\,dx = -3\int (t^2-1)t \cdot 2tdt = -6\int (t^4 - t^2)dt = -6\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C_1 =$$
$$= -\frac{6}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + 2\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + C_1$$

Rezultātā

$$C_1(x) = -\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_1$$

$$C_2(x) = \int C'_2(x)\,dx = \int 3\sqrt{x+1}\ \ dx = 3\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\ \ d(x+1) = 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

Tātad,

$$C_1(x) = -\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_1 \quad \text{un} \quad C_2(x) = 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

6) Ievietojot iegūtas $C_1(x)$ un $C_2(x)$ funkcijas vispārīga atrisinājuma izteiksmē, iegūstam:

$$y = \left(-\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_1\right)e^{-x} + \left(2(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2\right)xe^{-x}$$

Vienkāršosim šo izteiksmi:

$$y = e^{-x}\left(C_1 + xC_2 - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + 2x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= e^{-x}\left(C_1 + xC_2 - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}}(1+x)\right) = e^{-x}\left(C_1 + xC_2 - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{5}{2}}\right)$$

Rezultātā dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = e^{-x}\left(C_1 + xC_2 + \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right)$$

9.9.Uzdevums

Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$y'' - 2y' = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

Atrisinājums

Tas ir otrās kārtas lineārs nehomogēns diferenciālvienādojums. Izmantosim konstanšu variācijas metodi.

1) Atbilstošais homogēnais diferenciālvienādojums ir

$$Y'' - 2Y' = 0$$

Tā raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 - 2k = 0$$

$$k(k - 2) = 0$$

Šī vienādojuma saknes ir reālas un dažādas

$$k_1 = 0 \quad \text{un} \quad k_2 = 2$$

Tātad, atbilstošā homogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$Y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{2 \cdot x}$$

jeb

$$Y = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{2x},$$

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

2) Lai atrastu dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu, aizstājam konstantes C_1 un C_2 ar nezināmām funkcijām $C_1(x)$ un $C_2(x)$, tad uzdevuma atrisinājums ir

:

$$y = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cdot e^{2x}$$

3) Nezināmās funkcijas $C_1(x)$ un $C_2(x)$ atrodam no sekojošās vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} C'_1(x) \cdot 1 + C'_2(x) \cdot e^{2x} = 0 \\ C'_1(x) \cdot 1' + C'_2(x) \cdot (e^{2x})' = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{2x}} \end{cases}$$

Aprēķinot atvasinājumus, iegūstam

$$\begin{cases} C'_1(x) \cdot 1 + C'_2(x) \cdot e^{2x} = 0 \\ C'_1(x) \cdot 0 + C'_2(x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{2x}} \end{cases}$$

jeb

$$\begin{cases} C'_1(x)\cdot 1 + C'_2(x)\cdot e^{2x} = 0 \\ C'_2(x)\cdot 2\cdot e^{2x} = \dfrac{4e^{2x}}{1+e^{2x}} \end{cases}$$

4) No otrā sistēmas vienādojuma iegūstam $C'_2(x)$

$$C'_2(x) = \frac{2}{1+e^{2x}}$$

No pirmā sistēmas vienādojuma iegūstam $C'_1(x)$

$$C'_1(x) = -C'_2(x)\cdot e^{2x} = -\frac{2\cdot e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

5) Integrējot $C'_1(x)$ un $C'_2(x)$, aprēķinām funkcijas $C_1(x)$ un $C_2(x)$

$C_1(x) = \int C'_1(x)\,dx$ un $C_2(x) = \int C'_2(x)\,dx$.

$$C_1(x) = \int C'_1(x)\,\mathrm{dx} = -\int \frac{2\cdot e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = -\int \frac{d(e^{2x})}{1+e^{2x}} = -\int \frac{d(1+e^{2x})}{1+e^{2x}} = -\ln|1+e^{2x}| + C_1$$

$$C_2(x) = \int C'_2(x)\,dx = \int \frac{2}{1+e^{2x}}\mathrm{dx} = 2\int \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}}\mathrm{dx} = 2\int \frac{1+e^{2x}}{1+e^{2x}}\mathrm{dx} - 2\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\mathrm{dx} =$$

$$= 2\int 1\,\mathrm{dx} - \int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\mathrm{dx} = 2x - \ln|1+e^{2x}| + C_2$$

Rezultātā

$$C_1(x) = -\ln|1+e^{2x}| + C_1 \quad \text{un} \quad C_2(x) = 2x - \ln|1+e^{2x}| + C_2$$

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

6) Ievietojot iegūtās funkcijas $C_1(x)$ un $C_2(x)$ vispārīgā atrisinājuma izteiksmē iegūstam

$$y = (-\ln|1+e^{2x}| + C_1)\cdot 1 + (2x - \ln|1+e^{2x}| + C_2)e^{2x}$$

Dota lineārā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \ln|1+e^{2x}| + (2x - \ln|1+e^{2x}|)e^{2x}$$

Vienkāršojot

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + 2xe^{2x} - \ln|1+e^{2x}|\cdot(1+e^{2x})$$

9.10.Uzdevums

Atrast diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$y'' - 9y = x + 2e^{-3x}$$

Atrisinājums

1) Atbilstošais homogēnais diferenciālvienādojums ir

$$Y'' - 9Y = 0$$

Tā raksturīgais vienādojums

$$k^2 - 9 = 0$$

Vienādojuma saknes ir dažādi reāli skaitļi

$$k_1 = 3\,,\ k_2 = -3$$

Tādējādi, atbilstošā homogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$Y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$$

2) Dotā vienādojuma labajā pusē ir divu funkciju summa:

$$f_1(x) = x \qquad \text{un} \qquad f_2(x) = 2e^{-3x}.$$

Pēc superpozīcijas principa lineāra nehomogēna diferenciālvienādojuma atrisinājums ir vienāds ar divu funkciju summu

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2,$$

kur $\tilde{y}_1$ ir diferenciālvienādojuma $y'' - 9y = x$ partikulārais atrisinājums ,

$\tilde{y}_2$ ir diferenciālvienādojuma $y'' - 9y = 2e^{-3x}$ partikulārais atrisinājums.

a) Noteiksim pirmā diferenciālvienādojuma $y'' - 9y = x$ partikulāro atrisinājumu $\tilde{y}_1$. Funkciju $f_1(x)$ vienādojuma labajā pusē var pierakstīt sekojošā veidā

$$f_1(x) = x = (x - 0)e^{0x}$$

Eksponentfunkcijas kāpinātājs ir $\alpha = 0$. Tas nesakrīt ar raksturīgā vienādojuma saknēm $\alpha \neq k_1 \neq k_2$,

tad saskaņā ar 2. tabulu partikulārā atrisinājuma $\tilde{y}_1$ forma ir

$$\tilde{y}_1 = Ax + B$$

b) Aprēķinām funkcijas $\tilde{y}_1$ pirmās un otrās kārtas atvasinājumus

$$\tilde{y}_1{}' = (Ax + B)' = A$$

$$\tilde{y}_1'' = (A)' = 0$$

Ievietojam $\tilde{y}_1{}'$, $\tilde{y}_1''$ un $\tilde{y}_1$ pirmajā diferenciālvienādojumā $y'' - 9y = x$,

Rezultātā

$$0 - 9(Ax + B) = x$$

Vienkāršosim šo izteiksmi:

$$-9Ax - 9B = 1 \cdot x$$

Koeficienti pie x : $-9A = 1 \implies A = -1/9$

Koeficienti pie x^0 : $-9B = 0 \implies B = 0$

Tad

$$\tilde{y}_1 = -\frac{1}{9}x$$

b) Aprēķināsim otrā vienādojuma $y'' - 9y = 2e^{-3x}$ partikulāro atrisinājumu $\tilde{y}_2$.

Ņemot vērā, ka eksponentfunkcijas $f_2(x) = 2e^{-3x}$ kāpinātāja koeficients α = -3 sakrīt ar vienu raksturīgā vienādojuma sakni $k_2 = -3$, partikulāra atrisinājuma $\tilde{y}_2$ forma ir

$$Y_2 = Ce^{-3x} \cdot x$$

Aprēķinām funkcijas $\tilde{y}_2$ pirmās un otras kārtas atvasinājumus

$\tilde{y}_2{}' = (Ce^{-3x} \cdot x)' = -3Ce^{-3x}x + Ce^{-3x} = e^{-3x}(-3Cx + C)$

$\tilde{y}_2" = (e^{-3x} \cdot (-3Cx + C))' = -3e^{-3x} \cdot (-3Cx + C) + e^{-3x} \cdot (-3C) = e^{-3x} \cdot (9Cx - 6C)$

Ievietojot $\tilde{y}_2{}'$, $\tilde{y}_2{}''$ un $\tilde{y}_2$ diferenciālvienādojumā $y'' - 9y = 2e^{-3x}$,

iegūstam

$$e^{-3x} \cdot (9Cx - 6C) - 9Ce^{-3x} \cdot x = 2e^{-3x}$$

$$e^{-3x} \cdot (9Cx - 6C - 9Cx) = 2e^{-3x}$$

$$-6C = 2$$

$$C = -1/3$$

Rezultātā,

$$\tilde{y}_2 = -\frac{1}{3}e^{-3x} \cdot x$$

Dotā lineārā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir vienāds ar trīs funkciju summu:

$$y = Y + \tilde{y} = Y + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$$

Tātad, dotā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} - \frac{1}{9}x - \frac{1}{3}xe^{-3x}$$

9.4. Laplasa transformācijas pielietošana diferenciālvienādojumu atrisināšanai

Šajā nodaļā apskatīta otrās kārtas lineāru nehomogēnu diferenciālvienādojumu risināšana, izmantojot Laplasa transformāciju. Laplasa transformācijas definīcija un īpašības ir apskatītas īsumā.

9.4.1. Laplasa transformācija. Definīcija un īpašības.

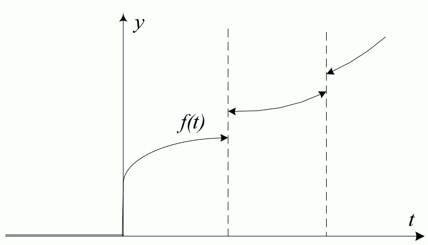
Laplasa transformāciju bieži izmanto, lai atrisinātu lineārus diferenciālvienādojumus un diferenciālvienādojumu sistēmas. Laplasa transformācija dod iespēju diferenciālvienādojumus aizstāt ar algebriskiem vienādojumiem. Līdz ar to, diferenciālvienādojumu atrisināšana reducējas uz lineāro vienādojumu atrisināšanu. Ar šīs metodes palīdzību var atrisināt pat tādus diferenciālvienādojumus, ja to labās puses funkcija nav nepārtraukta funkcija. Tāda veida diferenciālvienādojumi paradās, aprakstot, piemēram, dažas elektrotehnikas, signālu teorijas, elektrisko ķēžu teorijas problēmas. Laplasa transformāciju izmanto arī, lai atrisinātu vienādojumus, kas satur ne tikai nezināmu funkciju un tās atvasinājumus, bet arī integrāļus no nezināmās funkcijas . Tādi vienādojumi apraksta, piemēram, elektrisko ķēžu teorijā aplūkotos pārejas procesus.

Definīcija: Laplasa transformācija

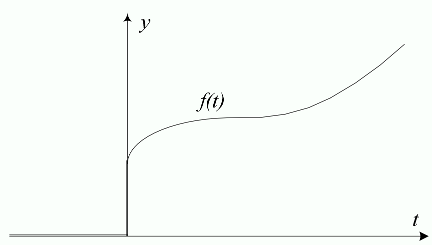
Lai funkcija f(t) ir reāla argumenta funkcija, kura apmierina trīs nosacījumus:

1) $f(\mathrm{t})$ definēta intervālā $0 \leq \mathrm{t} \leq +\infty$;

2) $f(\mathrm{t})$ ir nepārtraukta funkcija vai arī funkcijai ir galīgs skaits pirmā veida pārtraukuma punktu apgabalā $t \in [0, +\infty)$,



2.zīmējums. Gabaliem dota funkcija



3.zīmējums. Nepārtraukta funkcija

3) eksistē tādi reāli pozitīvi skaitļi $\mathrm{M} = \mathrm{const}$ un $\mathrm{S}_0 = \mathrm{const}$, ka visiem $\mathrm{t} \geq 0$ ir spēkā

$$|f(t)| < Me^{S_0 t};$$

tad funkcijas f(t) ***Laplasa transformāciju*** F(s) definē kā neīsto integrāli:

$$\mathrm{F(s)} = \int_0^{+\infty} f(\mathrm{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt}\,,$$

kur *s* ir parametrs (vispārīgā gadījumā $s = \sigma + \omega i$ ir komplekss skaitlis).

Funkciju ***f(t)*** sauc par ***oriģinālu*** un funkciju ***F(s)*** sauc par ***attēlu***.

Neīsto integrāli labajā pusē sauc par ***Laplasa integrāli***.

Ja funkcija F(s) ir funkcijas f(t) transformācija, tad raksta

$$F(s) = L[f(t)] \qquad \text{vai} \qquad f(t) \div F(s)$$

Teorēma:

Funkcijai *f(t)* eksistē Laplasa transformācija, ja funkcija f(t) apmierina augstāk aplūkotas nosacījumus un ir spēkā

$$\sigma = Re(s) > S_o$$

kur $\sigma = Re(s)$ ir kompleksa skaitļa $s = \sigma + \omega i$ reāla daļa.

Vispārīgā gadījumā parametrs *s* ir komplekss skaitlis, un F(s) ir kompleksā mainīgā funkcija, bet šeit mēs pieņemsim, ka s ir reāls skaitlis.

Pielietojumos, kur risinot dažādas fizikālas problēmas izmanto Laplasa transformāciju, tiek pieņemts , ka funkcija *f(t)* ir vienāda ar 0, ja $t<0$:

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Šis pieņēmums nozīmē, ka process, kuru apraksta funkcija f(t) , sākas laika momentā t = 0.

Tāda veida funkcijas var pierakstīt kā divu funkciju *f(t)* un *H(t)* reizinājumu

$$f(t) \cdot H(t),$$

kur *H(t)* ir tā sauktā Hevisaida funkcija un tā ir vienāda ar

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Piemēram,

$$\sin(t) \cdot H(t) = \begin{cases} \sin t \cdot 1, & t \ge 0 \\ \sin t \cdot 0, & t < 0 \end{cases} \qquad \text{vai} \qquad \sin(t) \cdot H(t) = \begin{cases} \sin t, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Tagad aplūkosim divus piemērus un noteiksim attēlu funkcijām *f(t)=1 un* $f(t) = e^t$ *(*$t \ge 0$*) ,* izmantojot Laplasa transformācijas definīciju.

21.Piemērs

Noteiksim attēlu funkcijai ***f(t)=1*** $(t \ge 0)$:

$$L[1] = \mathrm{F(s)} = \int_0^{+\infty} \mathbf{1} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{b}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{b}} \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{b}\to+\infty} -\frac{1}{\mathrm{s}} \int_0^{\mathrm{b}} \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{d}(-\mathrm{s}\cdot\mathrm{t}) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^b = -\frac{1}{s}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-sb} - e^{0}\right) = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

Tātad,

$$L[1] = \frac{1}{s}$$

vai arī to pašu varam pierakstīt kā

$$1 \div \frac{1}{s}$$

22.Piemērs

Noteiksim attēlu funkcijai $f(t) = e^{t}$ $(t \geq 0)$:

$$L[e^t] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{t} \cdot e^{-st}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-(s-1)t}dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{s-1}\int_0^b e^{-(s-1)t}d(-(s-1)t) = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{s-1}e^{-(s-1)t}\Big|_0^b =$$

$$= -\frac{1}{s-1}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-(s-1)b} - e^{0}\right) = -\frac{1}{s-1}(0-1) = \frac{1}{s-1}$$

Tātad,

$$L[e^t] = \frac{1}{s-1}$$

vai to pašu varam pierakstīt kā

$$e^t \div \frac{1}{s-1}$$

Attēli citām elementārām funkcijām ir noteikti līdzīgā veidā un ir apkopoti speciālajā tabulā. Daļa no šādas tabulas ir parādīta zemāk:

f(t)	*F(s)*
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

sin*(at)*	$\frac{a}{s^2+a^2}$
cos*(at)*	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{\lambda t}\sin(at)$	$\frac{a}{(s-\lambda)^2+a^2}$
$e^{\lambda t}\cos(at)$	$\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+a^2}$
sh*(at)*	$\frac{a}{s^2-a^2}$
ch*(at)*	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{\lambda t}\mathrm{sh}(at)$	$\frac{a}{(s-\lambda)^2-a^2}$
$e^{\lambda t}\mathrm{ch}(at)$	$\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2-a^2}$

Uzdevumos, kur jāatrod funkcijas attēls, izmanto Laplasa transformācijas tabulu priekš elementārajām funkcijām, kā arī Laplasa transformācijas īpašības.

Laplasa transformācijas īpašības

Šeit mēs bez pieradījuma aplūkosim tikai tās Laplasa transformācijas īpašības, kuras būs nepieciešamas diferenciālvienādojumu risināšanai.

1) *Linearitātes teorēma* (*C1, C2=const*):

$$L[C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)] = C_1 L[f_1(t)] \pm C_2 L[f_2(t)]$$

kur C1 un C2 ir konstantes.

2) *Oriģināla atvasināšanas teorēma*

Ja $\mathrm{L}[f(\mathrm{t})] = \mathrm{F(s)}$, tad

$$\mathrm{L}[f'(\mathrm{t})] = \mathrm{sF(s)} - f(0)$$

$$\mathrm{L}[f''(\mathrm{t})] = s^2\mathrm{F(s)} - \mathrm{s}f(0) - f'(0)$$

$$\mathrm{L}[f'''(\mathrm{t})] = s^3\mathrm{F(s)} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

....

$$\mathrm{L}\left[f^{(\mathrm{n})}(\mathrm{t})\right] = s^{\mathrm{n}}\mathrm{F(s)} - s^{\mathrm{n}-1}f(0) - s^{\mathrm{n}-2}f'(0) - \cdots - f^{(\mathrm{n}-1)}(0)$$

23. Piemērs

Noteikt Laplasa transformāciju funkcijai $\mathrm{f(t)} = 2 - 3\mathrm{sin}5\mathrm{t} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} + \mathrm{t}^2$.

Lai noteiktu dotās funkcijas attēlu, izmantosim Linearitātes teorēmu:

$$F(s) = L[\mathrm{f(t)}] = \mathrm{L}[2 - 3\mathrm{sin}5\mathrm{t} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} + \mathrm{t}^2] = 2\mathrm{L}[1] - 3\mathrm{L}[\mathrm{sin}5\mathrm{t}] + 4\mathrm{L}[\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}] + \mathrm{L}[\mathrm{t}^2] =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\mathrm{s}} - 3 \cdot \frac{5}{\mathrm{s}^2 + 25} + 4 \cdot \frac{1}{\mathrm{s} - 2} + \frac{2!}{\mathrm{s}^3}$$

Rezultātā,

$$\mathrm{L}[\mathrm{f(t)}] = \frac{2}{\mathrm{s}} - \frac{15}{\mathrm{s}^2 + 1} + \frac{4}{\mathrm{s} - 2} + \frac{2}{\mathrm{s}^3}$$

Definīcija: Inversā Laplasa transformācija

Ja $\mathrm{L}[f(\mathrm{t})] = \mathrm{F(s)}$, tad funkcijas $\mathrm{F(s)}$ inverso Laplasa transformāciju $f(\mathrm{t})$ definē kā nenoteikto integrāli

$$f(\mathrm{t}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{F(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{st}}\mathrm{ds}$$

To mēdz pierakstīt kā

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

Šeit atzīmēsim, ka, lai atrastu funkcijas oriģinālu, bieži izmanto elementāro funkciju Laplasa transformācijas tabulu un Laplasa transformācijas īpašības.

Ļoti bieži pielietojumos funkcijas attēlam ir racionālas daļveida funkcijas forma. Šajā gadījumā oriģinālu var viegli atrast, sadalot attēla funkciju elementārdaļās.

23.Piemērs

Noteikt oriģinālu attēlam

$$\mathrm{F(s)} = \frac{\mathrm{s} + 3}{\mathrm{s(s + 1)}}$$

tas ir,

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{\mathrm{s} + 3}{\mathrm{s(s + 1)}}\right] = ?$$

Sadalām doto racionālu daļveida funkciju elementārdaļās ar nenoteiktiem koeficientiem

$$\mathrm{F(s)} = \frac{\mathrm{s} + 3}{\mathrm{s(s + 1)}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{s} + 1}$$

Lai atrastu nezināmos koeficientus, nosaka izteiksmes kopsaucēju un vienādo saucējus

$$\frac{s+3}{s(s+1)} = \frac{A(s+1)+Bs}{s(s+1)}$$

Pielīdzina labajā un kreisajā pusē esošo funkciju skaitītājus

$$s+3 = A(s+1)+Bs$$

$$s+3 = As+A+Bs$$

$$1 \cdot s + 3 = (A+B)s + A$$

Izteiksmes labajā un kreisajā pusēs ir vienādas katrai $s \in R$ vertībai. Tas ir iespējams tikai tad, kad koeficienti pie vienādām s pakāpēm vienādojuma labajā un kreisajā pusē ir vienādi

Koeficients pie s: 1=A+B,

Koeficients pie s^0: $3 = A$ ➔ $A = 3$

No pirmā vienādojuma seko, ka $B = 1 - A = 1 - 3 = -2$

Rezultātā, mums ir

$$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{-2}{s+1} = 3 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{1}{s+1}$$

Izmantojot Laplasa transformācijas linearitātes teorēmu, iegūstam

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[3 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{1}{s+1}\right] = 3L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 2L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = 3 \cdot 1 - 2e^{-t}$$

Tātad,

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = 3 \cdot 1 - 2e^{-t} .$$

9.4.2. Laplasa transformācijas pielietojumi diferenciālvienādojumu risināšanai

Kā minēts iepriekš, Laplasa transformāciju izmanto, lai atrisinātu diferenciālvienādojumus un to sistēmas. Laplasa transformācija dod iespēju diferenciālvienādojumu aizstāt ar algebrisko vienādojumu, kuru atrisinot iegūst nezināmās funkcijas attēlu. Pēc tam šim attēlam atrod oriģinālu, kas un ir diferenciālvienādojuma atrisinājums. Šeit apskatīts Laplasa transformācijas pielietojums otrās kārtas lineāru diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem risināšanai.

Atzīmēsim, ka šo metodi var izmantot diferenciālvienādojumu risināšanai tikai tad, ja ir uzdoti sākumnosacījumi punktā t=0, tas ir, tikai Koši uzdevumu risināšanai.

Apskatīsim lineāru diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

un sākumnosacījumiem $y(0) = y_0$ un $y'(0) = y_1$,

kur a, b, c ir konstantes, $y = y(t)$ argumenta *t* funkcija un $a \neq 0$.

Algoritms Koši problēmas risināšanai, izmantojot Laplasa transformāciju:

1) Pielietot Laplasa transformāciju diferenciālvienādojuma labajai un kreisajai pusei

$$L[ay'' + by' + cy] = L[f(t)]$$

2) Izmantot *linearitātes teorēmu* un *oriģināla atvasināšanas teorēmu*

$$aL[y''] + bL[y'] + cL[y] = L[f(t)]$$

Apzīmēsim nezināmās funkcijas y(t) attēlu ar Y(s), tas ir, L[y] = Y(s). Tad, saskaņā ar *oriģināla atvasināšanas teorēmu,* ir spēkā

$$\mathrm{L}[y'(\mathrm{t})] = \mathrm{sY(s)} - y(0) = \mathrm{sY(s)} - y_0$$

$$\mathrm{L}[y''(\mathrm{t})] = \mathrm{s^2Y(s)} - \mathrm{s}y(0) - y'(0) = \mathrm{s^2Y(s)} - \mathrm{s}y_0 - y_1$$

Pielietojot Laplasa transformāciju, iegūst algebrisku vienādojumu, kas satur nezināmo funkciju Y(s)

$$\mathrm{a} \cdot (\mathrm{s^2Y(s)} - \mathrm{s}y_0 - y_1) + b \cdot (\mathrm{sY(s)} - y_0) + c \cdot Y(s) = F(s),$$

kur $F(s) = L[f(t)]$ ir diferenciālvienādojuma labās puses funkcijas attēls.

3) Atrisināt iegūto algebrisko vienādojumu

$$\mathrm{Y(s)}(\mathrm{as^2} + bs + c) = F(s) + asy_0 + by_0 + ay_1$$

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{F(s) + asy_0 + by_0 + ay_1}{\mathrm{as^2} + bs + c}$$

4) Izmantojot Laplasa transformācijas īpašības un Laplasa transformācijas tabulu, atrast funkcijas Y(s) oriģinālu y(t)

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

24.Piemērs

Izmantojot Laplasa transformāciju, atrisināt Košī uzdevumu

$$y'' + 9y = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

1) Pielietosim Laplasa transformāciju diferenciālvienādojuma abām pusēm

$$L[y'' + 9y] = L[e^{2t}]$$

$$L[y''] + 9L[y] = L[e^{2t}]$$

Apzīmēsim nezināmās funkcijas y(t) Laplasa transformācijas attēlu ar $Y(s)$, tas ir, $L[y] = Y(s)$. Tad, pēc oriģināla atvasināšanas teorēmas seko

$$L[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$L[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s \cdot 1 - 2$$

Diferenciālvienādojuma labās puses funkcijas attēls ir (skat. Laplasa transformācijas tabulu)

$$L[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$$

Ievietojot attēlus $L[y''(t)]$, $L[y(t)]$ un $L[e^{2t}]$ vienādojumā, iegūstam algebrisko vienādojumu nezināmajai funkcijai Y(s)

$$s^2 \cdot Y(s) - s - 2 + 9 \cdot Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

3) Atrisina iegūto algebrisko vienādojumu:

$$Y(s) \cdot (s^2 + 9) = \frac{1}{s-2} + s + 2$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+9)} + \frac{s}{(s^2+9)} + \frac{2}{(s^2+9)}$$

4) Aprēķinām funkcijas Y(s) oriģinālu y(t):

a) No sākuma izvirzām funkcijas Y(s) pirmo saskaitāmo elementārdaļās ar nezināmiem koeficientiem:

$$\frac{1}{(s-2)(s^2+9)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+9} = \frac{A(s^2+9)+(Bs+C)(s-2)}{(s-2)(s^2+9)}$$

Daļas

$$\frac{1}{(s-2)(s^2+9)}$$

un

$$\frac{A(s^2+9)+(Bs+C)(s-2)}{(s-2)(s^2+9)}$$

būs vienādas tikai tad, ja šo daļu skaitītāji būs vienādi. Tātad, pielīdzinām labajā un kreisajā pusē esošo funkciju skaitītājus

$$1 = A(s^2+9) + (Bs+C)(s-2)$$

$$1 = As^2 + 9A + Bs^2 - 2Bs + Cs - 2C$$

$$0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 1 = (A+B)s^2 + (-2B+C)s + 9A - 2C$$

Iegūtajā izteiksmē polinomi labajā un kreisajā pusē ir vienādi tikai tad, ja koeficienti pie mainīgā s vienādajām pakāpēm ir vienādi

Koeficienti pie s^2 iegūtas izteiksmes labajā un kreisajā pusēs ir: $0 = A + B$

Koeficienti pie s ir: 0=-2B+C,

Koeficienti pie s^0 ir: $1 = 9A - 2C$

Atrisinot iegūto vienādojumu sistēmu ar nezināmajiem koeficientiem A, B un C, iegūstam:

$$A = \frac{1}{13}, \quad B = -\frac{1}{13}, \quad C = -\frac{2}{13}$$

Rezultātā

$$\frac{1}{(s-2)(s^2+9)} = \frac{\frac{1}{13}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{13}s - \frac{2}{13}}{s^2+9} = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{s}{s^2+9} - \frac{2}{13}\cdot\frac{1}{s^2+9}$$

b) Iegūto izteiksmi ievietojam izteiksmē pie $Y(s)$ pirmā saskaitāma vietā

$$Y(s) = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{s}{s^2+9} - \frac{2}{13}\cdot\frac{1}{s^2+9} + \frac{s}{s^2+9} + \frac{2}{s^2+9}$$

Vienkāršojot šo izteiksmi, iegūstam

$$Y(s) = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{12}{13}\cdot\frac{s}{s^2+9} + \frac{24}{13}\cdot\frac{1}{s^2+9}$$

5) Aprēķinām funkcijas $Y(s)$ oriģinālu

$$y(\mathrm{t}) = \mathrm{L}^{-1}[\mathrm{Y}(\mathbf{s})] = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{\mathrm{s}-2}+\frac{12}{13}\cdot\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+9}+\frac{24}{13}\cdot\frac{1}{\mathrm{s}^2+9}\right] =$$

$$= \frac{1}{13}\cdot\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}-2}\right]+\frac{12}{13}\cdot\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+9}\right]+\frac{24}{13}\cdot\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\mathrm{s}^2+9}\right] =$$

$$= \frac{1}{13}\cdot\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}-2}\right]+\frac{12}{13}\cdot\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+9}\right]+\frac{24}{13}\cdot\frac{1}{3}\cdot\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{3}{\mathrm{s}^2+9}\right] =$$

$$= \frac{1}{13}\mathrm{e}^{2t}+\frac{12}{13}\cos 3t+\frac{24}{39}\cdot\sin 3t$$

Tātad iegūstam dota Košī uzdevuma atrisinājumu:

$$y(\mathrm{t}) = \mathrm{L}^{-1}[\mathrm{Y}(\mathrm{s})] = \frac{1}{13}\mathrm{e}^{2t}+\frac{12}{13}\cos 3t+\frac{24}{39}\sin 3t$$

Var viegli pārliecināties, ka atrisinājums apmierina doto diferenciālvienādojumu un tā sākuma nosacījumus.

Uzdevumi

9.11. Uzdevums

Izmantojot Laplasa transformāciju, atrisināt Košī uzdevumu

$$y'' + 4y' + 5y = 1\ , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Atrisinājums

1) Dotajam diferenciālvienādojumam pielietosim Laplasa transformāciju

$$L[y'' + 4y' + 5y] = L[1]$$

$$L[y''] + 4L[y'] + 5L[y] = L[1]$$

Lai nezināmās funkcijas y(t) attēls ir $L[y] = Y(s)$, tad pēc oriģināla atvasināšanas teorēmas aprēķina

$$\mathrm{L}[y'(\mathrm{t})] = \mathrm{sY(s)} - y(0) = \mathrm{sY(s)} - 0 = \mathrm{sY(s)}$$

$$\mathrm{L}[y''(\mathrm{t})] = \mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - \mathrm{s}y(0) - y'(0) = \mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - \mathrm{s}\cdot 0 - 1 = \mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - 1$$

Laplasa transformācijas pielietošanas rezultātā iegūstam algebrisko vienādojumu nezināmajai attēla funkcijai Y(s):

$$\mathrm{s}^2\mathrm{Y(s)} - 1 + 4\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{Y(s)} + 5\cdot Y(s) = \frac{1}{s}$$

3) Risinām iegūto vienādojumu

$$Y(s)(s^2+4s+5)=\frac{1}{s}+1$$

$$Y(s)(s^2+4s+5)=\frac{1+s}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1+s}{s(s^2+4s+5)}$$

4) Izmantojot Laplasa transformācijas īpašības un Laplasa transformācijas tabulu, aprēķinām oriģinālu y(t) attēlam Y(s) ,

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]$$

Šim nolūkam mēs sadalām funkciju Y(s) elementārdaļās

$$\frac{1+s}{s(s^2+4s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4s+5}=\frac{A(s^2+4s+5)+(Bs+C)s}{s(s^2+4s+5)}$$

Tātad

$$s+1=A(s^2+4s+5)+(Bs+C)s$$

$$s+1=As^2+4As+5A+Bs^2+Cs$$

$$0\cdot s^2+1\cdot s+1=(A+B)s^2+(4A+C)s+5A$$

Koeficienti pie s^2 : $0=A+B$
Koeficienti pie s: $1=4A+C$,
Koeficienti pie s^0: $1=5A$

Atrisinot iegūto sistēmu, nosakām nezināmos koeficientus

$$A=\frac{1}{5},\quad B=-\frac{1}{5},\quad C=\frac{1}{5}$$

Rezultātā

$$Y(s)=\frac{1+s}{s(s^2+4s+5)}=\frac{\frac{1}{5}}{s}+\frac{-\frac{1}{5}s+\frac{1}{5}}{s^2+4s+5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{5}\cdot\frac{s-1}{s^2+4s+5}$$

5) Noteiksim oriģinālu funkcijai $Y(s)$:

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{5}\cdot\frac{s-1}{s^2+4s+5}\right]=\frac{1}{5}\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{5}\cdot L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+4s+5}\right]$$

No Laplasa transformācijas tabulas $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1$,

Lai atrastu oriģinālu

$$L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+4s+5}\right],$$

mums no sākuma vajag pārveidot daļu

$$\frac{s-1}{s^2+4s+5}=\frac{s-1}{(s+2)^2+1}=\frac{s+2-3}{(s+2)^2+1}=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}-\frac{3}{(s+2)^2+1}$$

Tad

$$L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}-\frac{3}{(s+2)^2+1}\right]=L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right]-3\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]=$$

$$=e^{-2t}\cos t-3e^{-2t}\sin t$$

Iegūstam

$$y(t)=\frac{1}{5}\cdot 1-\frac{1}{5}\cdot\left(e^{-2t}\cos t-3e^{-2t}\sin t\right)=\frac{1}{5}-\frac{e^{-2t}}{5}\cdot(\cos t-3\sin t)$$

9.5. Diferenciālvienādojumu pielietojuma piemēri

1.Piemērs:

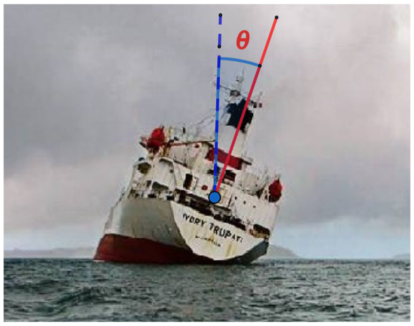
Kuģa stabilitāte ir kuģošanas drošības jautājums, kuru obligāti vajag pētīt jau kuģa projektēšanas posmā. Viens no svarīgākiem faktoriem, kas ietekmē kuģa stabilitāti, ir kuģa šūpošanās ūdenī.

1) Kuģa šūpošanos no viena uz otro sānu (sānsvere jeb angliski "rolling"), kas notiek mierīgā ūdenī bez pretestības, apraksta otrās kārtas diferenciālvienādojums:

$$\theta'' + {n_\theta}^2\theta = 0,$$

kur $\theta = \theta(t)$ ir šūpošanās amplitūda jeb novirze no līdzsvara stāvokļa laika momentā t (skat.zīmējumu 4).

n_θ ir brīvas (dabiskas) vibrācijas cirkulārā frekvence kuģim šūpojoties bez pretestības.



4.zīmējums

Dotais vienādojums ir otrās kārtas lineārs homogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem. Atrisināsim šo vienādojumu. Diferenciālvienādojumam atbilstošais raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 + {n_\theta}^2 = 0,$$

Šī vienādojuma saknes ir kompleksi saistītie skaitļi

$$k_1 = n_\theta i \ , \qquad k_2 = -n_\theta i$$

Tādejādi diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\theta(t) = C_1\cos(n_\theta t) + C_2\sin(n_\theta t)$$

2) Kuģa šūpošanos no viena uz otro sānu, kas notiek mierīgā ūdenī, ņemot vērā ūdens pretestību, apraksta diferenciālvienādojums

$$\theta'' + 2\mu_\theta\theta' + {n_\theta}^2\theta = 0$$

kur μ_θ ir relatīvais pretestības koeficients.

Atbilstošais raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 + 2\mu_\theta k + {n_\theta}^2 = 0,$$

Raksturīgā vienādojuma saknes ir

$$k_1 = -\mu_\theta + i\sqrt{{\mu_\theta}^2 - {n_\theta}^2} \;\; un \;\; k_2 = -\mu_\theta - i\sqrt{{\mu_\theta}^2 - {n_\theta}^2}$$

Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\theta(t) = C_1\, e^{-\mu_\theta t} cos(\omega_\theta \cdot t) + C_2\, e^{-\mu_\theta t} sin(\omega_\theta \cdot t),$$

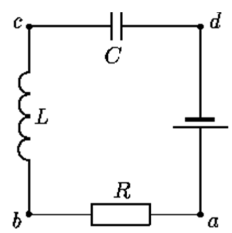
kur

$\omega_\theta = \sqrt{{\mu_\theta}^2 - {n_\theta}^2}$ ir dabiskā frekvence, ja kuģis šūpojas, ņemot vērā pretestību.

Atzīmēsim, ka līdzīgi ar diferenciālvienādojumu palīdzību apraksta arī kuģa garenisko šūpošanos (galsveri; angliski "pitching").

2. Piemērs:

Neviens mūsdienu kuģis nav iedomājams bez elektriskām un elektromehāniskām sistēmām. Maiņstrāvas elektriskā ķēde ir jebkuras šādas sistēmas sastāvdaļa. Pārejas procesus šādās elektriskās ķēdēs, kas notiek īsa laika posmā pēc komutācijas (pēc ķēdes pieslēgšanas spriegumam) vai pēc atslēgšanas no sprieguma, kā arī pieslēdzot vai arī atslēdzot kapacitatīvu elementu, apraksta diferenciālvienādojumi. Vienkāršākās elektriskās shēmas ir rezistora-induktora ķēde (RL) un rezistora-induktora-kondensatora ķēde (RLC) (skat. zīmējumu 5).



5.zīmējums. Rezistora-induktora-kondensatora ķēde

1) Piemēram, ja ķēdi ar nemainīgu pretestību R un induktivitāti L (RL ķēdi) laika momentā t=0 pieslēdz spriegumam $U0$ (piemēram, akumulatoram), tad pēc komutācijas spriegumu līdzsvara vienādojums ir pirmās kārtas lineārs nehomogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem

$$L\frac{di}{dt} + R \cdot i = U_0,$$

kur

t ir laiks,

i(t) ir strāva, kas plūst elektriskajā ķēdē,

R ir rezistora pretestība,

L ir induktīva elementa induktivitāte ,

U_0 ir avota spriegums.

2) Nemainīga sprieguma avota gadījumā pārejas procesu RLC ķēdē apraksta sekojošais otras kārtas diferenciālvienādojums

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0,$$

kur C ir kapacitatīvā elementa kapacitāte.

Atrisināsim šo vienādojumu:

Tas ir otrās kārtas lineārs homogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem. Vienādojumam atbilstošais raksturīgais vienādojums ir

$$Lk^2+Rk+\frac{1}{C}=0$$

jeb

$$k^2+\frac{R}{L}k+\frac{1}{LC}=0$$

Šī vienādojuma saknes ir

$$k_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \quad un \quad k_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

Tādējādi diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$i(t)=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t},$$

kur C_1 un C_2 ir konstantes, kas raksturo amplitūdu.

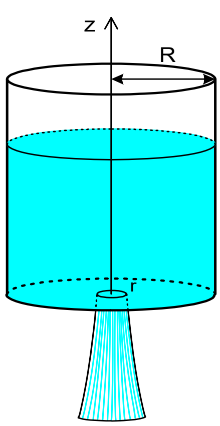
2. Piemērs:

Ir īpaši konteinerkuģi dažādu šķidrumu pārvadāšanai. Avārijas gadījumā var notikt šķidruma noplūde. Aplūkosim sekojošu problēmu - no cilindriskas tvertnes ar liela izmēra pamatu, kura rādiuss ir R, caur nelielu caurumu ar rādiusu r tvertnes apakšā izplūst šķidrums.

Pieņemot, ka sākuma momentā t=0 šķidruma līmenis tvertnē bija H, atrast:

a) tvertnes šķidruma līmeni z(t) laika momentā *t,*

b) laiku T, kurā šķidrums pilnībā iztecēs no tvertnes.



6. zīmējums.

Procesu, kad šķidrums izplūst no cilindriskā tvertnes, apraksta pirmās kārtas diferenciālvienādojums :

$$R^2\frac{dz}{dt}+r^2\sqrt{2gz}=0,$$

kur

t ir laiks,

g ir gravitācijas konstante (g=9.80665 m/s^2),

z=z(t) ir šķidruma līmenis tvertnē laika momentā *t* .

Atrisinājums

1) Lai atrastu funkciju z(t), atrisināsim doto diferenciālvienādojumu

$$R^2\frac{dz}{dt}+r^2\sqrt{2gz}=0$$

Tas ir diferenciālvienādojums ar atdalāmiem mainīgiem.

$$R^2\frac{dz}{dt}=-r^2\sqrt{2g}\cdot\sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}dt$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\int dt$$

$$2\sqrt{z}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\cdot t+C$$

Pieņemot, ka sākuma momentā t=0 šķidruma augstums tvertnē bija H, tas ir, *z(0)=H*, iegūstam

$$2\sqrt{H}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\cdot 0+C$$

$$C=2\sqrt{H}$$

$$2\sqrt{z}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\cdot t+2\sqrt{H}$$

Rezultātā iegūstam funkciju z(t), kura apraksta šķidruma līmeni tvertnē laika momentā t:

$$z(t)=\left(-\frac{r^2}{2R^2}\sqrt{2g}\cdot t+\sqrt{H}\right)^2$$

2) Lai atrastu laiku T, kurā šķidrums pilnībā iztecēs no tvertnes, jāņem vērā, ka šķidruma līmenis samazināsies no H līdz 0 laika posmā no t=0 līdz t= T, tas ir, laika momentā t=T šķidruma augstums traukā ir z=0.

$$2\sqrt{0}=-\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\cdot T+2\sqrt{H}$$

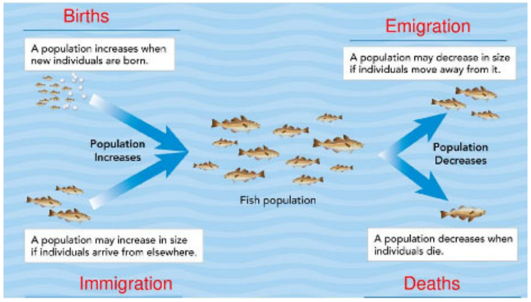
$$\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\cdot T=2\sqrt{H}$$

Izsakot T, rezultātā iegūstam laiku T, kurā šķidrums pilnībā iztecēs no tvertnes

$$T=\frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

3. Piemērs:

Risinot dažādas jūras ekoloģijas problēmas, tiek veidoti situācijas modeļi, kurus apraksta ar diferenciālvienādojumu palīdzību. Tā, piemēram, var aplūkot zivju populācijas palielināšanās vai samazināšanās matemātisko modeli.



Vienkāršākajā gadījumā ezera zivju populāciju P(t) laika momentā t var aprakstīt ar pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P\left(1 - \frac{P}{M}\right),$$

kur

t ir laiks, k ir populācijas augšanas parametrs, M ir nestspēja.

Nestspēja M atspoguļo lielāko zivju skaitu, ko vide var uzturēt. Ja kāda iemesla dēļ zivju skaits pārsniegs nestspēju, tas samazināsies; un, kamēr zivju skaits būs mazāks par nestspēju, tas palielināsies.

Šis vienādojums ir pazīstams kā loģistikas vienādojums.

Zivju populācijas modelēšana ir nozīmīga zivju nozvejas kontrolei.

Piemēram, mencu populāciju P(t) jūras zvejniecībā apraksta modificēts loģistikas vienādojums

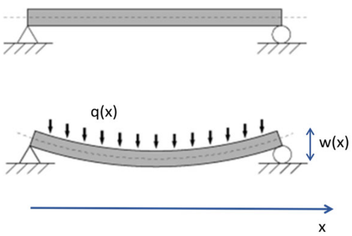
$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - H,$$

kur H ir zivju nozvejas ātrums.

Te būtiska problēma ir tāda, ka zivju populācija ir atkarīga no zivju nozvejas ātruma H.

4. Piemērs:

Būvniecībā, mašīnbūvē, kā arī kuģu būvē diferenciālvienādojumus bieži izmanto aprēķinos, kas ir saistīti ar slodzes uz atbalsta siju modelēšanu. Piemēram, Eilera-Bernulli vienādojums apraksta saistību starp sijas novirzi un pielikto tai slodzi (skaties, piemēram, https://math24.net/beam-deflection.html). Sija ir konstruktīvs elements, kas lieces laikā spēj izturēt lielas slodzes (skat. zīmējumu 7).



7.zīmējums.

Nelielu izliekumu gadījumā sijas izliekuma formu apraksta ceturtās kārtas diferenciālvienādojums

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x),$$

kur *q(x)* ir ārējā slodze, kas iedarbojas uz siju,

E ir sijas elastības modulis,
I ir sijas šķērsgriezuma otrais moments,
funkcija w=w(x) apraksta sijas profila novirzi z ass virzienā kādā punktā x.

Šis vienādojums ar atbilstošiem robežnosacījumiem nosaka noslogotas sijas novirzi. Reizinājums $E \cdot I$ ir konstante, kas zināma kā lieces stingrība.

5. Piemērs:

Parastos diferenciālvienādojumus plaši izmanto dzesēšanas problēmu risināšanā. Aplūkosim sekojošu gadījumu: kāds uzsildīts ķermenis atrodas vidē, kur vides temperatūra ir mazāka par ķermeņa temperatūru. Šajā gadījumā uzsildītā ķermeņa atdzišanas ātrums ir proporcionāls tā temperatūras un vides temperatūras starpībai. Tātad, ja ķermeņa temperatūru laika momentā t apzīmēsim ar T(t) un vides temperatūru ar E(t), tad ķermeņa atdzišanu apraksta diferenciālvienādojums

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - E(t)),$$

kur k>0 ir fizikālā konstante, kura ir atkarīga no ķermeņa materiāla un izmēra.

Ja ķermenim, kura temperatūra tiek modelēta, ir siltuma avots, tad ķermeņa atdzišanu apraksta diferenciālvienādojums

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - E(t)) + mH(t),$$

kur *m* ir pozitīva konstante, apgriezti proporcionāla ķermeņa siltuma kapacitātei,

H(t) nosaka ķermeņa siltuma ģenerēšanas ātrumu. (Dažos gadījumos H(t) var būt arī negatīvs, piemēram, gaisa kondicionēšanas gadījumā).